

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о подписи:

ФИО: Романчук Иван Сергеевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 07.10.2022 10:59:40

Уникальный программный ключ:

6319edc2b582ffdacea443f01d5779368d0957ac34f5cd074d81181530452479

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Тюменский государственный университет»

Физико-технический институт

Кафедра прикладной и технической физики

В.И. Семихин, Б.В. Григорьев, А.В. Ширшова, А.В. Шаталов,
Д.А. Важенин.

МЕХАНИКА

Учебно-методическое издание для студентов направлений
подготовки

03.03.02 Физика, 16.03.01 Техническая физика

Лабораторный практикум

Тюмень

2021

УДК 531/534(075.8)

ББК В21я73

М550

В.И. Семихин, Б.В. Григорьев, А.В. Ширшова, А.В. Шаталов, Д.А. Важенин. Механика: учебно-методическое издание для студентов направлений подготовки 03.03.02 Физика, 16.03.01 Техническая физика (Лабораторный практикум). Тюмень: кафедра прикладной и технической физики Тюменского государственного университета, 2021. 96 с.

Лабораторный практикум «Механика» содержит основные вопросы таких важнейших разделов курса механики, как динамика вращательного движения, законы сохранения, колебательные процессы, упругие деформации.

Сборник содержит методические указания к 15 лабораторным работам по курсу механики. Для каждой работы предусмотрены теоретическая часть и экспериментальная часть. Экспериментальная часть методических указаний написана в соответствии с техническими характеристиками лабораторных установок, используемых для преподавания в курсе механики Физико-технического института. В конце сборника имеется список рекомендованной к изучению литературы.

Рекомендовано к изданию кафедрой прикладной и технической физики. Утверждено и.о. проректора по образовательной деятельности Тюменского государственного университета.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ

А.В. Ширшова, к.ф.-м.н., доцент

РЕДАКТОР

© ФГАОУ ВО Тюменский государственный университет, 2021.

© В.И. Семихин, Б.В. Григорьев, А.В. Ширшова, А.В. Шаталов, Д.А. Важенин, 2021.

Лабораторная работа № 1.

Проверка основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека

Теоретическая часть.

Уравнение динамики вращательного движения

Любое сложное движение твердого тела можно представить как сумму двух простых движений: поступательного и вращательного. Поэтому рассмотрение движения твердого тела целесообразно начинать с анализа этих простых движений.

Целью данной лабораторной работы является изучение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Вращательным движением называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами на одной прямой, называемой осью вращения.

Пусть частица Δm движения по окружности радиуса r . Основной закон динамики вращательного движения для нее можно получить, используя второй закон Ньютона:

$$\Delta m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}. \quad (1)$$

Умножим векторно слева это уравнение на радиус-вектор частицы \vec{r}

$$\Delta m \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (2)$$

Рассмотрим производную во времени от векторного произведения радиус-вектора на скорость частицы:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{V}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right] \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (3) равно нулю, т.к. $d\vec{r}/dt = \vec{V}$, а векторное произведение вектора самого на себя равно нулю. Второе слагаемое совпадает с векторным произведением в левой части. Тогда уравнение (2) можно представить так:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \Delta m \vec{V}] = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (4)$$

Вектор $\vec{L} = [\vec{r} \times \Delta m \vec{V}]$ называют моментом импульса. Его модуль:

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\Delta m \vec{V}| \sin \alpha,$$

где α - угол между радиус-вектором \vec{r} и импульсом частицы $\Delta m \vec{V}$.

Вектор $\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$ называют моментом силы. Для простоты будем полагать, что вектор силы лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Тогда модуль момента силы можно представить так:

$$M = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \beta,$$

Где β - угол между радиус-вектором, проведённым в точку приложения силы, и силой \vec{F} .

Момент силы и момент импульса — величины векторные. Направление их определяется по правилу правого винта: головка правого винта вращается по кратчайшему направлению от первого вектора в векторном произведении ко второму, при этом направление поступательного перемещения винта совпадает с направлением векторного произведения.

Итак, основной закон динамики вращательного движения можно записать следующим образом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5)$$

Радиус-вектор частицы, движущейся по окружности, перпендикулярен скорости, синус угла между ними равен 1, поэтому в скалярном виде уравнение (5) можно записать так:

$$\frac{d}{dt} (r \cdot \Delta m V) = M \quad (5)$$

Учитывая, что $V = \omega \cdot r$, где ω - угловая скорость частицы, получим:

$$\frac{d}{dt} (\Delta m r^2 \omega) = \Delta m r^2 \frac{d\omega}{dt} = M \quad (6)$$

Величину $J = \Delta m r^2$ принято называть моментом инерции частицы.

Вращающееся вокруг неподвижной оси твердое тело можно представить как совокупность N малых частиц (размеры их малы по

сравнению с расстоянием до оси вращения) и для каждой частицы можно написать уравнение (6), а затем сложить все уравнения. В законе движения для одной частицы твердого тела необходимо учитывать также моменты внутренних сил. Однако при суммировании, в соответствии с третьим законом Ньютона, общий момент внутренних сил окажется равным нулю и в правой части останется только сумма моментов всех внешних сил:

$$\sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^N M_i$$

Сумму в левой части уравнения естественно называть моментом инерции твердого тела относительно заданной оси вращения. Тогда уравнение можно представить в виде:

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M, \quad (7)$$

где J – момент инерции тела, ε – угловое ускорение, M – момент всех внешних сил.

Экспериментальная часть.

Описание установки и методика измерений

Проверка основного уравнения динамики вращательного движения, а также теоремы Штейнера осуществляется с помощью установки - так называемого маятника Обербека. Маятник Обербека представляет собой вращающуюся вокруг горизонтальной оси крестовину из четырех взаимоперпендикулярных стержней, закрепленных в насаженной на ось втулке L , (рисунок 1). На стержнях располагаются четыре одинаковых по массе грузика, которые можно перемещать и закреплять в любом месте на стержне. На оси маятника имеется также шкив с намотанной на него нитью, к концу которой привязана платформа с грузиками. Вращая крестовину, приводят маятник в исходное положение, когда платформа с грузиками находится в верхней части, несколько выше фотодатчика. Нажимая клавишу «ПУСК», предоставляют грузику возможность опускаться. Время опускания грузика на заданное расстояние определяется с помощью фотодатчиков.

Движение грузика на нити описывается уравнением динамики поступательного движения:

$$ma = F_T - T = mg - T, \quad (8)$$

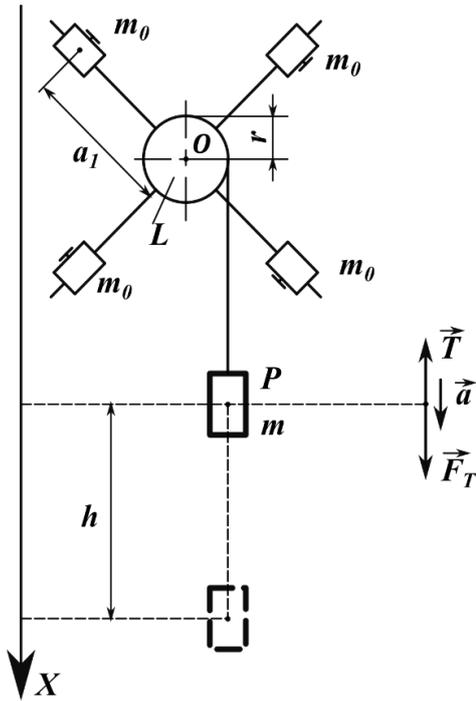


Рис. 1. Кинематическая схема маятника Обербека

где T - натяжение нити, $F_T = mg$ - сила тяжести, действующая на грузик. Вращение крестовины с грузами описывается уравнением динамики вращательного движения:

$$J \cdot \varepsilon = M = Tr, \quad (9)$$

где J - полный момент инерции системы, ε - угловое ускорение, r - радиус шкива, на который намотана нить. Поскольку считается, что нить не растяжима и не проскальзывает, линейное и угловое ускорения связаны соотношением:

$$a = r \cdot \varepsilon. \quad (10)$$

Двигаясь равноускорено, грузик на нити

за время t опустится на высоту

$$h = at^2/2. \quad (11)$$

Решая написанную выше систему уравнений, можно найти угловое ускорение маятника:

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}, \quad (12)$$

момент натяжения нити:

$$M = mr(g - a) = mr\left(g - \frac{2h}{t^2}\right), \quad (13)$$

момент инерции маятника

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{mr^2 t^2 \left(g - \frac{2h}{t^2}\right)}{2h}. \quad (14)$$

Измерение и обработка результатов.

Задание 1

Согласно закону динамики вращательного движения, при постоянном моменте инерции угловое ускорение прямо пропорционально моменту сил, действующих на вращающееся тело. Таким образом, отношение момента силы натяжения нити к угловому ускорению маятника должно оставаться постоянным. Это положение проверяется следующим образом. Грузики на стержнях крестовины устанавливаются на одинаковых расстояниях от втулки (3-5 см.) и фиксируются в этом положении. Крестовина при этом должна быть

уравновешена, т.е. оставаться неподвижной при любой ориентации стержней. На платформе, привязанной к концу нити, устанавливаются два грузика. Затем, вращая крестовину, поднимают платформу с грузиками в такое положение, при котором нижний край платформы находился бы на несколько мм выше луча света фотодатчика. Нажимают клавишу «ПУСК» и измеряют время движения грузиков на заданное расстояние h . Необходимо повторить этот эксперимент 4-5 раз и найти среднее время движения. По формуле (14) рассчитывается отношение M_1/ε_1 и доверительный интервал значений этого отношения.

Затем на платформу устанавливают еще два грузика и повторяют те же эксперименты, по результатам которых рассчитывают отношение M_2/ε_2 и соответствующий доверительный интервал. Если значение одного отношения попадает в доверительный интервал значений другого отношения, или хотя бы доверительные интервалы имеют общие точки, можно считать проверку удавшейся. Если же этого не получилось, необходимо найти ошибку в проведении экспериментов и проделать их повторно.

Задание 2

Согласно закону динамики вращательного движения, при постоянном моменте силы угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции. Следовательно, постоянным остается произведение момента инерции на угловое ускорение. Для проверки этого положения используем данные, полученные при выполнении первого задания. Было установлено, что

$$M_2/\varepsilon_2 \approx M_1/\varepsilon_1 = J_1$$

Изменим момент инерции маятника, перемещая грузики на стержнях на максимальное расстояние от втулки. На платформе оставляем те же грузики, что и во второй части первого задания. Аналогично первому заданию измеряют время опускания грузика на фиксированное расстояние повторяя этот эксперимент 4-5 раз. По этим данным рассчитывается произведение $J_2\varepsilon_3 = M_3$, а также доверительный интервал значений этой величины. Полученное значение произведения $J_2\varepsilon_3$, сравнивается с произведением $J_1\varepsilon_2$ из первого задания. При выполнении второго задания условие постоянства момента силы в точности не соблюдается, поскольку по условию эксперимента остается постоянной лишь масса грузика на нити. Если менять при этом момент инерции, то в общем случае меняется и линейное ускорение грузика на нити, и натяжение нити, а значит и момент

натяжения нити. Но линейное ускорение грузика на нити a_2 и a_3 , существенно меньше ускорения свободного падения g , поэтому приближенно равенство $M_2 = M_3$ выполняется.

Задание 3

Полученные при выполнении предыдущих заданий данные можно использовать для проверки теоремы Штейнера. Согласно теореме Штейнера, момент инерции одного грузика на стержне равен:

$$J_{\text{ГР}} = J_{0\text{ГР}} + m_0 a_1^2,$$

где $J_{0\text{ГР}}$ - момент инерции грузика относительно оси, проходящей через центр масс грузика, m_0 - масса одного из четырёх грузиков, a_1 - расстояние от оси вращения до центра масс грузика на стержне. Таким образом, момент инерции всей крестовины в первом задании может быть представлен в виде

$$J_1 = J + 4J_{0\text{ГР}} + 4m_0 a_1^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} m_{\text{СТ}}^2,$$

где J - момент инерции втулки с осью и шкивом, $4 \cdot (1/3)m_{\text{СТ}}^2$ - момент инерции четырех стержней. Момент инерции J_2 во втором случае может быть представлен в виде:

$$J_2 = J + 4J_{0\text{ГР}} + 4m_0 a_2^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} m_{\text{СТ}}^2,$$

где a_2 - расстояние от оси до центра масс грузика на стержне. Следовательно, теоретически увеличение момента инерции равно:

$$\Delta J = 4m_0 (a_2^2 - a_1^2).$$

Необходимо сравнить эту величину с экспериментальным значением $J_2 - J_1$.

Технические характеристики установки: масса платформы 53 г, масса стержня 53 г

Контрольные вопросы

1. Выведите основной закон динамики вращательного движения.
2. Что такое момент импульса, момент силы, момент инерции?
3. Выведите выражение для расчёта момента инерции маятника Обербека.
4. Сформулируйте теорему Штейнера.

Лабораторная работа № 2. Определение угловой скорости прецессии гироскопа

Теоретическая часть.

Гироскоп. прецессия гироскопа

Рассмотрим некоторые примеры вращательного движения твердого тела. В современных навигационных приборах, используемых в авиации и космонавтике, широкое применение находят гироскопы. Гироскопом называется *осесимметричное твердое тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии*. Гироскоп называют уравновешенным (или свободным), если его центр масс остается неподвижным при любых изменениях ориентации его оси в пространстве. Иначе говоря, его центр масс совпадает с точкой опоры. Такой гироскоп называют гироскопом с одной закрепленной точкой.

Рассмотрим движение гироскопа с одной закрепленной точкой, схематически изображенном на рисунке 1. Для описания движения гироскопа удобно использовать уравнение движения в форме уравнения моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1)$$

Если момент внешних сил $M = 0$, ось гироскопа сохраняет ориентацию в пространстве, а сам гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . А его момент импульса L равен $J \cdot \omega$, где J -момент инерции гироскопа относительно оси симметрии.

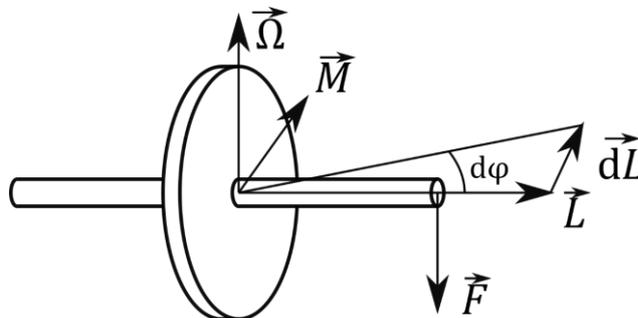


Рис. 1

Если к оси гироскопа приложить силу \vec{F} , направленную вертикально вниз, возникает момент силы \vec{M} , лежащий в горизонтальной плоскости и ориентированный перпендикулярно вектору \vec{L} . В соответствии с законом динамики вращательного движения (1), изменение вектора момента импульса $d\vec{L}$, имеет такое же направление, как и вектор \vec{M} . Таким образом, в результате действия момента силы в основном происходит изменение

ориентации вектора \vec{L} , т.е. происходит вращение вектора \vec{L} в горизонтальной плоскости.

Угол поворота вектора \vec{L} можно представить в виде:

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = M \frac{dt}{L} \quad (2)$$

Используя это соотношение можно найти угловую скорость вращения оси гироскопа:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{J_0 \omega_0} \quad (3)$$

Взаимная ориентация векторов \vec{L} , \vec{M} и $\vec{\Omega}$ определяется векторным соотношением:

$$[\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \vec{M}$$

Поскольку вектор \vec{M} поворачивается вместе с \vec{L} , а их взаимное расположение не меняется со временем, то под действием постоянной по величине силы \vec{F} ось гироскопа будет вращаться с постоянной угловой скоростью Ω . Такое движение называют прецессией, а величину Ω — угловой скоростью прецессии. Все приведенные рассуждения справедливы для гироскопа, вращающегося с большой угловой скоростью, т.е. при условии $L = J_0 \omega_0 \gg dL$ или $\omega_0 \gg \Omega$.

Экспериментальная часть.

Описание установки

Принципиальная схема установки изображена на рисунке 2.

На горизонтальной платформе 1 прибора закреплена массивная вертикальная стойка 2. На этой стойке расположены кронштейн 3 с фотодатчиком 4 и внешняя втулка вращающегося соединителя 5. Вращающийся соединитель позволяет гироскопу поворачиваться вокруг вертикальной оси с малым трением, обеспечивая при этом питание электрическим током фотозлектрического датчика 6 и электродвигателя 7. Электродвигатель смонтирован на кронштейне 8 таким образом, что его ось может поворачиваться в вертикальной плоскости на небольшой угол. На валу двигателя закреплён массивный металлический диск 9, защищённый кожухом 10. К корпусу электродвигателя прикреплен рычаг 11 с грузом.

Перемещая груз по рычагу можно уравнивать гироскоп или создавать момент силы действующий на ось гироскопа.

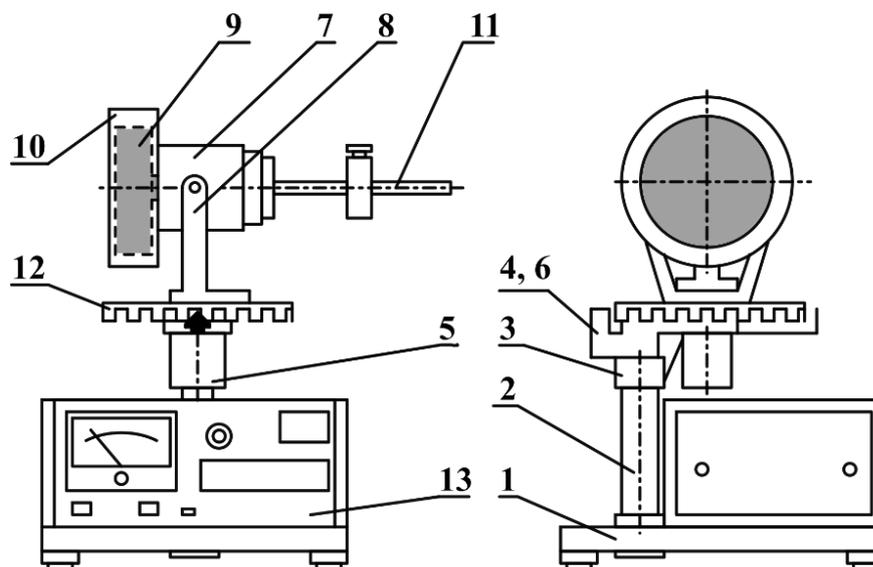


Рис. 2.

Поворот гироскопа вокруг вертикальной оси измеряется с помощью устройства 12 в виде диска с угловой шкалой. Для автоматического измерения угла поворота оси гироскопа диск 12 имеет небольшие отверстия, расположенные по окружности через 10° . При повороте оси гироскопа подсчитывается число отверстий (и тем самым угол поворота оси), а также время, за которое ось поворачивается на заданный угол. Соответствующая информация выводится на табло блока управления 13.

Измерение и обработка результатов

На лицевой панели блока управления расположены следующие элементы: клавиши «СЕТЬ», «СБРОС», «СТОП», а также ручка потенциометра «РЕГ. СКОРОСТИ». **Внимание!** Перед включением прибора в сеть обязательно вывести ручку регулятора скорости в крайнее левое положение! Нажатие клавиши «СЕТЬ» вызывает включение питающего напряжения. При этом должны светиться цифровые индикаторы на панели блока управления и лампочки фотоэлектрических датчиков. Медленно вращая ручку потенциометра «РЕГ. СКОРОСТИ», проверить работает ли электродвигатель и отклоняется ли стрелка прибора для измерения числа оборотов. Перемещая грузик, установить рычаг 11 гироскопа в горизонтальное положение.

Плавно (в течение 1.5-2 мин) вращая ручку потенциометра установить скорость вращения электродвигателя 6000 об/мин. Отметив предварительно начальное положение грузика (при котором нет прецессии), переместить его на 2 см от положения равновесия. При этом ось гироскопа начнет равномерно

поворачиваться в горизонтальной плоскости. Нажать клавишу «СБРОС», затем, после поворота оси на угол не менее 30° , нажать клавишу «СТОП» и записать показания индикаторов: $\Delta\varphi$ и Δt . Нажимая снова клавишу «СБРОС», повторить 4-5 раз измерения при тех же скорости вращения электродвигателя и положении грузика. Рассчитать угловую скорость прецессии $\Omega = \Delta\varphi / \Delta t$. Перемещая грузик последовательно на 2 см. провести измерения скорости прецессии при различных значениях момента силы M , величина которого рассчитывается по формуле

$$M = mg \cdot x,$$

где m – масса грузика, x – смещение грузика по горизонтальной оси относительно положения равновесия.

Для каждого положения грузика рассчитать угловую скорость прецессии Ω , момент силы M и, используя формулу (3), момент инерции ротора электродвигателя с диском.

Технические характеристики установки

- время запуска гироскопа 2 мин
- масса перемещаемого груза 375 г
- погрешность измерения времени не более 10-3 с
- погрешность измерения скорости вращения двигателя не более 2,5%

Контрольные вопросы

1. Сформулировать основной закон динамики вращательного движения.
2. Что такое гироскоп, какое движение называют прецессией?
3. Вывести формулу для угловой скорости прецессии.
4. Как изменится движение гироскопа, если изменить направление внешней силы, действующей на ось, на противоположное?
5. Как по измеренному значению угловой скорости прецессии определить момент инерции гироскопа?

Лабораторная работа № 3. Изучение движения маятника Максвелла

Теоретическая часть

Маятник Максвелла представляет собой диск, жестко насаженный на ось, которая с помощью двух нитей прикреплена к неподвижной опоре. Нити крепятся к оси и опоре таким образом, чтобы ось располагалась горизонтально. Для приведения маятника в движение необходимо вращая ось, поднять маятник в верхнее исходное положение и отпустить. Сложное движение маятника можно представить как наложение двух движений: поступательного движения центра масс и вращение относительно оси, проходящей через центр масс. На рисунке 1 представлена схема маятника Максвелла и действующие на него силы. Здесь \vec{F} – это суммарная сила натяжения двух нитей, $m\vec{g}$ – сила тяжести. Уравнение динамики поступательного движения в проекциях можно записать в виде:

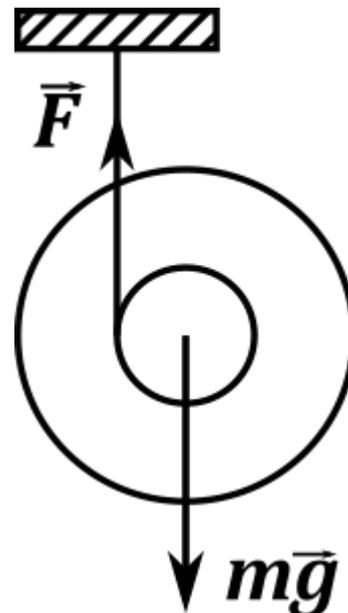


Рис. 1. Схема маятника Максвелла.

$$ma = mg - F \quad (1)$$

Если рассматривать вращение маятника относительно оси, проходящей через центр масс, момент силы тяжести будет равен нулю, а момент силы натяжения нити $M = Fr$, где r – радиус стержня, на который наматываются нити. Поэтому закон динамики вращательного движения представится в виде:

$$J_0 \cdot \varepsilon = M = F \cdot r, \quad (2)$$

где J_0 – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс, ε — угловое ускорение. Поскольку нити не проскальзывают относительно стержня, эти два движения взаимно связаны. Связаны между собой линейное перемещение центра масс и угол поворота маятника, линейная и угловая скорости, также линейное и угловое ускорения. Причем ускорения связаны простым соотношением:

$$a = \varepsilon \cdot r \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1), (2) и (3), найдем ускорение центра масс маятника:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{J_0}{mr^2}} \quad (4)$$

Полученное соотношение показывает, что маятник будет двигаться с постоянным ускорением центра масс, поэтому расстояние l , на которое опустится центр масс, ускорение и время движения связаны известным соотношением:

$$l = \frac{at^2}{2} \quad (5)$$

Решая совместно систему уравнений (4) и (5), можно найти момент инерции маятника:

$$J_0 = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2l} - 1 \right). \quad (6)$$

В нижнем положении маятника, когда нити полностью разматываются, происходит скачкообразное изменение линейной скорости по направлению. Угловая скорость в момент прохождения нижнего положения не изменяется ни по величине, ни по направлению. После прохождения нижнего положения маятник будет двигаться вверх. Если бы в системе не действовали силы трения, маятник поднялся бы на ту же самую высоту за такое же время. Далее этот процесс будет периодически повторяться, что и позволило назвать такую систему маятником.

Экспериментальная часть.

Описание установки

На горизонтальном основании установки расположены универсальный секундомер и вертикальная стойка. На вертикальной стойке смонтированы: верхний кронштейн, на котором расположен электромагнит и крепежные детали для нитей, верхний и нижний фотодатчики для измерения времени движения маятника. Сама вертикальная стойка снабжена линейной шкалой для определения высоты, на которую опускается центр масс маятника. Движущаяся часть маятника представляет собой легкую дюралевую ось, на которой жестко насажен дюралевый ролик. На ролик помещается массивное стальное кольцо с прорезью для нитей. Перед началом эксперимента одно из сменных колец должно быть надежно установлено на ролике.

Для выполнения эксперимента необходимо включить прибор, дать ему 3-5 мин прогреться, нажать клавишу «СБРОС» и отжать клавишу «ПУСК». Убедившись, что нити не перекошены и их длина подобрана таким образом, что при опускании в нижнее положение маятник не будет ударяться о фотодатчик, надо поднять маятник в верхнее исходное положение, вращая ось и наматывая на нее нить. При этом надо следить, чтобы витки нитей укладывались один к одному без перехлеста в направлении к ролику. Маятник фиксируется с помощью магнита в верхнем положении, а, затем, нажатием клавиши «ПУСК» опускается на расстояние l . Автоматически включается миллисекундомер. Измерения повторяются 5 раз с каждым стальным кольцом. По формуле (6) рассчитывается момент инерции маятника с тремя стальными кольцами. В этой формуле под m понимается масса всей движущейся части: кольца и ролика с осью: r - радиус оси.

Для проверки правильности полученных результатов необходимо оценить момент инерции каждого кольца, считая, что вся масса кольца сосредоточена по окружности, радиус которой равен среднему радиусу кольца. Сравнить полученные данные с результатами эксперимента.

Параметры установки

Диаметр оси маятника-10 мм, внешний диаметр ролика-86 мм, внешний диаметр колец-105 мм, масса ролика с осью-123г; 259г, масса стальных колец 388 г; 522 г

Контрольные вопросы

1. Какое движение называется плоским?
2. Вывести формулу для линейного ускорения маятника.
3. Вывести ту же формулу, рассматривая движение маятника как поворот относительно мгновенной оси вращения.
4. Вывести формулу для расчета момента инерции маятника.

Лабораторная работа № 4. Изучение качения тела по наклонной плоскости

Теоретическая часть

Рассмотрим качение цилиндра или шара по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рисунок 1). На цилиндр действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления плоскости на цилиндр \vec{N} и сила трения цилиндра и плоскости $\vec{F}_{\text{тр}}$.

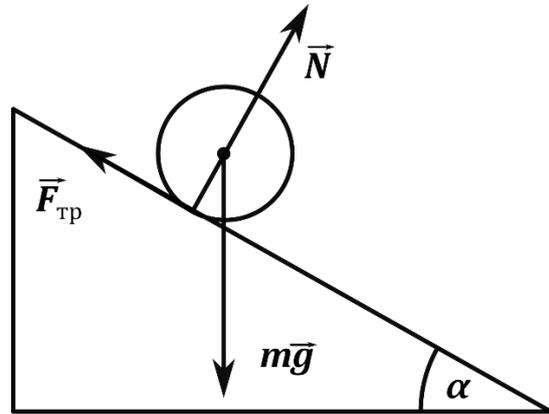


Рис. 1

Запишем уравнение динамики поступательного движения, считая, что все силы приложены к центру масс:

$$ma = mg \cdot \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

где $mg \cdot \sin \alpha$ – проекция силы тяжести, направленная вдоль наклонной плоскости.

При скатывании с наклонной плоскости цилиндр вращается относительно оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра. В уравнении динамики вращательного движения цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс, необходимо учесть только момент силы трения, равный

$$M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot R, \quad (2)$$

где R – радиус цилиндра. Само уравнение динамики запишем следующим образом:

$$J_0 \varepsilon = M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} R, \quad (3)$$

где J_0 – момент инерции цилиндра, ε – угловое ускорение.

Если качение цилиндра по наклонной плоскости происходит без проскальзывания, то линейное и угловое ускорение связано соотношением:

$$a = \varepsilon R \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (1), (3) и (4), находим ускорение тела:

$$a = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{m + \frac{J_0}{R^2}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mR^2}}. \quad (5)$$

Будем считать, что цилиндр скатывается без начальной скорости с наклонной плоскости длиной l . Тогда линейная скорость центра масс в нижней точке наклонной плоскости будет равна:

$$V = \sqrt{\frac{2gl \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{J}{mR^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{J}{mR^2}}} \sqrt{2gl \cdot \sin \alpha}. \quad (6)$$

Анализируя полученное выражение для скорости тела можно убедиться в том, что при фиксированных значениях угла наклона и длины наклонной плоскости, она не зависит от массы тела, а зависит только от распределения массы относительно оси вращения. При вычислении скорости сплошного однородного цилиндра следует брать, момент инерции (см. Приложение 1) $J_0 = (1/2) \cdot mR^2$, для шара $J_0 = (2/5) mR^2$, тонкостенного полого цилиндра $J_0 \approx mR^2$.

Экспериментальная часть.

Описание установки, методика измерений.

Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол $\alpha = 10^\circ$, опирается на четыре вертикальные стойки (рисунок 1), установленные на массивной платформе. Та часть платформы, на которую падают тела после скатывания с наклонной плоскости, покрыта слоем резины. На нее, в свою очередь, накладывают чистый лист бумаги и фиксируют его с помощью металлической рамки. И наконец, сверху кладут лист копировальной бумаги. В месте падения предмета на бумагу остается четкий след. Таким образом осуществляется регистрация места падения тела. Металлическая рамка, фиксирующая положение листа бумаги, закреплена

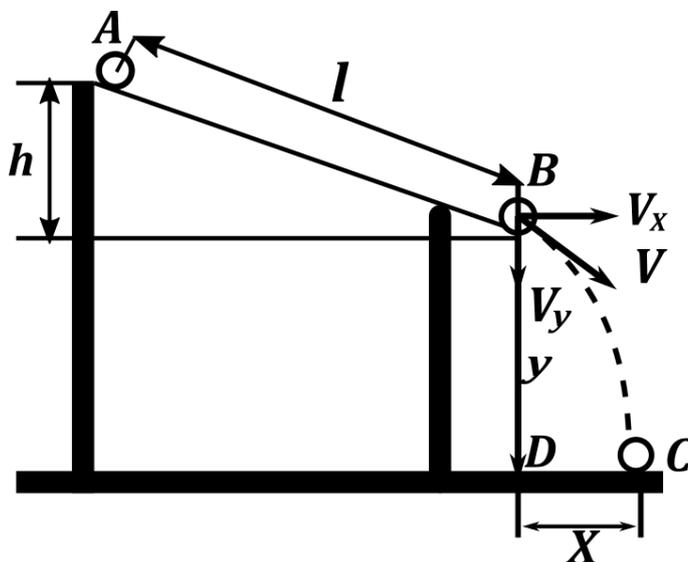


Рис. 1

так, что ее сторона, обращенная к наклонной плоскости, находится на одной вертикали с нижним краем наклонной плоскости. Это упрощает измерение дальности полета тела.

Скорость тела V в нижней точке плоскости можно найти следующим образом. После скатывания с наклонной плоскости тело движется по криволинейной траектории. Это движение можно рассматривать как сложение двух движений: свободное падение с начальной скоростью $V_y = V \sin \alpha$ и равномерное прямолинейное движение в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $V_x = V \cos \alpha$.

Уравнения движения по горизонтали и вертикали для данного случая можно записать так:

$$\begin{cases} x = V_x t \\ y = V_y t + \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Используя первое уравнение системы (1), второе можно привести к такому виду:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

Отсюда время движения

$$t = \sqrt{2/g} \sqrt{y - x \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (3)$$

Величина скорости в нижней точке наклонной плоскости будет равна:

$$V = \frac{V_x}{\cos \alpha} = \frac{x}{t \cos \alpha} \quad (4)$$

Подставляя сюда выражение для времени движения (3), окончательно получим

$$V = \frac{\sqrt{g/2}}{\cos \alpha} \cdot \frac{x}{\sqrt{y - x \cdot \operatorname{tg} \alpha}} \quad (5)$$

Задание 1.

Измерение скорости стальных шариков различного радиуса.

1. Подобрать 3-4 стальных шарика различного диаметра.

2. Подготовить установку к измерениям: установить ее строго горизонтально, под металлическую рамку подложить лист чистой бумаги, сверху положить копировальную бумагу красящей поверхностью вниз.
3. Установить шарик в верхней части наклонной плоскости, прижав его рукой к упору, и отпустить его. Шарик упадет на копировальную бумагу и, таким образом, оставит след на чистом листе бумаги.
4. Измерить дальность полета шарика. Она равна расстоянию от наружной кромки металлической рамки до центра следа падения.
5. Измерить высоту, с которой шарик падает на бумагу.
6. Измерить длину наклонной плоскости, учитывая при этом радиус шарика.
7. Произвести измерения 8-10 раз для каждого шарика и результаты и измерений оформить в виде таблицы.
8. По формуле (3) рассчитать экспериментальное значение скорости шара.
9. По формуле (6) рассчитать теоретическое значение скорости шара и сопоставить результаты этих расчетов.

Задание 2.

Измерение скорости сплошного и полого цилиндров

1. По методике, описанной в задании 1, определить скорости сплошного и полого цилиндров в момент отрыва от наклонной плоскости.
2. Измерения проводить для каждого цилиндра не менее 8-10 раз и результаты измерений также оформить в виде таблицы.
3. По формуле (3) рассчитать экспериментальное значение скорости сплошного и полого цилиндров.
4. По формуле (6) рассчитать теоретическое значение скорости цилиндров и сопоставить результаты этих расчетов.
5. Сравнить значения теоретических расчетов и экспериментальных величин скорости шариков.

Контрольные вопросы.

1. Вывести формулу для ускорения тела (цилиндра или шара), скатывающегося по наклонной плоскости.
2. Какова роль сил трения при качении тел по наклонной плоскости?
3. Получить формулу для скорости тела в нижней части наклонной плоскости, используя закон сохранения энергии.

Лабораторная работа № 4

4. Вывести формулу для скорости тела в нижней точке наклонной плоскости, используя экспериментальные величины.
5. Какова максимальная высота подъема и дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту?

Лабораторная работа № 5. Определение моментов инерции тел методом крутильных колебаний

Теоретическая часть

При вращательном движении твердого тела его мерой инерции является момент инерции относительно оси вращения. Для тел простой формы: диск, цилиндр, шар, стержень, момент инерции можно сравнительно просто рассчитать. Для более сложных тел можно использовать экспериментальные методы определения моментов инерции. Одним из них является метод крутильных колебаний.

Тело, подвешенное на отрезке упругого стального провода, может совершать гармонические колебания относительно оси, проходящей через центр инерции тела. Запишем уравнение динамики вращательного движения для него:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где J — момент инерции тела, φ — угол поворота, отсчитанный относительно положения равновесия, M — момент силы, создаваемый упругим подвесом. При небольших углах закручивания момент силы пропорционален углу поворота:

$$M = -D\varphi, \quad (2)$$

где D — постоянная подвеса, зависящая от упругих свойств материала, диаметра и длины провода.

С учетом формулы (2) основное уравнение динамики вращательного движения приобретет вид:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = J\ddot{\varphi} = -D\varphi. \quad (3)$$

Переносим все слагаемые в левую часть и поделив на момент инерции, получим соотношение, которое называют уравнением гармонического осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0, \quad (4)$$

где

$$\omega_0^2 = D/J$$

Используя известную связь между циклической частотой и периодом, получим формулу для периода крутильных колебаний

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{J/D} . \quad (5)$$

Если известна постоянная подвеса D , то используя формулу (5) можно определить момент инерции тела J . Однако, не всегда можно рассчитать постоянную подвеса D . Поэтому уравнение (5) можно использовать для определения постоянной подвеса. Для этого необходимо экспериментально определить период колебаний T_1 тела с неизвестным моментом J_1 .

$$T_1 = 2\pi\sqrt{J_1/D} . \quad (6)$$

Затем к телу с неизвестным моментом инерции присоединить тело с известным моментом инерции, например, сплошной однородный цилиндр, момент инерции которого равен $J_0 = (1/2) mR^2$. Период колебаний такого составленного тела также надо определить экспериментально

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 + \frac{1}{2} mR^2}{D}} . \quad (7)$$

Два уравнения (6) и (7) можно использовать для нахождения постоянной подвеса D и момента инерции J_1 . Этот же прием можно применить далее для определения момента инерции тела сложной формы:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 + J_x}{D}} . \quad (8)$$

Экспериментальная часть.

Описание установки

Для экспериментального определения моментов инерции сложной конфигурации методом крутильных колебаний используется так называемый унифилярный подвес, принципиальная схема которого представлена на рис. 1.

На вертикальной стойке 1 прибора размещены верхний и нижний кронштейны 2, между которыми на стальной проволоке 3 подвешена рамка 4, предназначенная для установки и закрепления исследуемого тела 5. На поверхности исследуемых тел имеются небольшие углубления для надежного закрепления их в рамке. На среднем кронштейне 6 размещены: шкала 7, предназначенная для определения начального угла поворота рамки,

электромагнит 8 для фиксации рамки в заданном положении, фотоэлектрический датчик 9 и блок питания электромагнита 10. На основании установки 11 расположен миллисекундомер комбинированный для отсчета времени и числа колебаний рамки.

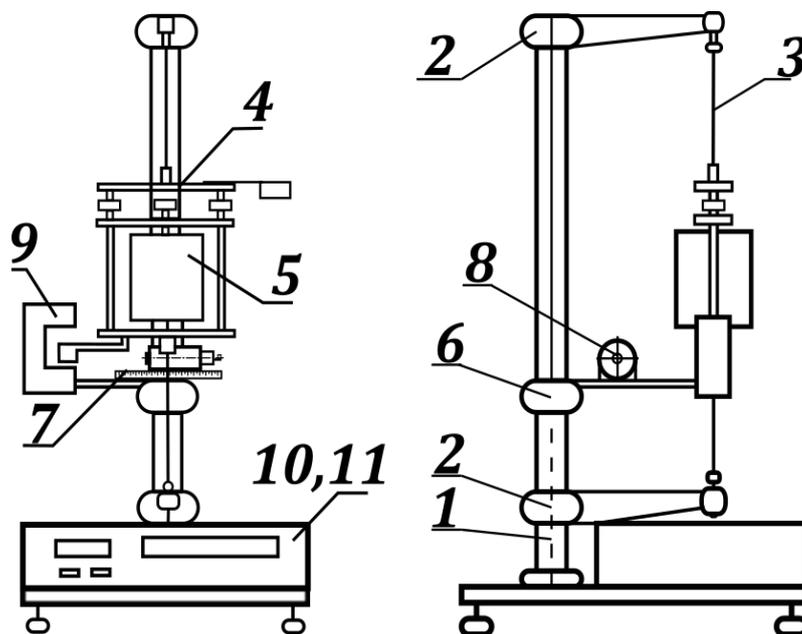


Рис. 1

Измерение и обработка результатов.

1. Включить в сеть шнур питания прибора. Нажать клавишу «СЕТЬ» на лицевой панели, при этом должны загореться цифровые индикаторы.
2. Дать секундомеру 2-3 мин прогреться и включить питание электромагнита. Нажать клавишу «СБРОС».
3. Зафиксировать рамку без груза в отклоненном состоянии с помощью электромагнита, а затем выключить питание магнита. Измерить время t , за которое рамка совершит n колебаний и определить период колебаний $T_1 = t/n$. Удобно n брать 10.
4. Закрепить в рамке грузик цилиндрической формы и определить период колебаний рамки с грузом T_2 . Используя формулы (6) и (7), рассчитать момент инерции рамки J_1 и постоянную подвеса D .
5. Закрепить в рамке груз в виде прямоугольного параллелепипеда таким образом, чтобы ось вращения была перпендикулярна одной из его боковых граней.

6. Определить период колебаний рамки с грузом. Используя формулу (7) (заменив в ней момент инерции цилиндра на неизвестный момент инерции груза), рассчитать момент инерции груза J_x относительно выбранной оси.
7. Таким же образом определить момент инерции груза относительно двух других осей, перпендикулярных другим граням прямоугольного параллелепипеда (по указанию преподавателя определить моменты инерции параллелепипеда относительно других осей)
8. Рассчитать погрешность в определении моментов инерции.

Контрольные вопросы

1. Какое движение совершает рамка? Написать уравнение ее движения.
2. Вывести формулу для периода крутильных колебаний.
3. Используя формулы для периодов крутильных колебаний рамки и рамки с цилиндром вывести конечную расчетную формулу для определения момента инерции груза сложной формы.
4. Какими факторами определяется величина постоянной подвеса?

Лабораторная работа № 6. Определение скорости пули с помощью баллистического маятника

Теоретическая часть

Крутильные колебания маятника можно использовать для определения скорости пули. Для решения этой задачи вращающаяся часть маятника выполнена в виде легкого коромысла, на концах которого симметрично закреплены два грузика. К одному из грузиков прикреплен слой пластилина, в который попадает летящая горизонтально пуля и застревает в нем.

Рассмотрим законы движения и законы сохранения системы: маятник - пуля. Для процесса соударения пули с маятником можно применить закон сохранения момента импульса:

$$mvl = (J_1 + ml^2)\dot{\varphi}_0, \quad (1)$$

где m — масса пули, v — ее скорость, l — расстояние от оси маятника до точки удара пули, $\dot{\varphi}_0$ — угловая скорость движения маятника, J_1 — его момент инерции. Если пренебречь силами трения маятника для его движения после неупругого соударения можно применить закон сохранения механической энергии:

$$\frac{1}{2}(J_1 + ml^2)\dot{\varphi}_0^2 = \frac{1}{2} \cdot D\varphi_0^2, \quad (2)$$

согласно которому кинетическая энергия маятника переходит в потенциальную энергию упругого подвеса. В последнем соотношении φ_0 — максимальный угол поворота маятника, D — постоянная упругого подвеса, зависящая от длины, толщины проволоки и упругих свойств материала, из которого изготовлена эта проволока. Дальнейшее движение маятника описывается законом динамики вращательного движения:

$$(J_1 + ml^2)\ddot{\varphi} = -D\varphi, \quad (3)$$

где φ — угол поворота маятника. Это уравнение после небольших преобразований переходит в уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \cdot \varphi = 0, \quad (4)$$

решением которого является гармоническая функция

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\Omega_0 t). \quad (4^*)$$

Период колебаний маятника определяется соотношением

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 + ml^2}{D}}. \quad (5)$$

Для исключения неизвестной величины D можно изменить момент инерции маятника, симметрично переместив подвижные грузики на коромысле маятника. Тогда период колебаний маятника будет равен

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2 + ml^2}{D}} \quad (6)$$

По теореме Штейнера моменты инерции маятника J_1 и J_2 равны

$$J_1 = J_0 + 2M \cdot R_1^2; \quad J_2 = J_0 + 2M \cdot R_2^2, \quad (7)$$

где J_0 — момент инерции маятника в случае, если бы центры масс подвижных грузиков находились на оси вращения, M — масса одного подвижного грузика, R_1 и R_2 — расстояния от центра масс грузиков в первом и втором положении. Возводя уравнения (5) и (6) в квадрат и вычитая из первого уравнения второе, с учетом соотношения (7) получаем

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{8M}{D} \cdot \pi^2 (R_1^2 - R_2^2),$$

$$D = \frac{8M \cdot \pi^2 (R_1^2 - R_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (8)$$

Из уравнения (5), с учётом соотношения (8) для D , получаем

$$J_1 + ml^2 = \frac{DT_1^2}{4\pi^2} = \frac{2MT_1^2(R_1^2 - R_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (9)$$

Используя уравнение (2) найдем

$$\dot{\varphi}_0 = \varphi_0 \sqrt{\frac{D}{J_1 + ml^2}} = \frac{\varphi_0 2\pi}{T_1}. \quad (10)$$

Подставляя в уравнение (1) найденные выражения для $J_1 + ml^2$, получаем расчетную формулу для нахождения скорости пули

$$v = \frac{4\pi \cdot M \cdot \varphi_0 \cdot T_1 \cdot (R_1^2 - R_2^2)}{ml(T_1^2 - T_2^2)}. \quad (11)$$

Экспериментальная часть.**Описание установки**

Общий вид крутильного баллистического маятника показан на рисунке

1. На горизонтальной платформе 1 прибора закреплены массивная вертикальная стойка 2 и миллисекундомер 3 для измерения числа колебаний маятника и времени, за которое эти колебания происходят. На среднем кронштейне закреплены: пружинный пистолет 4, прозрачный экран со шкалой 5 и фотоэлектрический датчик 6. Подвижная часть маятника состоит из двух плоских пластин 7 с выемками, заполненными пластилином, жестко закрепленных на концах горизонтального стержня 8, а также двух подвижных грузиков 9. Горизонтальный стержень маятника с помощью двух отрезков стальной проволоки закрепляется между верхним 10 и нижним 11 кронштейнами. Таким образом, стержень может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, период колебаний можно изменить, перемещая подвижные грузики по стержню.

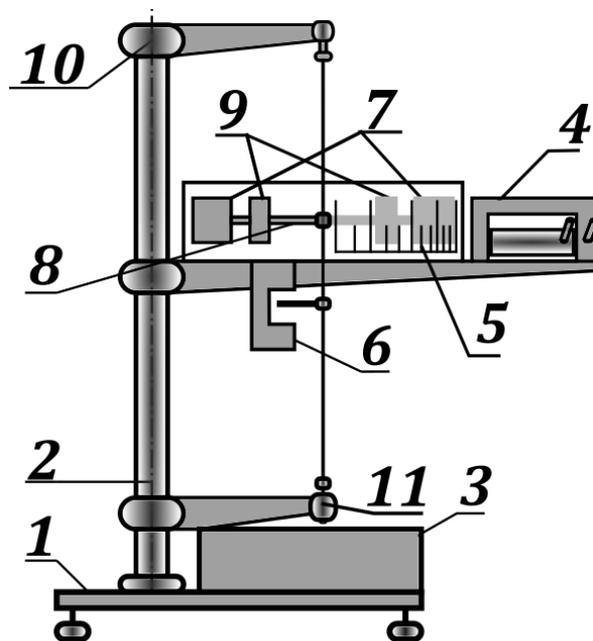


Рис. 1

Горизонтальный стержень маятника с помощью двух отрезков стальной проволоки закрепляется между верхним 10 и нижним 11 кронштейнами. Таким образом, стержень может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, период колебаний можно изменить, перемещая подвижные грузики по стержню.

Изменение и обработка результатов

1. Подвижные грузики раздвинуть на максимальное расстояние от оси R_1 .
2. Установить маятник на нулевое деление шкалы для удобства отсчета углового отклонения.
3. Вставить пулю (короткий отрезок латунной трубки) в пружинный пистолет.
4. Произвести выстрел и измерить по шкале максимальный угол φ_0 отклонения маятника. Повторить измерения 4-5 раз и найти среднее значение для φ_0 .
5. Включить прибор в сеть и дать ему 2-3 мин прогреться. Нажать клавишу «СБРОС», цифровые индикаторы должны при этом давать нулевые показания.

6. После последнего выстрела пулю необходимо оставить в месте попадания. Если пуля упала на стол, надо установить ее на место в слое пластилина.
7. Отклонить маятник рукой на небольшой угол φ и измерить время 10 колебаний. Рассчитать период колебаний $T_1 = t/n$.
8. Переместить подвижные грузики по стержню на минимальное расстояние от оси вращения R_2 . Измерить период колебаний T_2 , при этом положении грузиков.
9. По формуле (11) рассчитать скорости пули, рассчитать погрешность.

Контрольные вопросы

1. Дать определение момента импульса материальной точки твердого тела.
2. При каких условиях выполняется закон сохранения момента импульса?
3. Проанализировать изменения энергии в течение всего эксперимента.
4. Вывести формулу периода колебаний маятника.
5. Вывести формулу для скорости пули (11).

Лабораторная работа № 7. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного и математического маятников

Теоретическая часть. Гармонические колебания

Колебания широко распространены в природе и технике. Простейшими являются гармонические колебания, т.е. такие колебания, при которых некоторая величина, характеризующая это движение (например, смещение маятника относительно положения равновесия) изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Кинематические соотношения, описывающие гармонические колебания, легко получить, анализируя следующую модель (рисунок

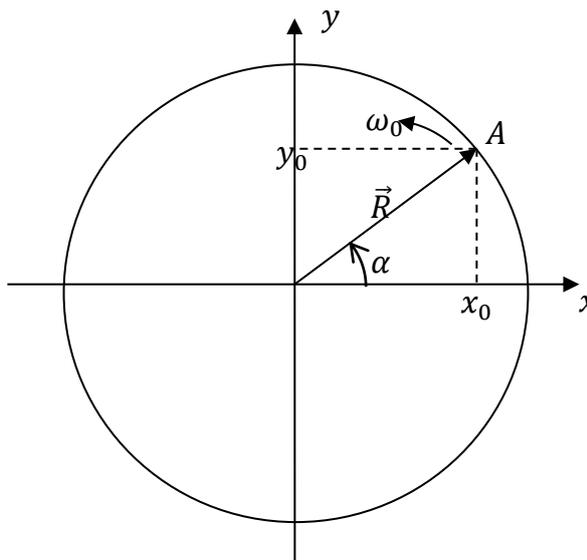


Рис. 1

1). Пусть радиус-вектор R равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 против часовой стрелки. В момент начала наблюдения радиус-вектор образовал угол α с осью Ox . Координаты конца радиус-вектора (точка A) соответственно равны:

$$x(0) = R \cos \alpha$$

$$y(0) = R \sin \alpha$$

В любой дальнейший момент времени координаты x и y будут определяться соотношениями:

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega_0 t + \alpha), \\ y(t) &= R \sin(\omega_0 t + \alpha), \end{aligned} \tag{1}$$

т.е. координаты x и y точки A меняются по гармоническому закону. Соотношения вида (1) называются уравнениями гармонических колебаний. Величина R , стоящая перед синусом или косинусом, называется амплитудой,

$(\omega_0 t + \alpha)$ - фаза колебания, α - начальная фаза, ω_0 - циклическая частота, $T = 2\pi/\omega_0$ - период колебаний.

Пусть материальная точка совершает колебательное движение вдоль оси X . Тогда, зависимость координаты x от времени будет определяться выражением (1), где R целесообразно заменить на x_0 — максимальное смещение относительно положения равновесия. Другие кинематические величины (скорость и ускорение) определяются как обычно в механике путем дифференцирования координаты по времени:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \\ a(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

Графики $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ в зависимости от времени представлены на рисунке 2.

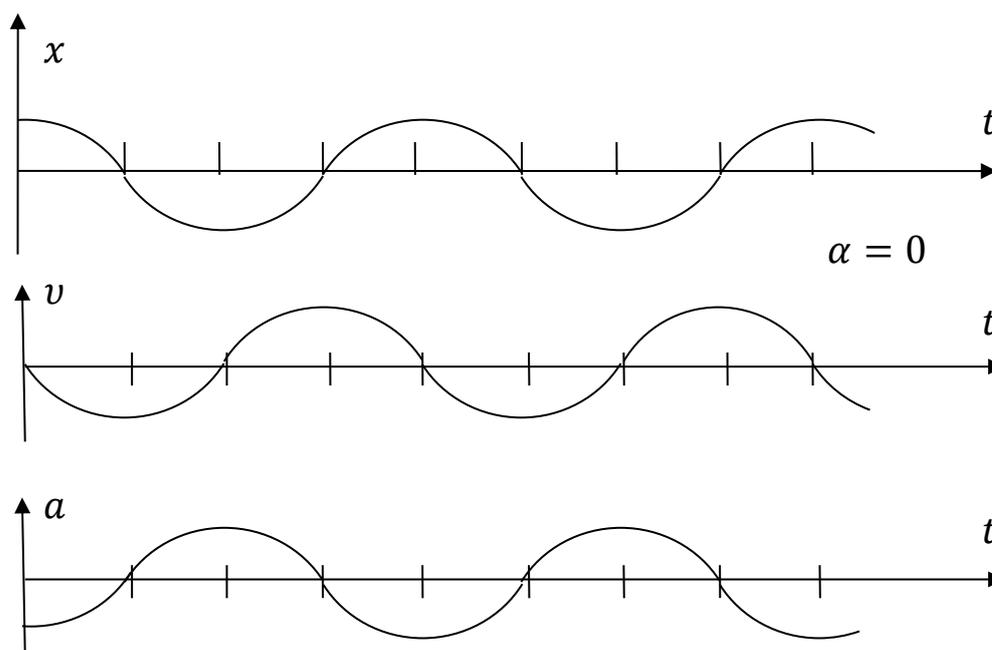


Рис. 2

Очевидно, что скорость и ускорение колеблющейся точки также меняются по гармоническому закону. Из анализа формул (2) и соответствующих им графиков рисунка 2 следует, что скорость смещена по фазе на $\pi/2$ относительно координаты, а ускорение смещено по фазе на $\pi/2$ относительно скорости и на π относительно координаты точки.

С точки зрения динамики, колебательные движения возникают в системах, имеющих положение устойчивого равновесия. При небольших отклонениях от этого положения в системе возникают силы, стремящиеся вернуть ее в положение равновесия. Примером такой системы может служить грузик на пружине.

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из грузика массы m , подвешенного на невесомой пружине с коэффициентом упругости k . Можно показать, что сила тяжести для колебательного движения грузика существенной роли не играет. Уравнение второго закона Ньютона для грузика имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (3)$$

где x - смещение грузика относительно положения равновесия, kx — сила упругости пружины. Применяя обозначение $k/m = \omega_0^2$, приведем это уравнение к виду:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4)$$

Здесь, как обычно при рассмотрении колебательного движения, точками над x обозначено дифференцирование по времени (т.е. $\ddot{x} = d^2x/dt^2$). Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что общее решение дифференциального уравнения (4) имеет вид:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (5)$$

где a и α - некоторые постоянные, зависящие от начальных условий. Общее решение дифференциального уравнения (4) может быть представлено также в виде:

$$x(t) = A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t, \quad (6)$$

где A_1 и A_2 постоянные, также определяемые из начальных условий. Нетрудно показать, что эти два представленных решения дифференциального уравнения (4) эквивалентны. В качестве другого примера системы, которая может совершать гармонические колебания, можно взять сплошной однородный диск, подвешенный на невесомой упругой проволоке (рисунок 3). Смещение диска относительно положения равновесия описывается угловой координатой φ . Для описания динамики движения диска вокруг вертикальной оси естественно взять закон динамики вращательного движения:

$$J\ddot{\varphi} = M, \quad (7)$$

где J - момент инерции диска относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, M - момент силы, действующей на диск со стороны упругого подвеса. Согласно закону Гука $M = -\varphi D$. Тогда уравнение динамики вращательного движения можно привести к виду:

$$J\ddot{\varphi} + D\varphi = 0, \quad (8)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (9)$$

где $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ - циклическая частота колебаний. Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (10)$$

Таким образом, если диск выведен из положения равновесия и представлен самому себе, он будет совершать крутильные колебания по гармоническому закону с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{J/D}, \quad (11)$$

где D - постоянная, зависящая от упругих свойств, длины и поперечного сечения подвеса.

Анализируя эти два примера, можно установить следующие фундаментальные закономерности. Если закон динамики какой-либо системы преобразуется в дифференциальное уравнение вида (4) или (9), то движение в системе совершается в виде гармонических колебаний. Сама система в этом случае называется *гармоническим осциллятором*, а дифференциальное уравнение — *уравнением гармонического осциллятора*. Его решением является *уравнение гармонических колебаний* (5), или (10). Также одной из важнейших физических величин является энергия. Если материальная точка m совершает гармоническое колебательное движение по закону (5), то ее кинетическая энергия определяется формулой

$$E_k(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha); \quad (12)$$

Потенциальная энергия определяется формулой

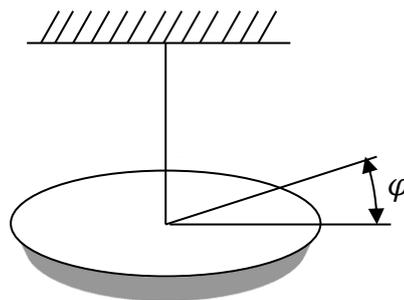


Рис. 3

$$E_p(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (13)$$

учитывая, что $\omega_0^2 = k/m$, $m\omega_0^2 = k$, замечаем, что амплитуды E_1 и E_2 одинаковы:

$$E_k = E_1 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right] \quad (14)$$

$$E_p = E_2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E_2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right] \quad (15)$$

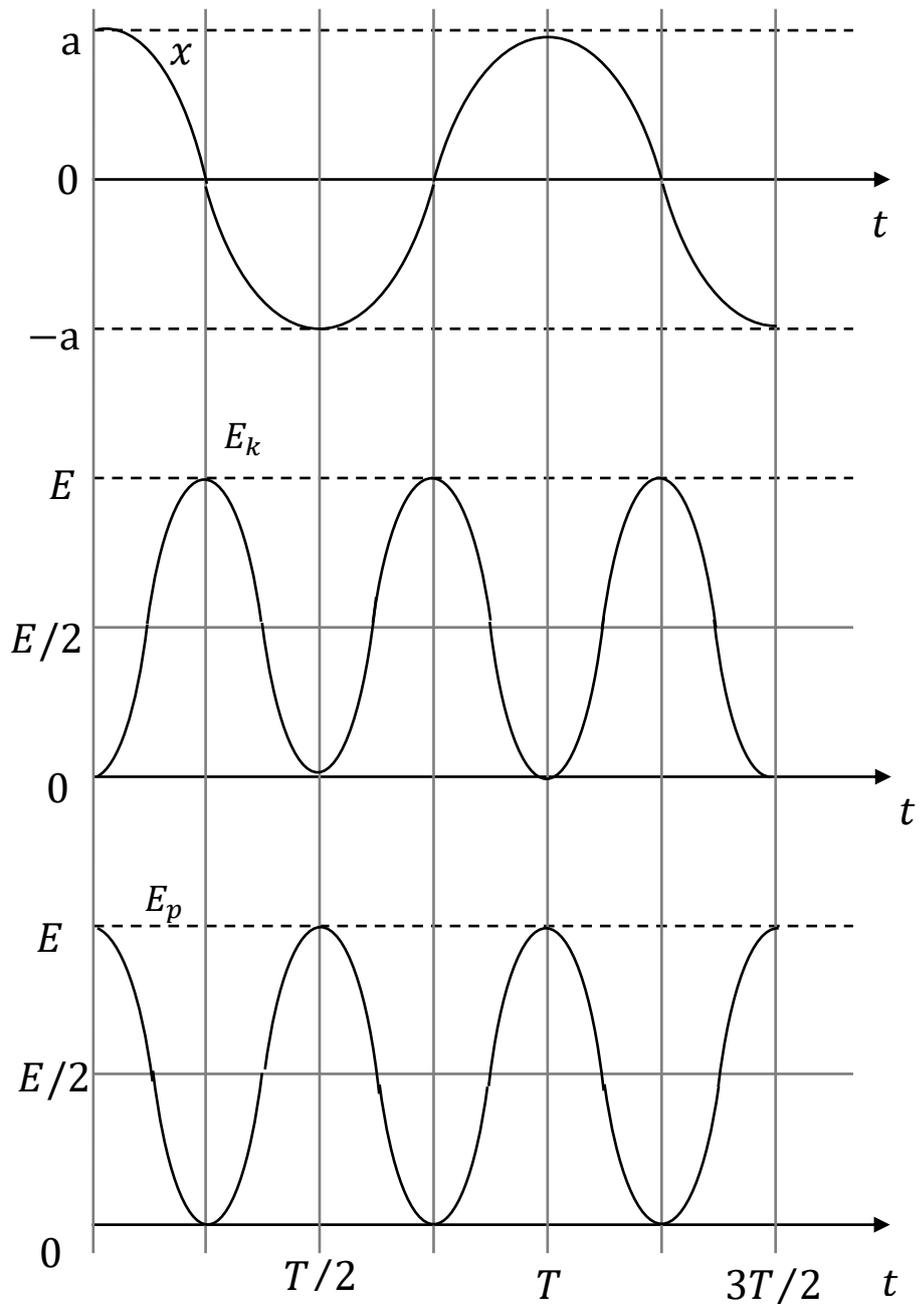


Рис. 4

На рисунке 4 показана зависимость смещения x от t и соответствующие этому смещению кинетическая и потенциальная энергии. Нетрудно убедиться, что полная энергия при этом остается постоянной

Физический и математический маятники

Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси. Точка пересечения оси "O" с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс "C" тела, называется **точкой подвеса маятника**.

Положение тела в каждый момент t можно охарактеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ . Вращение тела происходит под действием силы тяжести, момент силы M для нее равен: $M = -mga_1 \sin \varphi$, где a_1 - расстояние от оси вращения до центра масс тела. Уравнение динамики вращательного движения для физического маятника записывается в виде:

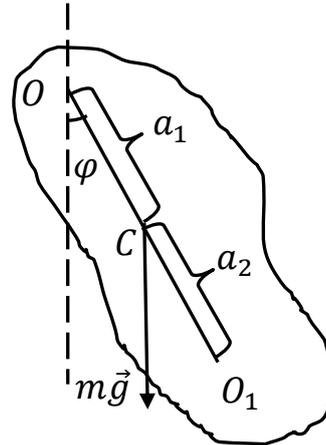


Рис. 5

$$J_1 \ddot{\varphi} = -mga_1 \sin \varphi \quad (16)$$

где J_1 - момент инерции тела относительно оси вращения "O", проходящей через точку подвеса маятника.

При малых колебаниях маятника $\sin \varphi \approx \varphi$ и уравнение (16) преобразуется к виду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga_1}{J_1} \varphi = 0. \quad (17)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка с постоянным коэффициентом перед φ . Обозначив его за ω_0^2 , приходим к известному уравнению гармонических колебаний.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (18)$$

Подстановкой легко убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (19)$$

Данное соотношение аналитически описывает гармонические колебания, которые совершает физический маятник без учета сил сопротивления среды. Величина φ_0 определяет максимальное отклонение колеблющегося тела от положения равновесия и называется амплитудой колебания. Величина ω_0 называется циклической частотой. Величину $\omega_0 t + \delta$ называют фазой колебания, а ее значение при $t = 0$, т.е. величину δ , - начальной, фазой. Начальная фаза определяется положением тела, в котором оно находилось в момент начала отсчета времени. Если при $t = 0$, $\varphi = 0$, то $\delta = 0$ и $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$. Если же при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, то $\delta = \pi/2$ и $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$.

Периодом гармонического колебательного движения называется наименьшее время T , по истечении которого все величины, характеризующие это движение, принимают первоначальное значение. Учитывая, что период синусоидальной функции равен 2π , из (19) следует, что за время T фаза колебаний должна измениться на 2π . Т.е.

$$\begin{aligned} [\omega_0(t + T) + \delta] - (\omega_0 t + \delta) &= \omega_0 T = 2\pi, \\ \omega_0 &= 2\pi/T. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку за ω_0^2 мы обозначили величину mga_1/J_1 , то период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J_1/(mga_1)}. \quad (21)$$

Если период колебаний не зависит от амплитуды, то такие колебания называются *изохронными*. Мы видим, что малые колебания физического маятника с амплитудой порядка нескольких угловых градусов *изохронны*.

Математический маятник

Математический маятник является частным случаем физического маятника. Так называется *маятник*, вся масса которого *практически сосредоточена в одной точке*. Примером математического маятника может служить шарик, подвешенный на длинной нити. В случае математического маятника $a_1 = l$, $J_1 = ml^2$, где l - длина маятника и формула (21) переходит в

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (22)$$

Сравнивая формулы (21) и (22) заключаем, что физический маятник колеблется так же, как математический с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_1}{ma_1}, \quad (23)$$

которая называется приведенной длиной физического маятника;

$$T = 2\pi \sqrt{l_{\text{пр}}/g}. \quad (24)$$

Оборотный физический маятник

Приведенная длина физического маятника легко находится для так называемого оборотного маятника. Отложим от точки подвеса "О" вдоль прямой ОС отрезок ОСО₁, длина которого равна приведенной длине физического маятника. Точка "О₁" называется центром качания. *Центр качания можно определить как математическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений.* Покажем, что действительно, если найдены точки "О" и "О₁" лежащие на одной прямой с точкой центра масс "С" и находящиеся по разные стороны от точки "С", то расстояние ОО₁: равно $l_{\text{пр}}$, приведенной длине физического маятника, если периоды колебания его относительно осей вращения, проходящих через точки О и О₁, окажутся одинаковыми.

При колебании маятника относительно оси "О" согласно (21)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{J_1/mga_1} = 2\pi \sqrt{(J_0 + ma_1^2)/mga_1}, \quad (25)$$

а относительно оси "О₁":

$$T_2 = 2\pi \sqrt{J_2/mga_2} = 2\pi \sqrt{(J_0 + ma_2^2)/mga_2} \quad (26)$$

Где J_0 - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Возводим уравнение (25) и (26) в квадрат и приводим к общему знаменателю, полагая $T_1 = T_2$:

$$T_1^2 \cdot mga_1 = 4\pi^2(J_0 + ma_1^2), \quad (27)$$

$$T_2^2 \cdot mga_2 = 4\pi^2(J_0 + ma_2^2). \quad (28)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$T^2 \cdot mg(a_1 - a_2) = 4\pi^2(a_1^2 - a_2^2); \quad T^2 = 4\pi^2(a_1 + a_2)/g. \quad (29)$$

Сопоставляя (29) и (24) видим, что $l_{\text{пр}} = a_1 + a_2$, что и требовалось доказать.

Экспериментальная часть

Экспериментальное определение ускорения свободного падения осуществляется с помощью универсального маятника FRM - 04, общий вид которого показан на рисунке 6. На вертикальной стойке основания 1 крепится кронштейн 2, который имеет возможность поворота вокруг стойки на 360° . С одной стороны кронштейна 2 подвешен математический маятник 3, а с другой - физический оборотный маятник 4. Физический оборотный маятник представляет собой стальной стержень 5 с двумя грузами 6, подвешенный на опорной призме 7. Стержень 5 имеет кольцевые проточки, нанесенные через 10 мм, которые служат для надежной фиксации грузов и опорных призм, а также для отсчета расстояния между ними.

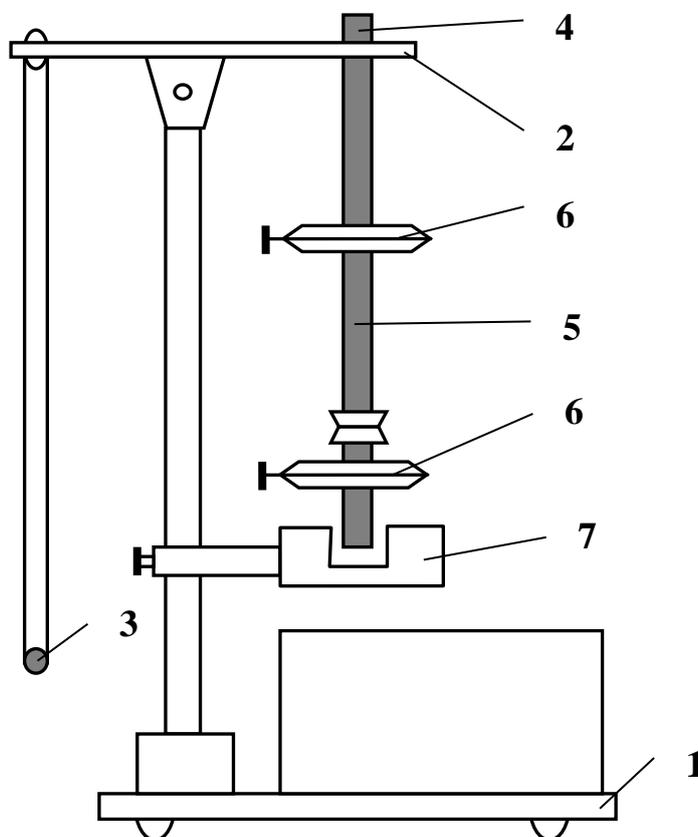


Рис. 6

Фотоэлектрический датчик 7, позволяет измерить время выбранного экспериментатором числа колебаний с точностью до 0.001 сек. С этой целью датчик устанавливается на такой высоте, чтобы колеблющийся маятник при своем движении перекрывал луч света датчика. При нажатии кнопки "Пуск" начинается отсчет времени. Чтобы датчик зафиксировал время, соответствующее 10 колебаниям, необходимо нажать кнопку "Стоп" когда на цифровом индикаторе числа периодов появится цифра "9".

Использование математического и физического маятников основано на том, что период их колебаний при малой их амплитуде (6° — 8°) зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения, поэтому можно с хорошей точностью находить значения ускорения свободного падения.

$$g = 4\pi^2 l / T^2 \text{ — для случая математического маятника} \quad (30)$$

$$g = 4\pi^2 l_{\text{пр}} / T_0^2 \text{ — для физического маятника,} \quad (31)$$

где $l_{\text{пр}}$ — приведенная длина физического маятника.

Измерение и обработка результатов.

Для расчета ускорения свободного падения по формуле (31) необходимо найти приведенную длину физического маятника и соответствующий этому период колебаний. Для определения этих величин исследуется зависимость периода колебаний маятника в прямом (условно) и перевернутом на 180 градусов положении маятника при изменении положения подвижного груза 1 (см. рис. 7)

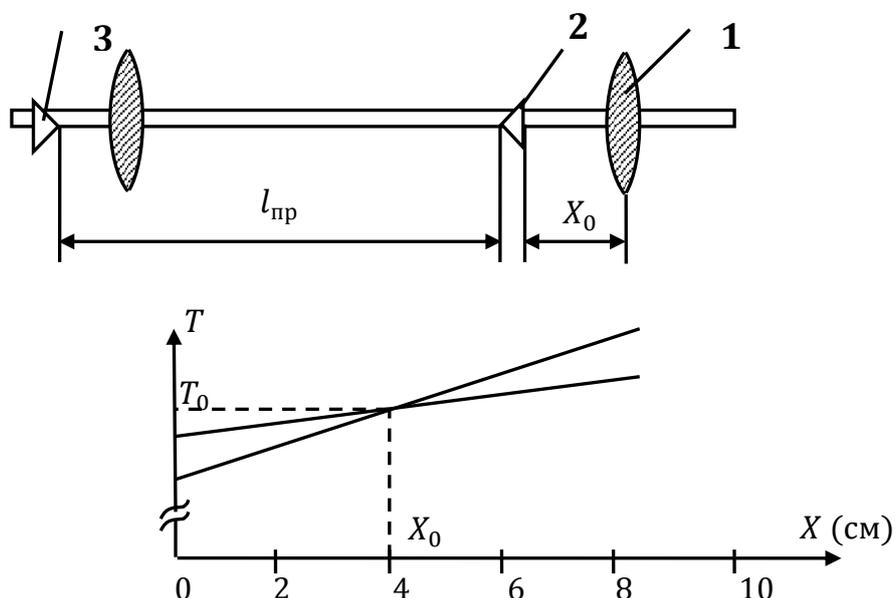


Рис. 7

В начальном положении подвижный груз 1 располагается у опорной призмы 2. Маятник устанавливается в рабочее положение на установке и отклоняется на небольшой угол (5° — 8°). Отсчет числа колебаний n и времени, за которое эти колебания совершаются t начинают, пропустив 8 — 10 начальных колебаний. По измеренным величинам рассчитывается период колебаний $T = t/n$. Затем маятник переворачивают на 180° и также измеряют период колебаний. После этого подвижный груз 1 устанавливается в новое положение и измерения повторяются. По полученным данным строится зависимость периода колебаний маятника в прямом и перевернутом положении от величины X . Находят точку пересечения двух линий на

графике и соответствующий этой точке период T_0 . По формуле (31) рассчитывают ускорение свободного падения.

После экспериментов с обратным маятником кронштейн 2 поворачивают и устанавливают в рабочее положение “математический маятник”. Измерив длину маятника l и период колебаний T , по формуле (30) рассчитывают ускорение свободного падения g .

Контрольные вопросы

1. Используя закон динамики вращательного движения получить уравнение гармонического осциллятора для физического маятника.
2. Получить формулу для периода колебаний математического маятника из формулы для периода колебаний физического маятника.
3. Как определяются направления векторов $(\vec{\varphi}, \vec{\dot{\varphi}}, \vec{\ddot{\varphi}}, \vec{M})$? Как они взаимосвязаны?
4. Что такое приведенная длина физического маятника?

Лабораторная работа № 8. Изучение затухающих колебаний

Теоретическая часть

В любой реальной колебательной системе всегда имеются силы трения, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Рассмотрим движение такой колебательной системы, которая была выведена внешними силами из состояния равновесия и предоставлена самой себе. Такие колебания называются свободными (или собственными). Ограничимся рассмотрением малых колебаний тела. Будем считать, что сила трения пропорциональна величине скорости $f_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x}$, где r - *коэффициент трения*. С учетом силы трения уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (1)$$

Используя обозначения $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и $2\beta = \frac{r}{m}$, перепишем его следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Если сила трения существенно меньше силы упругости, то колебания в такой системе можно описать функцией

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (3)$$

Затухающие колебания совершаются с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, отличающейся от частоты ω_0 , которую называют собственной частотой колебательной системы. График функции (3) дан на рисунке 1 **Ошибка!**
Источник ссылки не найден.

Движение такой колебательной системы можно условно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой a , зависящей от времени по закону:

$$a(t) = a_0 e^{-\beta t} \quad (4)$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = r/2m$, которую называют *коэффициентом затухания*. Величина $1/\beta = \tau$ называется временем релаксации и равна времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Количественно скорость затухания описывается отношением максимальных последовательных отклонений в одну и ту же сторону:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T} \quad (5)$$

Это отношение называют *декрементом затухания*, а его натуральный логарифм – *логарифмическим декрементом затухания*:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \quad (6)$$

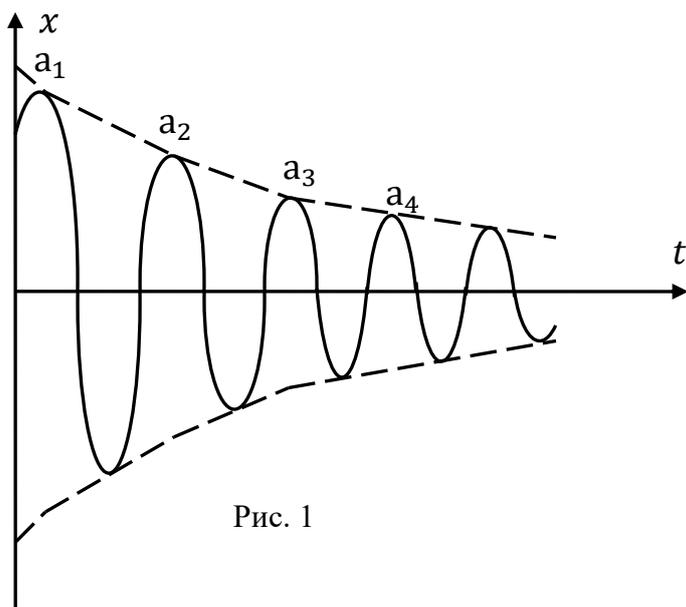


Рис. 1

Степень затухания колебаний можно описать также числом колебаний N_e , совершаемых системой за время τ , когда амплитуда уменьшается в e раз. Его можно найти как отношение τ/T . Для характеристики колебательной системы часто используется величина

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (7)$$

называемая *добротностью* колебательной системы. Здесь $W = k \cdot \frac{a^2(t)}{2} \sim a^2(t) = a_0^2 e^{-2\beta t}$ – энергия, запасённая в колебательной системе, $\Delta W = W_i - W_{i+1} \sim a_0^2 e^{-2\beta t} - a_0^2 e^{-2\beta(t+T)}$ – энергия, теряемая за один период.

Формулу (7) можно преобразовать к виду

$$Q = 2\pi \frac{a_0^2 e^{-2\beta t}}{a_0^2 e^{-2\beta t} - a_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}. \quad (8)$$

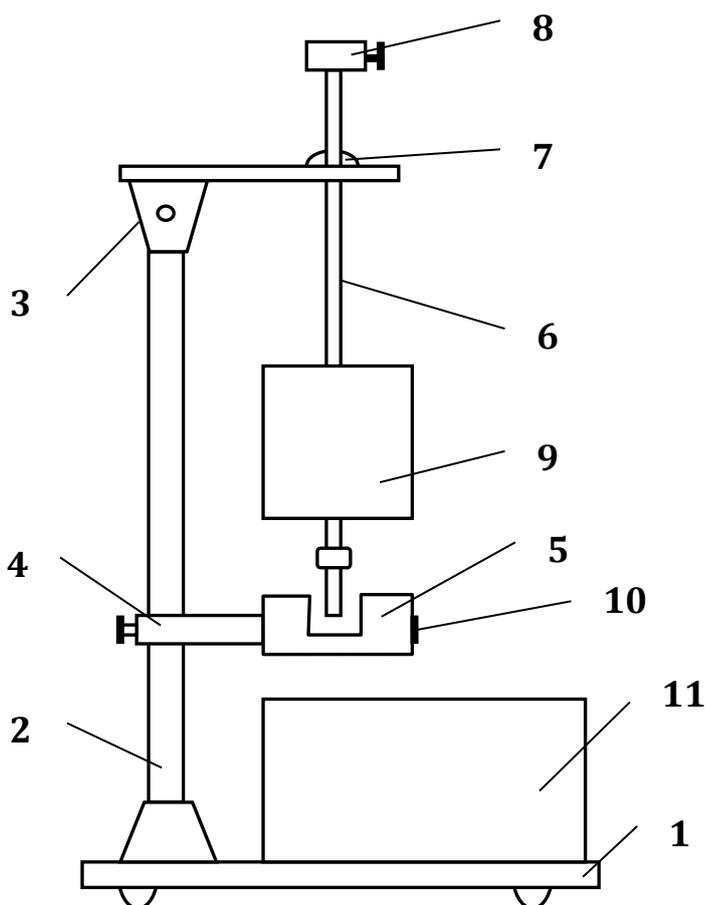
Разложим $e^{-2\beta T}$ при $\beta T \ll 1$ в виде $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T + \dots$

и подставив в (8), получим:

$$Q \approx 2\pi \frac{1}{1 - (1 - 2\beta T)} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (9)$$

Экспериментальная часть

Для исследования затухающих колебаний используется установка универсальный маятник FPM-04 с несколько измененной конструкцией физического маятника. Общий вид универсального маятника показан на рис. 2.



Основание 1 оснащено регулируемыми ножками, которые позволяют устанавливать основание в горизонтальном положении. В основании установки закреплена вертикальная стойка 2, на которой укреплены верхний кронштейн 3 и нижний кронштейн 4 с фотоэлектрическим датчиком 5.

Физический маятник выполнен в виде стального стержня 6, на котором укреплены опорная призма 7, дополнительный груз 8 и пластинка из дюралюминия

9 для увеличения сил сопротивления, т.е. для получения быстро затухающих колебаний. С помощью шкалы 10 можно определять смещения маятника последовательно через каждый период a_1 , a_2 , a_3 и т.д. и по ним рассчитать декремент, а за ним логарифмический декремент.

Сигнал с фотоэлектрического датчика 5 поступает на миллисекундомер 11, который позволяет измерять число колебаний n (число периодов) и полное время t . По этим данным можно рассчитать период колебаний ($T = t/n$).

Измерение и обработка результатов

Перед началом работы необходимо проверить: правильно ли установлена опорная призма на верхнем кронштейне, совпадает ли положение указателя смещений с нулевой отметкой шкалы. Затем маятник отклоняют до максимального положения по шкале 10 и отпускают. Маятник будет совершать затухающие колебания, в процессе которых максимальные значения последовательных отклонений в одну и ту же сторону обозначим a_1, a_2, a_3 . Их отношения равны декременту затухания:

$$K_1 = \frac{a_1}{a_2}; K_2 = \frac{a_2}{a_3}; K_3 = \frac{a_3}{a_4} \text{ и т. д.} \quad (10)$$

Так как a_1, a_2, a_2, a_3 мало отличаются друг от друга при высокой добротности системы, для повышения точности целесообразно измерять отношение $\tilde{K} = \frac{a_1}{a_{10}} = \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+10T)}} = e^{10\beta T}$, а затем вычислить декремент затухания по формуле

$$K = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} = \tilde{K}^{0.1}. \quad (11)$$

Далее рассчитывается логарифмический декремент затухания λ , и по формуле (9) рассчитывается Q .

Добротность колебательной системы можно также определить другим способом, измеряя N_e . Для этого необходимо включить миллисекундомер. Затем отклонить маятник до максимальной отметки по шкале 10 и отпустить его, нажав одновременно клавишу "Пуск". Необходимо измерить число колебаний N_e , после совершения которых смещение маятника относительно начала шкалы уменьшится в e раз (до специальной отметки на шкале 10) и остановить отсчёт времени. Зная число N_e , по формуле (9) рассчитать добротность Q , логарифмический декремент затухания λ и, затем, полученные значения сравнить с ранее вычисленными по декременту затухания K . Используя показания миллисекундомера, рассчитать период колебаний:

$$T = \frac{t_e}{N_e}.$$

Формулу (5) можно использовать для расчета коэффициента затухания β , фигурирующего в дифференциальном уравнении.

В качестве экспериментальных результатов работы приводятся значения следующих величин: декремента затухания K , периода колебаний T , коэффициента затухания β , а также сравниваются логарифмический декремент затухания λ и добротность Q , полученные двумя способами и с учетом погрешностей эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Вывести дифференциальное уравнение для затухающих колебаний.
2. Каково решение этого уравнения в аналитическом представлении и графическом виде?
3. Чем отличаются затухающие колебания от незатухающих гармонических колебаний?
4. Дать определение величинам, характеризующим затухающие колебания: декремент, логарифмический декремент, добротность.

Лабораторная работа № 9. Изучение вынужденных колебаний

Теоретическая часть

Одним из самых распространенных типов колебаний являются вынужденные колебания. Они наблюдаются как в механических колебательных системах, так и в электрических и находят широкое применение в технике. В некоторых случаях вынужденные колебания являются нежелательными и от них необходимо избавляться.

Вынужденными колебаниями называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием периодически изменяющейся силы $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

Рассмотрим движение грузика массы m на пружине с коэффициентом жесткости k . Уравнение движения можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где $-rv = -r\dot{x}$ сила вязкого трения. Это уравнение можно привести к виду:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{r}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Уравнение (2) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение. Известно, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

как известно, описывает затухающие колебания в системе и его решением является функция:

$$x' = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha'), \quad (4)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а a_0 и α' – некоторые произвольные постоянные, зависящие от начальных условий. Надо найти частное (т. е. не содержащее произвольных постоянных) решение неоднородного уравнения. Естественно предположить, что оно имеет вид

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi), \quad (5)$$

где a – амплитуда вынужденных колебаний, φ – сдвиг фаз между смещением грузика и вынуждающей силой. Дифференцируя функцию (5) один и два раза, получим соответственно:

$$2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a \sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \quad (6)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi) \quad (7)$$

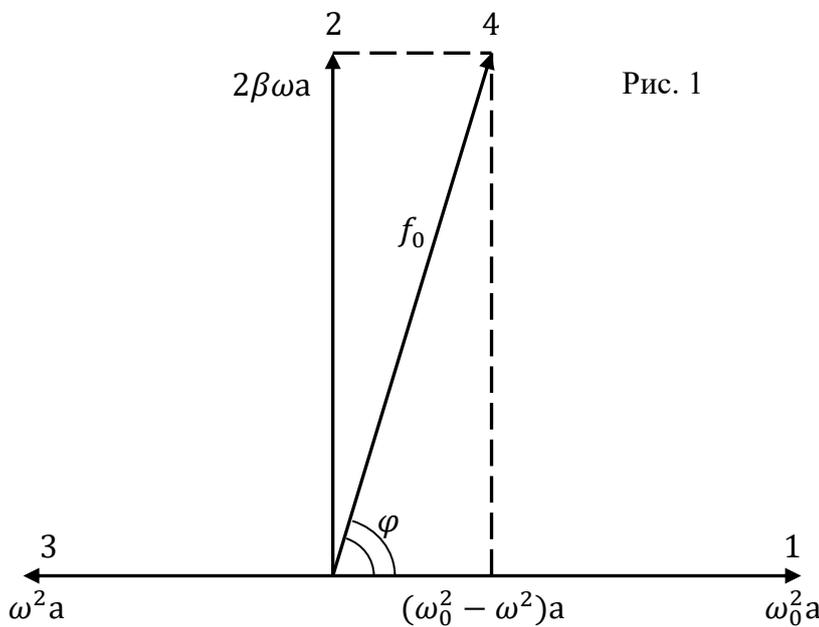
Третье слагаемое в левой части уравнения (2) имеет вид:

$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi) \quad (8)$$

Таким образом, $f_0 \cos \omega t$ является суммой трех колебаний той же частоты ω , описываемых уравнениями (6), (7) и (8), причем колебание (6) смещено по фазе относительно (8) на $\pi/2$, а колебание (7) на π .

Сложение трех гармонических функций (6), (7) и (8) можно выполнить *методом векторных диаграмм*. Согласно этому методу колебание изображается в виде *вращающегося вектора*, радиус которого равен амплитуде колебания, а угловая скорость — *циклической частоте*.

Поскольку частоты всех



трех колебаний одинаковы, во вращающейся системе отсчета эти колебания будут изображаться неподвижными векторами 1, 2, 3, которые соответствуют колебаниям (8), (6) и (7). В любой момент времени сумма векторов 1, 2, и 3 должна быть равна вектору 4. Из векторной диаграммы находим, что это возможно при условии:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2 \quad (9)$$

Отсюда можно найти амплитуду вынужденных колебаний

$$a = \mathcal{A}(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (10)$$

Из векторной диаграммы можно получить также соотношение

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10a)$$

Таким образом, соотношения (10) и (10a) полностью определяют частное решение (5) неоднородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (11)$$

Общее решение неоднородного уравнения (2) имеет вид

$$X = x' + x.$$

Собственные колебания в системе, описываемые слагаемым x' , затухают со временем по экспоненциальному закону, так что слагаемое x' играет заметную роль лишь в начальной стадии процесса. На рисунке 2 представлен вид функции $X(t)$.

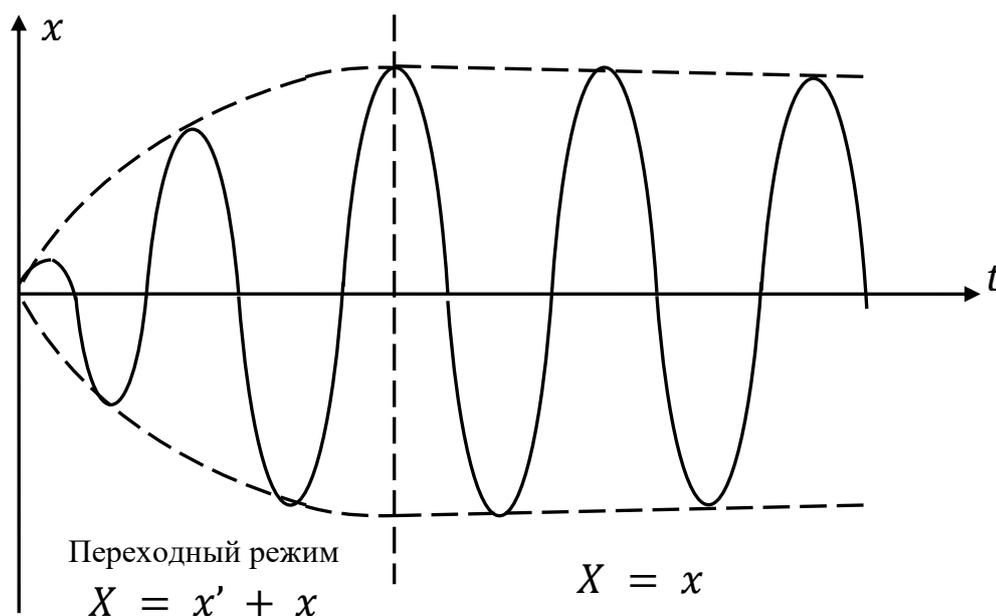


Рис. 2

Резонансные кривые

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Для определения резонансной частоты необходимо найти максимум функции

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (12)$$

т.е. минимум подкоренного выражения: $B(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$.
Продифференцируем $B(\omega)$ по ω и приравняем производную к нулю:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)^2\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет три решения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0; \\ \omega_{2,3} &= \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Первое решение соответствует максимуму знаменателя в формуле (13).
Из двух других решений физический смысл имеет только положительное решение. Таким образом,

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (15)$$

Зависимость (12) амплитуды вынужденных колебаний от частоты $\mathcal{A}(\omega)$ изображена на рисунке 3, ее обычно называют **амплитудной резонансной кривой**.

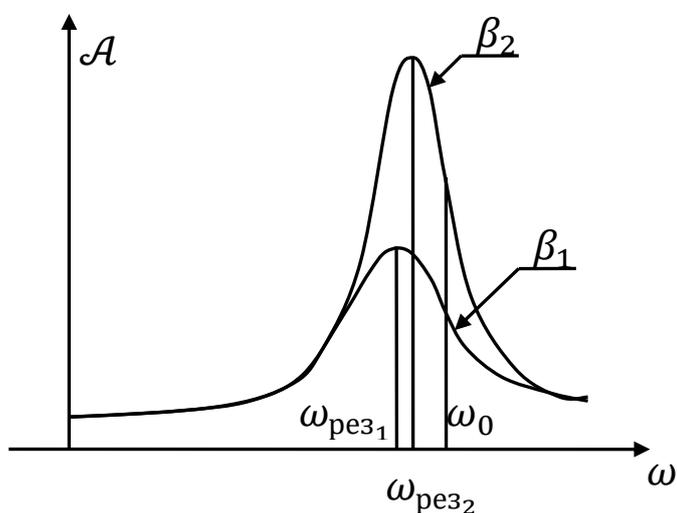


Рис. 3

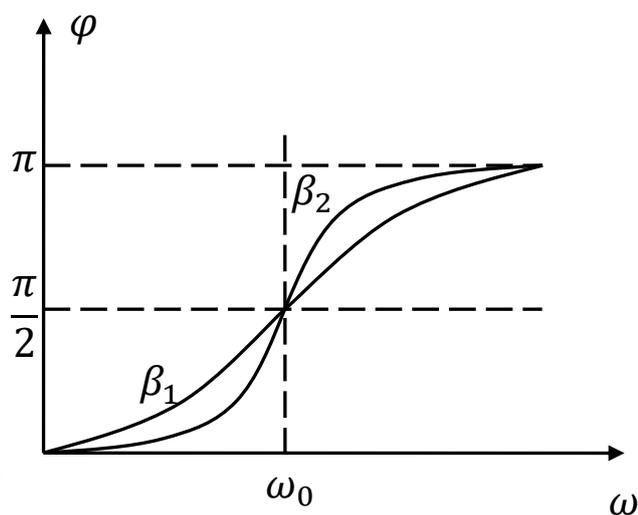


Рис. 4

При малом коэффициенте затухания β резонансная кривая имеет более острый максимум. При малом затухании ($\beta \ll \omega_0$) амплитуда при резонансе будет равна

$$\mathcal{A}_p = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \quad (16)$$

Разделим это выражение на смещение грузика постоянной силой, т.е. при $\omega = 0$ в формуле (10).

$$\frac{\mathcal{A}_p}{a_0} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \frac{\omega_0^2}{f_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q, \quad (17)$$

где $\beta T = \lambda$ — *логарифмический декремент затухания*. Таким образом, добротность колебательной системы Q можно определить как отношение амплитуды смещения при резонансе \mathcal{A}_p к амплитуде под действием постоянной силы a_0 .

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы на φ , причем это смещение зависит от частоты и определяется формулой (10а). График этого соотношения представлен на рисунке 4 и называется *фазовой резонансной кривой*.

Экспериментальная часть

Для изучения вынужденных колебаний используется установка FRM-13 из серии лабораторных установок по механике. Исследуемой колебательной системой является грузик на стержне, совершающий колебания в вертикальной плоскости. На стержень с грузиком действует периодически меняющаяся вынуждающая сила, которая создается устройством, содержащим электродвигатель, эксцентрик, стержень с крепежной скобой и пружинами. Вторые концы пружин прикреплены к стержню грузом. С помощью этих пружин и создается меняющаяся по гармоническому закону вынуждающая сила. Амплитуду вынуждающей силы можно изменять за счет изменения величины связи между приводным устройством и колебательной системой. Величина связи регулируется путем смещения места крепления пружин. Для определения амплитуды колебаний прибор снабжен шкалой в диапазоне от 0 до 30°. Измерительный блок позволяет измерять число колебаний n и время t , за которое эти колебания совершились. По этим данным рассчитывается период колебаний $T = t/n$ или частота $\nu = 1/T = n/t$.

В процессе выполнения работы необходимо построить резонансную кривую на основе измеренных амплитуд колебаний ϑ_i при соответствующей

частоте ν_i , т.е. по экспериментальным данным построить график функции $\vartheta(\nu)$.

Измерения проводятся следующим образом. Перед включением установки необходимо повернуть рукоятку "Частота колебаний" до упора против часовой стрелки. Это значит, что двигатель выключен. После включения установки необходимо включить электродвигатель и установить малую частоту колебаний, измерить период и рассчитать частоту. После того, как колебания стержня с грузом установятся, надо определить их амплитуду ϑ_i . Затем частоту увеличивают и снова повторяют измерения. Для построения резонансной кривой необходимо получить не менее 10 — 12 экспериментальных точек. Особенно тщательно проводятся измерения вблизи резонансной частоты.

По резонансной кривой необходимо определить добротность колебательной системы. Сделать это можно двумя способами. По первому способу измеряется амплитуда при резонансе и угловое смещение при $\nu \rightarrow 0$. В соответствии с формулой (17) отношение этих величин равно добротности колебательной системы.

Другим способом добротность определяется как отношение резонансной частоты $\nu_{\text{рез}}$ к ширине резонансной кривой $\Delta\nu$. Определение ширины резонансной кривой осуществляется следующим образом. Определяется максимальная амплитуда при резонансе ϑ_{max} . Проводится на графике горизонтальная линия на уровне $0.707\vartheta_{\text{max}}$ ($0.71\vartheta_{\text{max}}$). Определяются по графику ν_1 и ν_2 , соответствующие пересечению горизонтальной прямой с резонансной кривой. Ширина резонансной кривой $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$. По этим данным рассчитывается добротность

$$Q = \nu_{\text{рез}}/\Delta\nu.$$

Контрольные вопросы

1. Получить дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний.
2. С помощью векторной диаграммы вывести формулу для зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты.
3. Получить выражение для резонансной частоты.
4. Что такое переходный процесс?
5. Дать различные определения добротности колебательные системы.

Лабораторная работа № 10.

Изучение упругости твердого тела.

Определение модуля Юнга.

Теоретическая часть

Изменение формы или объема твердого тела под действием внешних сил называется **деформацией**. Упругой называется деформация, исчезающая с прекращением действия силы. Свойство материала восстанавливать свою форму и объем называется **упругостью**.

Деформация, остающаяся в теле после прекращения действия сил, называется остаточной, или пластической деформацией. Остаточная деформация характеризует свойство, называемое пластичностью. Упругость и пластичность присущи всем твердым телам.

Деформация, возникающая в телах в зависимости от действия силы, подразделяется на следующие виды: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб.

I. Растяжение.

Деформации растяжения подвергаются тела, к которым приложены две силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны, при этом увеличивается длина тела, не сохраняется сечение тела (рисунок 1). Деформацию растяжения испытывают тросы, канаты, цепи в подъемных транспортных устройствах и др.



Рис. 1

II. Сжатие.

Деформации сжатия подвергаются тела, к которым приложены силы, направленные по одной прямой навстречу друг другу, при этом происходит уменьшение длины тела и увеличение поперечного сечения (рисунок 2). Деформацию сжатия испытывают столбы, колонны, стены, фундаменты домов и др.

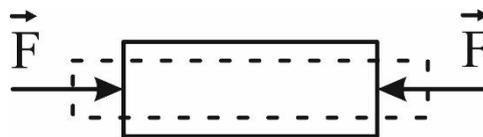


Рис. 2

III. Сдвиг.

Часто тела подвергаются боковому действию. При этом возникающие силы стремятся сместить одну его часть

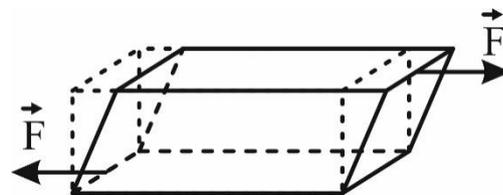


Рис. 3

относительно другой. Возникающая деформация в этом случае называют сдвигом (рисунок **Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Деформации сдвига подвергаются болты и заклепки, соединяющие отдельные конструкции при боковых нагрузках.

IV. Кручение.

Если один конец стержня закрепить, а к другому концу приложить пару сил, действующих в плоскости, перпендикулярно оси стержня, он деформируется. Этот вид деформации называется деформацией кручения.

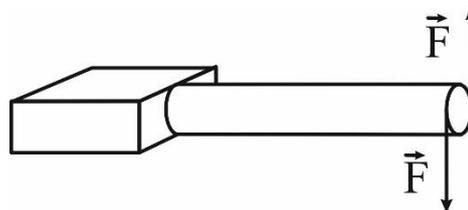


Рис.4

При деформации кручения отдельные слои тела остаются параллельными между собой, но повернутыми друг относительно друга (рисунок 4). Деформации кручения подвергаются валы машин, передающие вращающий момент, болты при завинчивании гаек.

V. Изгиб.

Детали, у которых один конец закреплен, а к другому приложена сила, изгибаются (рисунок 5). Прямолинейная ось детали превращается в криволинейную. Наибольший прогиб в направлении, перпендикулярном оси, называют стрелой прогиба. Деформации изгиба подвергаются

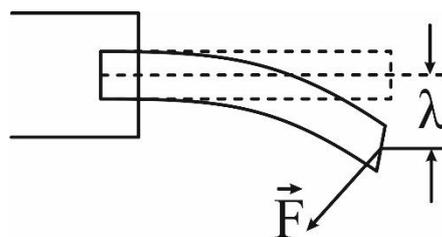


Рис.5

детали, подпертые с двух сторон и нагруженные между опорами (рисунок 6).

При деформации изгиба наружные слои вещества детали на вогнутой стороне подвергаются сжатию, а выпуклой — растяжению. Между ними лежит слой, который изменил только свою форму, но длина осталась без изменения. Этот слой называется нейтральным слоем.

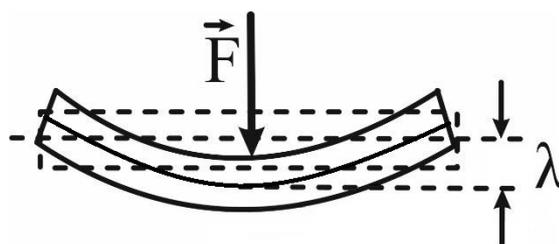


Рис.6

Вблизи от нейтрального слоя вещества почти не испытывают сжатия или растяжения. Поэтому сплошные детали, подвергающиеся изгибу, заменяют трубами, балки делают тавровыми (в виде Т) или двутавровыми (в виде Н). Это облегчает вес конструкции и экономит металл. По этому пути шло развитие в природе. Кости животных, стебли растений имеют трубчатое строение.

В случае, когда необходимо, чтобы тело сохраняло свою форму, используют упругую деформацию.

При изготовлении деталей ковкой, штамповкой, волочением, прокатом, используют пластическую деформацию.

Упругая деформация описывается законом, установленным Гуком. По закону Гука величина деформации пропорциональна действующей силе.

$$F = k \cdot |\Delta x|, \quad (1)$$

где k - коэффициент пропорциональности, постоянная величина для данного твердого тела.

Рассмотрим закон Гука применительно к деформации растяжения. Представим себе однородный стержень длиной L с площадью поперечного сечения S , один конец которого закреплен, а к другому приложена сила \vec{F} , (рисунок 7).

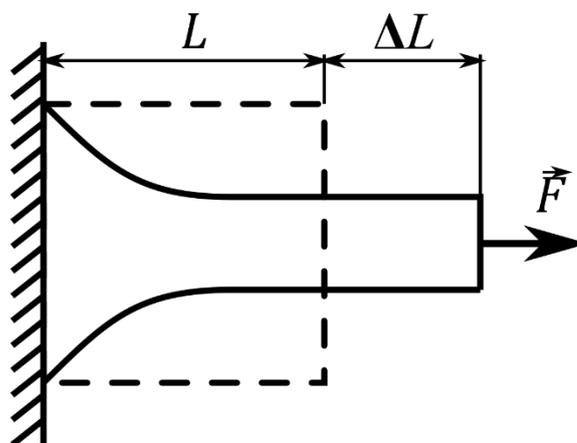


Рис.7

Под действием силы \vec{F} стержень испытывает упругую деформацию и увеличивает свою длину на некоторую величину ΔL . Величина ΔL называется абсолютным удлинением. Абсолютное удлинение пропорционально силе F , приложенной к стержню, длине стержня L и обратно пропорционально площади поперечного сечения S .

$$\Delta L = \alpha \cdot \frac{F \cdot L}{S}, \quad (2)$$

где α - коэффициент линейного растяжения или упругости. Это одна из формулировок закона Гука для деформации растяжения.

Обычно деформацию тел характеризуют не абсолютной деформацией ΔL , а относительным изменением длины или относительной деформацией $\Delta L/L$. Так как равные силы у стержней одной длины и одного материала, но разного сечения, вызывают неодинаковые деформации, то вводят величину, называемую напряжением: $P = F/S$ – т. е. силу, приходящуюся на единицу площади. Тогда формула (2) принимает вид:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot P. \quad (3)$$

Закон Гука для деформации растяжения можно сформулировать следующим образом: относительное удлинение в пределах упругости пропорционально напряжению. Чаще упругие свойства материала характеризуются величиной, обратной коэффициенту упругости:

$$E = 1/\alpha \quad (4)$$

которую называют модулем Юнга. Подставим в (3) вместо α модуль Юнга E , получаем

$$\Delta L/L = P/E. \quad (5)$$

Из формулы имеем:

$$E = \frac{P \cdot L}{\Delta L}. \quad (6)$$

Если бы стержень подвергался такой деформации, что его длина возросла бы в двое, т.е. $\Delta L = L$ и относительное удлинение стало бы $\Delta L/L = 1$, то получилось бы $E = P$, т. е. модуль Юнга есть величина, численно равная напряжению, при котором относительное удлинение стержня равно 1. Таков физический смысл модуля Юнга.

При упругой деформации изгиба величина деформации определяется стрелой прогиба λ , т. е. перемещением нейтрального слоя под действием сил. Стрела прогиба λ будет тем больше, чем больше нагрузка, кроме того, она зависит от формы, размера стержня и его упругих свойств. Для прямолинейного стержня, закрепленного на концах и нагруженного на середине, закон Гука имеет следующий вид:

$$\lambda = \frac{F \cdot L^3}{4 \cdot a \cdot b^3 \cdot E}, \quad (7)$$

где F - нагрузка, L - расстояние между опорами, a - ширина стержня, E - модуль Юнга, b - высота. Из формулы (7) определяем

$$E = \frac{F \cdot L^3}{4 \cdot a \cdot b^3 \cdot \lambda}. \quad (8)$$

Целью данной работы является определение величины модуля упругости из деформации изгиба прямоугольных стержней.

Экспериментальная часть. Описание метода измерений

Для определения упругости E используется прибор, изображенный на рисунке 8, где А-образные стойки 1 (связанные жестко тремя стержнями), 2 на верхних площадках стоек укреплен индикатор часового типа 3. На призмы помещен стержень 5, модуль Юнга которого подлежит измерению. На стержень навешивается стремя с призмой 4. Острие призмы размещается над шариком индикатора. После этого на стремя навешивают груз (вес грузов указан на них). Отсчитывают каждый раз, на сколько делений индикатора прогибается стержень. Для перевода показаний индикатора в миллиметры нужно число делений умножить на 0.01 мм, т. е. цена одного деления индикатора равна 0.01 мм. Перед началом измерения индикатор устанавливают на нуль поворотом шкалы за накатанный ободок.

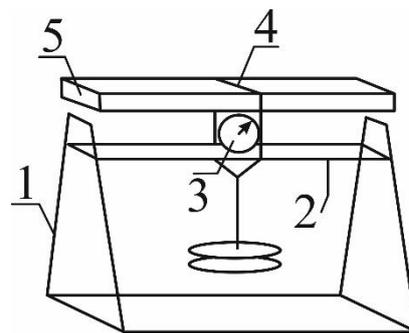


Рис.8

Порядок выполнения работы

1. Измерить расстояние между остриями призм n раз.
2. Измерить в различных точках по длине стержня его высоту b и ширину a , также n раз.
3. Результаты измерений записать в таблицу 1. Рассчитать средние значения L, b, a , а также среднеквадратичные ошибки.

Таблица 1

| № | длина $L_i, \text{ м}$ | $\Delta L =$ $ \bar{L} - L_i ,$ м | высота $b, \text{ м}$ | $\Delta b, \text{ м}$ | ширина $a, \text{ м}$ | $\Delta a, \text{ м}$ |
|-----------------------------|---------------------------|---|--------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| ... | | | | | | |
| n | | | | | | |
| Сред ние значе ния | $\bar{L} =$ | | $\bar{b} =$ | | $\bar{a} =$ | |

4. Установить стержень на опорные призмы и установить в нулевое положение шкалу индикатора деформации стержня.
5. Прикрепляя к стремени последовательно грузы 1 кг, 2 кг и т. д. снять зависимость деформации (стелы прогиба) от нагрузки. При каждой нагрузке измерения проводят несколько раз, прикрепляя груз к стремени и вновь снимая его, всякий раз записывая показания индикатора. Результаты измерения записать в таблицу 2.

Таблица 2

| № | 1 кг | 2 кг | 3 кг | 4 кг | 5 кг | 6 кг |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| ... | | | | | | |
| n | | | | | | |
| Средние значения | | | | | | |

6. По результатам измерений построить график зависимости λ от нагрузки F .
7. По графику определить отношение $\bar{\lambda}/F$ для точки на графике, отстоящей достаточно далеко от начала координат.
8. По формуле (8) рассчитать модуль Юнга материала, используя полученное значение $\bar{\lambda}/F$ и результаты измерения S, L, a, b . Все величины выразить в системе СИ.
9. Составить формулу для определения погрешности модуля Юнга и рассчитать ее.
10. Окончательный результат записать в виде: $E = \bar{E} \pm \Delta E$.

Контрольные вопросы

1. Что такое деформации?
2. Какие виды деформаций встречаются на практике?
3. Для каких деформаций применяется закон Гука?
4. От чего зависит модуль Юнга?
5. Как выполняется закон сохранения энергии для упругих и пластических деформаций?

Лабораторная работа № 11. Изучение упругости твёрдого тела. Определение модуля сдвига методом кручения

Теоретическая часть. Деформация сдвига

Рассмотрим куб из однородного и изотропного вещества, рисунок 1, а). Если нижнюю грань куба CDGH закрепить, а к верхней ABKE приложить равномерно распределенную по поверхности касательную силу \vec{F} , то верхняя грань сместится относительно нижней, т.е. куб деформируется. Для малых деформаций можно считать, что объем куба остался неизменным. Такого рода деформацию называют деформацией сдвига. Степень деформированности тела можно описать отношением AA'/AC , которое при малых деформациях

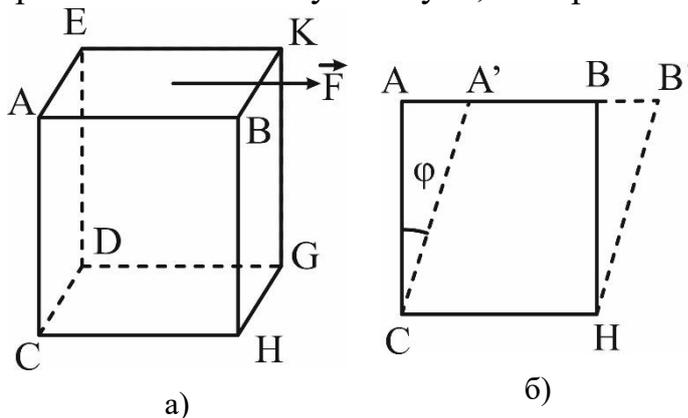


Рис. 1

численно равно углу φ , рисунок 0, б). Для малых деформаций закон Гука можно записать в виде:

$$\tau = G \cdot \varphi, \quad (1)$$

где τ - касательное напряжение, равное F/S ,

G - постоянная величина, называемая модулем сдвига.

Для упругих деформаций выполняется закон сохранения механической энергии, т.е. работа, затрачиваемая на деформирование упругого тела, пойдет на увеличение упругой энергии тела.

При смещении верхней грани ABKE (рисунок 10,б) совершается работа

$$A = \frac{1}{2} \tau S \Delta x, \quad (2)$$

где $S = l^2$ - площадь грани куба, Δx - смещение верхней грани, равное $l\varphi$. Таким образом, работа, затрачиваемая на деформирование тела, равна $(1/2) \tau S l \varphi = (1/2) \tau V \varphi$, где V - объем куба. Отсюда объемная плотность упругой энергии с учетом (1) определяется соотношениями

$$w = \frac{1}{2} \tau \varphi = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} G \varphi^2. \quad (3)$$

Кручение

В предыдущем случае была рассмотрена такая деформация тела, при которой все его бесконечно малые элементы деформированы одинаковым образом, т.е. однородная деформация. Кручение, представляет собой неоднородную деформацию.

Возьмем однородный стержень длиной l и радиуса r с закрепленным одним концом. К другому концу приложим силы, создавшие момент M относительно оси стержня, Л/Р 10, рисунок 4. Закон Гука для деформации стержня запишется в виде

$$M = k \cdot \alpha, \quad (4)$$

где k - модуль кручения стержня, зависящий не только от материала стержня, но и его геометрических размеров, α - угол, на который поворачивается незакрепленный конец стержня, относительно закрепленного. Модуль кручения k связан с модулем сдвига G соотношением:

$$k = \frac{\pi r^4}{2l} \cdot G. \quad (5)$$

Из формулы (4), учитывая (5), можно получить формулу для определения модуля сдвига

$$G = \frac{2Ml}{\pi r^4 \alpha}. \quad (6)$$

Таким образом, для экспериментального определения модуля сдвига вещества, из которого изготовлен стержень, необходимо закрепить один его конец, а к другому приложить силы, создающие момент M . Измерив предварительно длину стержня и его радиус, а также угол закручивания незакрепленного конца стержня относительно закрепленного, по формуле (6) можно рассчитать модуль сдвига G .

Экспериментальная часть.

Описание прибора

Схема прибора для определения модуля сдвига показана на рисунке 2. Один конец исследуемого стержня 1 жестко закреплен посредством винтов 3 в неподвижной муфте 2. Второй конец стержня винтами 3 жестко прикреплен

к валу 4, который может свободно вращаться относительно жестко закрепленного диска 5 с измерительной шкалой для отсчета угла закручивания стержня. На валу 4 жестко закреплен диск 6, к которому с помощью винта крепится одним концом нить 7, к другому прикреплена платформа, на которой устанавливается масса m . Момент сил, действующих на стержень, определяется по формуле:

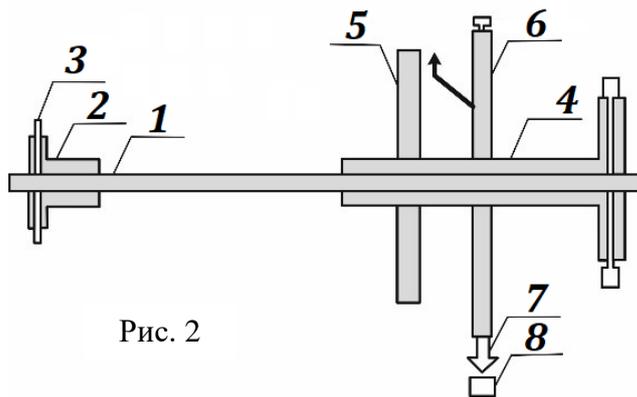


Рис. 2

$$M = mgR,$$

где R - радиус диска, к которому прикреплена нить.

Измерения и обработка результатов

1. Измерить рабочую длину стержня l .
2. Микрометром измерить диаметр стержня не менее 10 раз (в разных местах).
3. Установить груз m на платформе, измерить угол закручивания стержня φ . Для каждой массы измерения проводить не менее 5 раз
4. Измерения угла закручивания стержня провести для 9 наборов грузов массами от 0,025 кг до 0,225 кг, и построить график зависимости угла закручивания φ от момента сил M .
5. Из полученного графика на его линейном участке выбрать значение момента сил M и соответствующий этому значению угол φ (выбор производить так, чтобы значение момента сил M было не слишком маленьким). Для данных значений момента сил и угла рассчитать модуль сдвига G . Определить абсолютную и относительную погрешность измерения.

Контрольные вопросы

1. Что такое упругие и пластические деформации?
2. Выполняется ли закон сохранения механической энергии при деформациях?
3. Какова плотность энергии упругой деформации?
4. Какова связь между модулем кручения k и модулем сдвига?

Лабораторная работа № 12. Определение скорости звука в воздухе

Теоретическая часть.

Уравнение плоской волны.

Одним из распространённых типов движения является волновое движение. Если в каком-либо месте упругой среды (жидкой, твёрдой или газообразной) возбудить колебания её частиц, то за счёт взаимодействия между ними эти колебания будут передаваться от частицы к частице с определённой скоростью v . *Процесс распространения колебаний в неограниченной среде называют бегущей волной.*

Частицы среды, в которой распространяется упругая волна, совершают колебания около положения равновесия. Если колебания частиц происходят вдоль направления распространения, такие волны называют *продольными*, если перпендикулярно — *поперечными*. *Продольные волны могут распространяться в газах, жидкостях и твёрдых телах.* Механические поперечные волны могут распространяться только в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Таким образом, *поперечные волны могут распространяться только в твёрдых телах.*

Пусть в безграничной среде вдоль направления X распространяются упругие волны. Для описания волнового, как и колебательного, движения, необходимо использовать смещение частиц среды ξ относительно их положения равновесия. На рисунке 0 изображено смещение частиц среды относительно положения равновесия как функция координаты X .

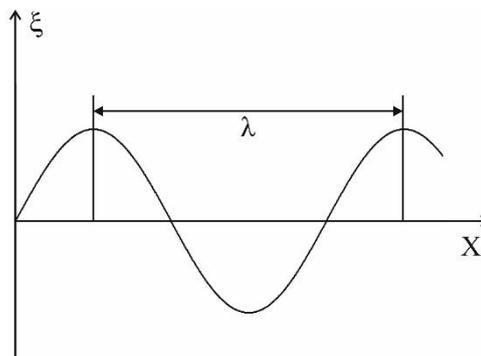


Рис. 1

В случае волнового движения можно определить характерное расстояние для данного вида движения, как *кратчайшее расстояние между частицами среды, совершающими колебания в одинаковой фазе.* Это — длина волны λ (рисунок 1). С другой стороны, длина волны — это расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц:

$$\lambda = v \cdot T. \quad (1)$$

Период колебаний частиц связан с частотой ν известным соотношением $T = 1/\nu$. Тогда

$$v = \lambda \cdot \nu. \quad (2)$$

Мы рассматриваем распространение колебаний в безграничной среде, поэтому в общем случае смещения частиц относительно положения равновесия будут зависеть от времени и координат:

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

Функция $\xi = \xi(x, y, z, t)$ должна быть периодической относительно времени t , так как она должна описывать колебания любой частицы среды, имеющей координаты положения равновесия x, y, z . В тоже время она должна быть периодической функцией координат, так как частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии λ вдоль направления распространения, совершают колебания одинаковым образом.

Если для какого-то конкретного случая можно выбрать систему координат, в которой смещения частиц среды ξ в волне зависят от одной лишь координаты, такие волны называют *плоскими*. Для них $\xi = \xi(x, t)$, если ось X совместить с направлением распространения волны.

Геометрическое место точек, совершающих колебания в одинаковой фазе, называют волновой поверхностью.

Геометрическое место точек, до которых дошли колебания в момент времени t , называют фронтом волны. Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлечённую в волновой процесс, от области, в которой колебания ещё не возникли. В случае плоской волны волновые поверхности и фронт волны являются *плоскими поверхностями*.

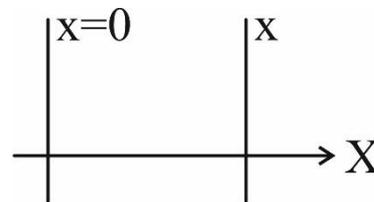


Рис. 2

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X (рисунок 2). Пусть в плоскости $x = 0$ частицы среды совершают колебания по гармоническому закону

$$\xi(0, t) = a \cdot \cos(\omega t), \quad (3)$$

где $\xi(0, t)$ смещение частицы от положения равновесия в момент t , a - амплитуда колебаний. Вследствие взаимодействия между частицами колебания будут передаваться другим частицам среды и дойдут до плоскости x через время τ :

$$\tau = \frac{x}{v}, \quad (4)$$

где v - скорость распространения волны. Тогда колебания частиц в плоскости x будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$:

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos(\omega(t - \tau)) = a \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \quad (5)$$

Итак, уравнение бегущей плоской волны можно записать в виде:

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \quad (6)$$

Оно описывает смещение любой частицы среды от положения равновесия, имеющей координату положения равновесия x , в любой момент времени t . Этому уравнению можно придать иную форму, если использовать так называемое волновое число k :

$$k = 2\pi/\lambda. \quad (7)$$

Из формул (1) и (7) следует связь между циклической частотой $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, скоростью v и волновым числом k :

$$k = \omega/v. \quad (8)$$

С учетом этого выражения уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x , можно записать в виде:

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos(\omega t - kx). \quad (9)$$

Скорости волнового движения

Необходимо четко усвоить следующее: *отдельные частицы, составляющие среду, не распространяются вместе с волнами через среду. Они гармонически колеблются в поперечном или продольном направлении относительно своих положений равновесия. Мы наблюдаем как волны их фазовые отношения, а не распространение частиц в среде.*

При волновом движении следует различать три скорости, которые представляют собой существенно различные величины.

1. Скорость движения частиц. Она выражается через смещение частиц обычным образом, как частная производная от смещения по времени

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (10)$$

2. Фазовая скорость. Это скорость, с которой перемещаются в среде поверхности одинаковой фазы. Зафиксируем какое-либо значение фазы в уравнении бегущей волны (6), полагая

$$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \text{const} . \quad (11)$$

Это выражение дает связь между временем t и местом (координатой) x , в котором зафиксированное значение фазы реализуется в данный момент.

Используя выражение (11) можно найти производную dx/dt , представляющую собой *скорость, с которой перемещается в среде фиксированное значение фазы.*

Продифференцируем выражение (11):

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0, \quad (11)$$

Откуда

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (12)$$

Таким образом, скорость распространения волны в среде v , которую мы ввели в соотношениях (4) и (5), есть *скорость перемещения фиксированного значения фазы, т.е. фазовая скорость.*

3. Групповая скорость. Понятие "групповая скорость" является несколько более сложным, чем фазовая скорость. Оно будет подробнее рассматриваться в последующих курсах общей физики. Представление о групповой скорости возникает при изучении распространения волнового пакета или цуга волн в среде (рисунок 3).

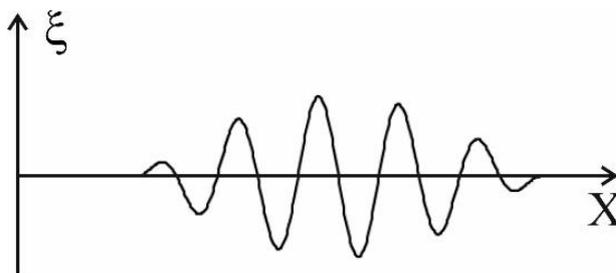


Рис. 3

Такой волновой пакет или цуг волн можно представить как результат суперпозиции волн различной амплитуды и частоты. Если среда обладает дисперсией, т.е. скорость распространения является функцией частоты, такой волновой пакет будет "расплываться" в пространстве. Понятие "фазовая скорость" для пакета неприменимо. В этом случае удобно пользоваться

понятием "групповая скорость". Это скорость перемещения огибающей в пространстве, или скорость переноса энергии.

Волновое уравнение

Также, как уравнение гармонических колебаний является решением дифференциального уравнения, называемого уравнением гармонического осциллятора, уравнение плоской волны является решением

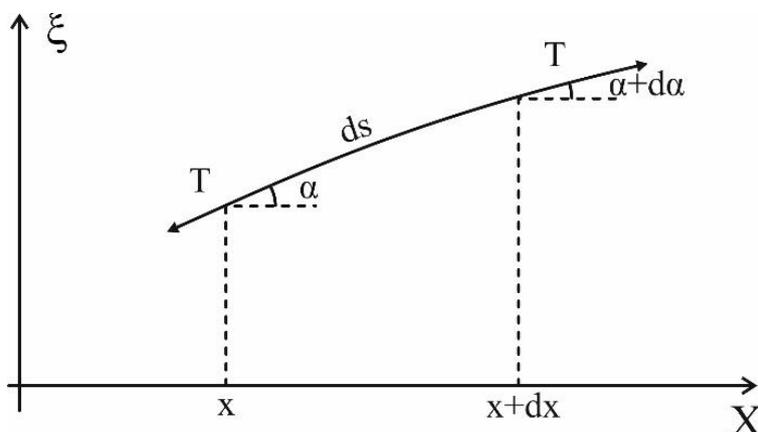


Рис. 4

дифференциального уравнения второго порядка - волнового уравнения.

Выведем волновое уравнение для частного случая распространения поперечных волн на бесконечной тонкой струне. Пусть ось x ориентирована вдоль струны, находящейся в состоянии равновесия. Функцией $\xi(x, t)$ обозначим смещение частиц струны при распространении по ней поперечной волны. Полагаем, что вдоль струны существует постоянное натяжение T . Масса однородной струны, приходящаяся на единицу длины, называется её линейной плотностью ρ . На искривленный элемент струны ds (рисунок 4) с одного конца действует натяжение T под углом α к оси X , а с другого – натяжение T под углом $\alpha + d\alpha$. Длина искривленного участка ds равна¹:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2}. \quad (13)$$

Но для малых колебаний можно считать, что $\partial \xi / \partial x$ мала и её квадратом можно пренебречь, и тогда $ds = dx$. Следовательно, масса элемента струны равна

$$dm = \rho ds = \rho dx. \quad (14)$$

Перпендикулярная оси x сила, действующая на элемент ds , равна

¹ Смотри, к примеру, Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 648 с. — Глава 11 Геометрические и физические приложения определенного интеграла, § 1. Длина дуги кривой.

$$T \sin(\alpha + d\alpha) - T \sin \alpha$$

Мы рассматриваем малые колебания, поэтому угол α мал и $\sin \alpha = \operatorname{tg}(\alpha) = \partial \xi / \partial x$. Тогда сила равна

$$T \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right]. \quad (15)$$

Разность в квадратных скобках можно представить как произведение элемента расстояния dx на производную от функции $\partial \xi / \partial x$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx. \quad (16)$$

Таким образом, сила, действующая на элемент струны со стороны соседних элементов, выражается соотношением

$$F = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx. \quad (17)$$

Напишем второй закон Ньютона для этого элемента:

$$\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx. \quad (18)$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Отношение T/ρ имеет размерность квадрата скорости. Поэтому уравнение (19) можно переписать так:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (20)$$

Это соотношение называют **волновым уравнением**. Скорость распространения упругих волн на струне определяется ее линейной плотностью ρ и натяжением T :

$$v = \sqrt{T/\rho}. \quad (21)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что уравнение плоской волны в форме (6) или (9), является *решением волнового уравнения*.

Рассматривая движение малого объёма жидкости или газа при распространении в них упругих продольных волн, можно показать, что смещение выделенного элемента относительно положения равновесия также

подчиняется волновому уравнению. Скорость звуковых волн в газах определяется следующим выражением

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \quad (22)$$

где P и ρ - давление и плотность невозмущенного волной газа, $\gamma = C_P/C_V$ - отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Стоячие волны

В предыдущих параграфах мы рассматривали волны, распространяющиеся в безграничной среде. В ограниченном пространстве при возбуждении колебаний частиц среды возникает сложный волновой процесс за счет наложения первичной падающей волны и волн, отраженных от границ среды, а также от неоднородностей в самой среде.

Рассмотрим простейший случай наложения двух плоских волн одинаковой амплитуды, распространяющихся навстречу друг другу. Возникающий в результате волновой процесс называют *стоячей волной*. Практически стоячие волны можно получить при отражении плоской волны от плоского препятствия. Плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси X , описывается уравнением

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx).$$

Плоская волна, распространяющаяся в отрицательном направлении уравнением

$$\xi_2 = a \cos(\omega t + kx).$$

Складывая почленно оба уравнения и преобразовывая результат по формуле для суммы косинусов, получим

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (23)$$

Используя определение волнового числа, формуле (23) можно придать следующий вид:

$$\xi = \left[2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right] \cos(\omega t), \quad (24)$$

где $A = \left[2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right]$ - амплитуда колебаний, зависящая от координаты x .

Уравнение (24) является *уравнением стоячей волны*. Из него следует, что колебания любой частицы среды в стоячей волне совершаются с той же частотой, что и в исходных плоских волнах. Однако амплитуда колебаний различных частиц неодинакова, она зависит от координаты x . Амплитудой можно назвать модуль выражения перед $\cos(\omega t)$ в формуле (24). В точках, где

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \pi n, \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (25)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения $2a$. Эти точки называют *пучностями стоячей волны*. Из соотношения (25) можно получить координаты пучностей:

$$(X_n)_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2}, \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (26)$$

В точках, где

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (27)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называют *узлами стоячей волны*. Частицы среды, находящиеся в узловых точках, не совершают колебаний. Координаты узловых точек определяются соотношением

$$(X_n)_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (28)$$

Из формул (26) и (28) следует, что *расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно $\lambda/2$* .

Выражение $2a \cos(2\pi (x/\lambda))$ в формуле (24) при переходе через нулевое значение меняет знак. Это означает, что фаза колебаний частиц среды, разделённых узловой плоскостью, отличается на π . Все частицы среды, находящиеся между соседними узловыми плоскостями, совершают колебания в одинаковую фазу, но с различными амплитудами. Рисунок 6 поясняет эти выводы.

Первый график изображает распределение смещений в момент времени t , когда они максимальны. Второй - через четверть периода. Стрелками показаны направление и величина скоростей частиц среды, проходящих в этот момент времени положение равновесия. Третий график показывает распределение смещений через полпериода. Если стоячие волны возбуждены

на струне с закрепленными концами, то в местах закрепления должны находиться узловые точки.

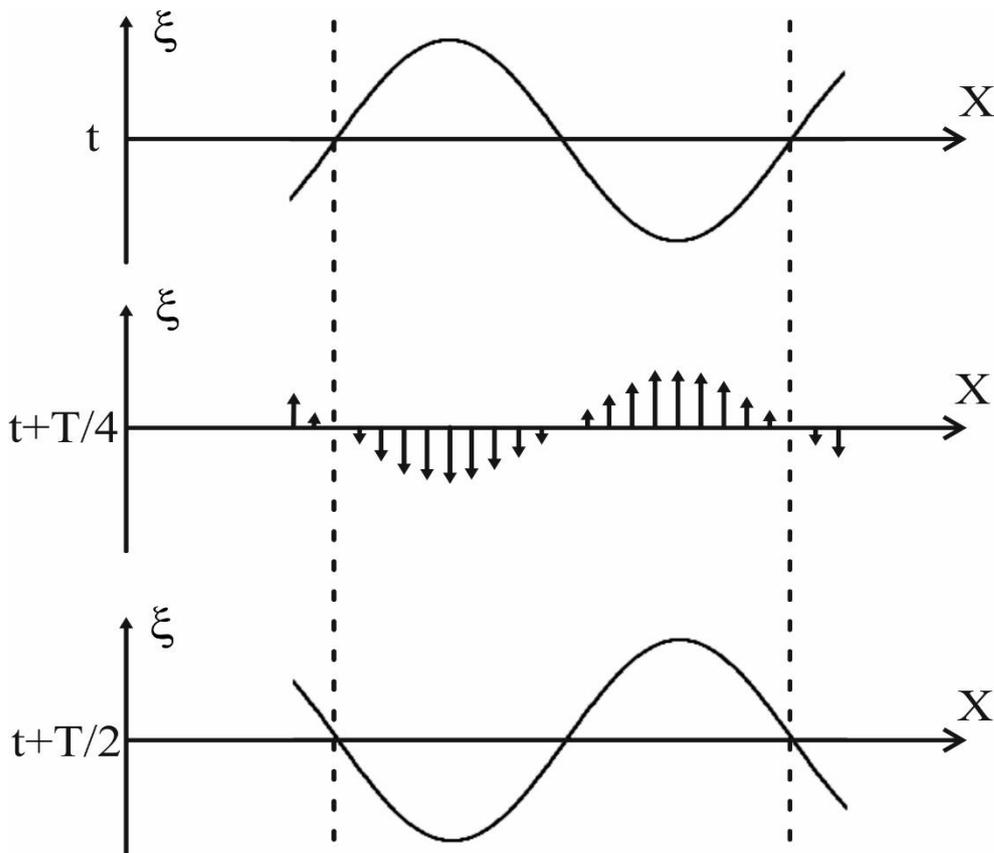


Рис. 5

Поэтому на струне, при фиксированном натяжении, возбуждаются колебания такой частоты, которая находится из условия: на длине струны l укладывается целое число полуволен:

$$l = n \frac{\lambda}{2} \text{ или } \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \quad (29)$$

Длинам волн λ_n соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n, \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (30)$$

где v - определяется по формуле (21) и постоянна при фиксированном натяжении струны. Частоты ν_n называют собственными частотами колебаний струны.

*Аналогичная ситуация возникает при возбуждении стоячих звуковых волн в воздухе в отрезке трубы, закрытом с торцов жёсткими крышками. Однако необходимо помнить, что стоячие волны на струне образованы бегущими навстречу друг другу **поперечными** волнами, а стоячие волны в воздухе в отрезке трубы - бегущими навстречу друг другу **продольными** волнами.*

Экспериментальная часть.**Описание установки**

Схема установки для определения скорости звука в воздухе представлена на рисунке 6.

В длинной трубе Кундта 1 размещается неподвижный источник звука 2 и подвижный приёмник 3. В отрезке трубы между ними с помощью генератора 6 возбуждаются стоячие волны. Частота определяется по шкале генератора и/или с помощью частотомера. Сигнал от приемника подается на милливольтметр 7. При перемещении приемника 3 с помощью трубки 4, сигнал на милливольтметре

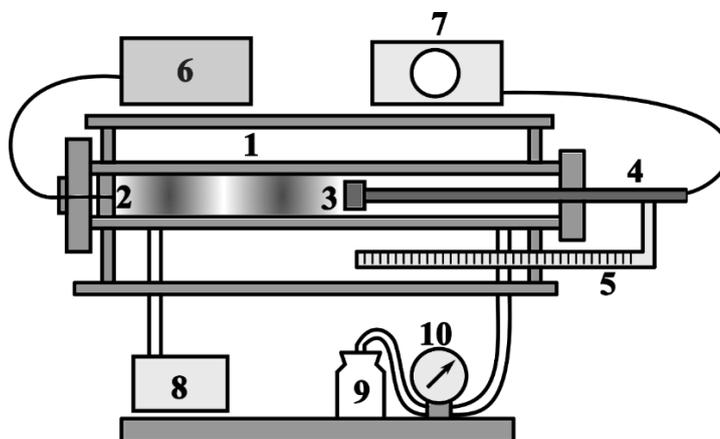


Рис 6. Схема экспериментальной установки для измерения скорости звука в газах
1 – труба Кундта; 2 -излучатель; 3 - приемник; 4 - подвижная металлическая трубка; 5 -измерительная линейка; 6 - звуковой генератор; 7- милливольтметр; 8 - насос; 9 - сосуд с парами исследуемой жидкости; 10-вакуумметр.

периодически меняется, принимая поочередно минимальные и максимальные значения. Положение приёмника фиксируется по линейке 5. Положения приемника в трубе, при которых наблюдаются два ближайших максимума, отличаются на половину длины волны $\lambda/2$. Таким образом, определение длины волны при выбранной частоте производится в следующем порядке: устанавливают приёмник в трубе в такое положение, чтобы на милливольтметре наблюдался максимум, замечают это положение на линейке 5. Затем смещают приемник в ту или другую сторону до тех пор, пока на милливольтметре снова не будет наблюдаться максимум. По шкале, расположенной на линейке, определяют величину смещения приемника, равную $\lambda/2$.

Измерения

1. Установить на шкале генератора частоту 1000 Гц.
2. Включить генератор и милливольтметр.
3. Плавно перемещая приемник в трубе, найти такое его положение, при котором на милливольтметре наблюдается максимум сигнала.

4. Перемещая далее приемник, найти положение следующего максимума. Определить расстояние между этими положениями. Это и будет $\lambda/2$.
5. Провести измерения $\lambda/2$ не менее 5 раз.
6. По известной частоте и длине волны рассчитать скорость звука.
7. Такие же измерения провести на частотах 1500 и 2000 Гц.

Контрольные вопросы

1. Что называют упругими волнами? Какие можно выделить разновидности упругих волн в зависимости от ориентации возмущений относительно направления распространения волн?
2. Какие упругих волны могут распространяться в газах? В жидкостях? В твёрдых телах?
3. Дайте определение длины волны, волновой поверхности, фронта волны. Какую форму могут иметь волновые поверхности упругих волн (приведите примеры) ?
4. Что означают понятия скорость движения частиц, фазовая скорость, групповая скорость? Чему равна фазовая скорость для упругих колебаний струны, для акустических колебаний?
5. Запишите решение волнового уравнения для упругих колебаний струны (уравнение плоской бегущей волны). Докажите математической проверкой, что записанное вами выражение действительно является решением.
6. Что называют стоячими волнами? Выведите уравнение стоячей волны.
7. Что называется узлами стоячей волны и пучностями стоячей волны? Приведите примеры, поясняя рисунками.
8. Как соотносятся упругие колебания струны и акустические колебания в воздухе? Что в них общего, в чём есть различия?

Лабораторная работа № 13. Изучение динамики вращательного движения

Теоретическая часть

Основной закон динамики вращательного движения есть не что иное, как второй закон Ньютона, примененный к вращательному движению. Умножив уравнение

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

векторно слева на радиус-вектор частицы \vec{r} , получим:

$$\left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r}\vec{F}], \quad (2)$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс частицы. Правая часть этого соотношения является моментом силы $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$. Это вектор, модуль которого определяется выражением

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \varphi,$$

где φ - угол между векторами \vec{r} и \vec{F} . Левую часть уравнения (2) можно преобразовать с помощью очевидного соотношения

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}\vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, поскольку векторы $d\vec{r}/dt$ и \vec{p} коллинеарны. Таким образом, уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}\vec{p}] = \vec{M}. \quad (3)$$

Векторное произведение $[\vec{r}\vec{p}]$ называется моментом импульса \vec{L} . Его модуль равен $|\vec{r}| |\vec{p}| \sin \alpha_{rp}$, где α_{rp} - угол между \vec{r} и \vec{p} . С учетом этих обозначений закон динамики вращательного движения приобретает более общую форму:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4)$$

При вращении тела относительно фиксированной оси можно получить различные выражения для момента импульса:

$$L = \sum_{i=1}^N r_i \Delta m_i v_i = \sum_{i=1}^N r_i \Delta m_i r_i \omega = \omega \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \omega J, \quad (5)$$

где $J = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2$ - момент инерции тела относительно фиксированной оси. В этом случае закон динамики вращательного движения можно представить в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M, \quad (6)$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ - угловое ускорение.

Сравнительно просто находятся моменты инерции однородных тел простой формы. Моменты инерции однородного диска или сплошного цилиндра относительно оси, совпадающей с их геометрической осью, равны $J = (1/2)mR^2$, где m - масса всего тела, R - его радиус. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс, равен $J = (2/5)mR^2$ (см. Приложение 1). При нахождении момента инерции в более сложных случаях помогает теорема Штейнера, согласно которой момент инерции относительно произвольной оси II J равен сумме момента инерции этого тела J_0 относительно оси I, параллельной оси II и проходящей через центр масс тела, и произведения массы всего тела на квадрат расстояния между осями (рисунок 1):

$$J = J_0 + ma^2. \quad (7)$$

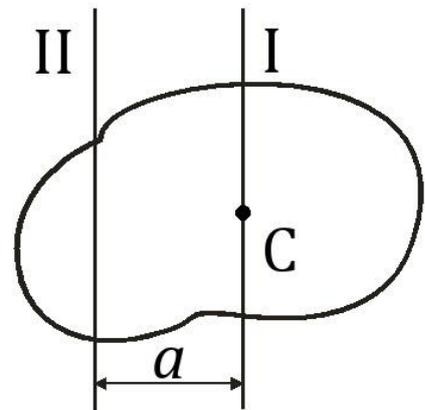


Рис. 1. Пояснение к теореме Штейнера. Точка С – центр масс тела.

Экспериментальная часть.

Описание установки и методика измерений.

Установка для изучения динамики вращательного движения схематически представлена на рисунке 2. Она представляет собой установленные на горизонтальной платформе 1 направляющие наклонные пластины 2, составляющие угол α с горизонтом. В верхней и нижней частях наклонных пластин закреплены небольшие опорные цилиндры 3.

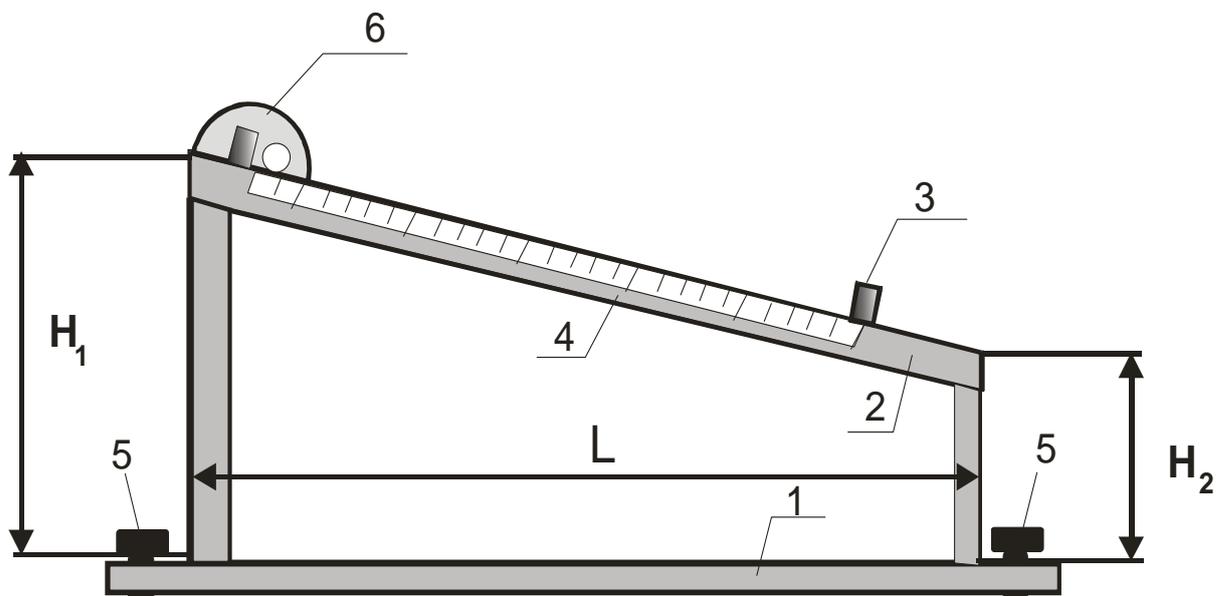


Рис. 2. Схема экспериментальной установки.

Пройденное центром масс тела расстояние l при качении по направляющим измеряется с помощью металлической линейки 4. Платформа 1 устанавливается в горизонтальное положение с помощью регулировочных винтов 5 и уровня. Тангенс угла наклона направляющих рассчитывается по измеренным высотам H_1 , H_2 и длине основания L .

Осесимметричное тело 6, движение которого изучается, устанавливается в исходное положение у верхних опорных цилиндров, затем отпускается. Время его движения t измеряется с помощью секундомера.

В данной лабораторной работе изучается движение двух тел по наклонным направляющим. Одно тело представляет собой сплошной однородный диск из винипласта. Конструкция второго тела изображена на рисунке 3. На валу 1 закреплены четыре стержня 2 с резьбой, по которым могут перемещаться четыре массивных груза 3. Концы стержней закреплены в кольцевой обойме 4. Для удобства диаметры концов вала, опирающиеся на направляющие пластины, имеют одно и то же значение.

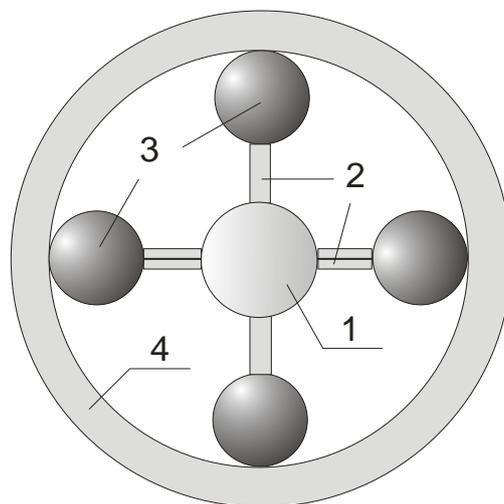


Рис. 3. Конструкция второго тела.

Рассмотрим движение тела по наклонным направляющим. Силы, действующие на вал колеса, изображены на рисунке 4. Движение тела по наклонным направляющим можно представить как поступательное движение центра масс системы и вращение относительно оси, проходящей через центр масс. Система уравнений имеет вид:

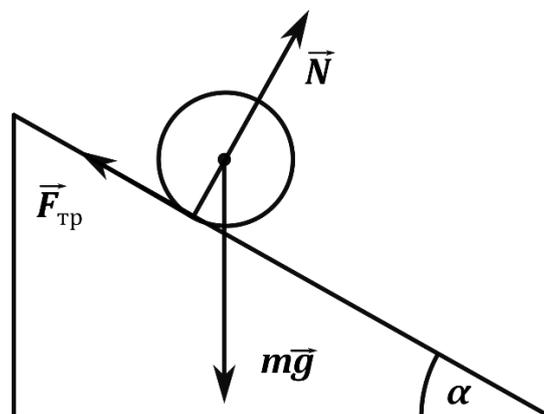


Рис. 4. Изображение сил, действующих на вал колеса.

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ J_0 \varepsilon = M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} r, \\ a_{\tau} = r \varepsilon. \end{cases} \quad (8)$$

где m – масса всего тела, $F_{\text{тр}}$ – сила трения качения (сцепления) (нет проскальзывания), a и ε – соответственно линейное и угловое ускорения.

Решая эту систему уравнений, находим линейное ускорение

$$a = a_{\tau} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_0}{mr^2}} \quad (9)$$

Если центр масс покоящегося в начальный момент колеса за время t переместился на расстояние l , то

$$a_{\tau} = \frac{2l}{t^2} \quad (10)$$

С помощью уравнений (9) и (10) находим момент инерции тела J_0 .

$$J_0 = mr^2 \left(\frac{gt^2 \sin \alpha}{2l} - 1 \right) \quad (11)$$

После соприкосновения концов вала с нижними опорными цилиндрами движение тела будет чисто вращательным и замедленным с начальной угловой скоростью ω_0 , приобретенной в процессе качения. Уравнение динамики имеет вид:

$$J_0 \frac{\Delta \omega_0}{\Delta t} = J_0 \frac{\omega_0}{t_{\text{зам}}} = M_{\text{тр}} \quad (12)$$

Рассчитав с помощью предыдущих уравнений ω_0 и измерив время торможения $t_{\text{зам}}$, можно рассчитать момент сил трения, действующий на вал со стороны цилиндров и направляющих пластин.

Выполнение работы.

Задание 1. Определение момента инерции сплошного диска.

1. Проверить с помощью уровня горизонтальность платформы.
2. Установить вал сплошного и однородного диска в верхнем положении.
3. Отпустить диск и убедиться, что он в процессе движения не касается направляющих пластин.
4. Произвести измерение времени качения 5-6 раз. Рассчитать погрешность измерения.
5. Измерить с помощью прилагаемой линейки H_1 , H_2 , L и рассчитать $tg(\alpha)$ и α .
6. Определить расстояние l с помощью линейки 4 по положению центра вала в верхнем и нижнем положениях.
7. Измерить радиус концов вала, (3-4 раза с каждой стороны, найти среднее значение).
8. По формуле (11) рассчитать момент инерции J_0 диска.
9. Зная массу диска и измерив наружный и внутренний радиусы диска, длину и радиус вала, рассчитать момент инерции системы J_0 как сумму моментов инерции диска (с учетом отверстия под вал) и вала. Сравнить с величиной J_0 , полученной из динамических экспериментов.

Задание 2. Определение момента инерции составного колеса и проверка теоремы Штейнера

1. Установить грузы на максимальные расстояния от оси колеса.
2. По методике, описанной в задании 1, определить момент инерции колеса J' .
3. Переместить грузы вплотную к валу и определить момент инерции колеса J'' .
4. Найти разность $J' - J''$.
5. Измерить расстояние, на которое перемещаются центры грузов a .

6. Используя теорему Штейнера, рассчитать теоретическое значение $\Delta J_T = (J' - J'')_T = 4m_0(a_1^2 - a_2^2)$, где a_1 и a_2 – расстояния между центрами грузов и осью вращения, $m_0 = 200$ г. Сравнить со значением, полученным в пункте 4.

Задание 3. Определение момента сил трения в опоре

1. Установить сплошной диск в верхнем положении и отпустить его.
2. Измерить (5-6 раз) время замедленного движения под действием сил трения от момента касания до момента остановки диска в нижнем положении.
3. Используя формулы (8) и (10) рассчитать в нижней точке ω_0 , считая движение равноускоренным с угловым ускорением ε .
4. Зная момент инерции диска J_0 (задание 1) по формуле (12) рассчитать момент сил трения в опоре.

Масса колеса с грузами 1226г;

Масса одного груза на спице колеса, $m_0=200$ г;

Масса сплошного диска 470г.

Контрольные вопросы

1. Вывести основной закон динамики вращательного движения.
2. Вывести формулу для момента инерции шара относительно его центра.
3. Вывести формулу для угловой скорости ω_0 в нижней точке наклонной плоскости.
3. Сформулировать теорему Штейнера.

Лабораторная работа № 14. Проверка уравнения Бернулли

Теоретическая часть

Изучение движения реальных жидкостей и газов представляет очень сложную задачу. Поэтому для описания движения жидкостей и газов необходимо вводить ряд упрощений в зависимости от конкретных условий. Существует два основных метода описания движения частиц жидкости. В первом способе наблюдают за движением индивидуальной частицы, т.е. указывают положение и скорость частицы в любой момент времени. Таким образом, для описания движения жидкости необходимо знать траектории движения всех частиц. При втором способе описания указывают скорости частиц в каждой точке пространства, занятого потоком, в фиксированный момент времени. Тем самым задается поле скоростей. В общем случае скорости частиц зависят от координат и времени.

Если скорости частиц, проходящих любые заданные точки в потоке, не меняются со временем, такой поток называют установившемся или стационарным. При этом траектории частиц называют линиями тока. В дальнейшем будем рассматривать стационарный поток.

Выделим в потоке произвольный замкнутый контур, перпендикулярный линиям тока, и проведем через точки этого контура линии тока. Они образуют поверхность, которую называют трубкой тока. Так как скорости частиц направлены по касательным к линиям тока, то частицы, двигающиеся внутри выделенной трубки тока, не покидают ее. Массу жидкости, пересекающей некоторое поперечное сечение S трубки тока за время dt , можно представить как: $dm = \rho v S dt$ где ρ – плотность жидкости, v – скорость частиц в данном сечении. При стационарном течении масса dm будет одинакова для всех сечений трубки. Если выделить два сечения S_1 и S_2 , то можно записать уравнение:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (1)$$

Это соотношение представляет собой закон сохранения массы или уравнение неразрывности. Если жидкость несжимаема, то $\rho_1 = \rho_2 = const$, и (1) принимает вид:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (2)$$

Рассмотрим стационарное течение идеальной (невязкой) жидкости в поле тяготения (рисунок 1). Применим закон сохранения энергии к движению части жидкости в трубке тока между разными сечениями S_1 и S_2 . Через некоторое время эта часть жидкости будет занимать положение между сечениями S_1^1 и S_2^1 . При перемещении сечения S_1 в положение S_1^1 внешние силы совершат работу: $A_1 = P_1 S_1 l_1$ где l_1 – перемещение сечения S_1 . Но $S_1 l_1 = \Delta V_1$. Поэтому

$$A_1 = P_1 \Delta V_1 = P_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1}.$$

В сечении S_2 внешние силы совершат работу:

$$A_2 = -P_2 S_2 l_2 = -P_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2}.$$

В случае стационарного течения $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$, и внешние силы совершают работу:

$$A = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \Delta m. \quad (3)$$

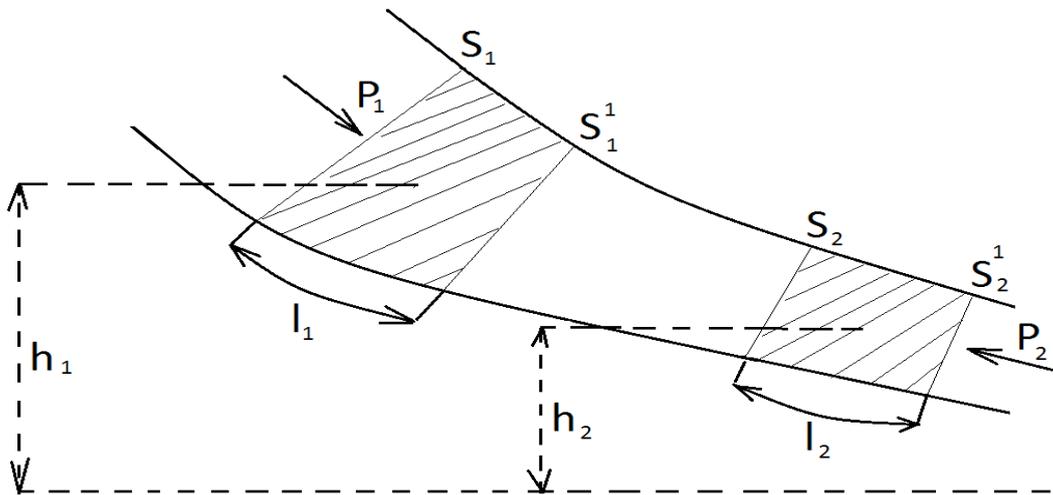


Рис. 1

Эта работа должна быть равна приращению ΔE полной энергии выделенной части жидкости. Полная энергия части жидкости между сечениями S_1^1 и S_2 неизменна. Поэтому изменение полной энергии рассматриваемого объема жидкости определяется соотношением $\Delta E =$

$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m$, где ε – энергия единицы массы. Приравнивая эту величину работе внешних сил A и сокращая на Δm , получим:

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что вдоль одной и той же линии тока при стационарном течении идеальной жидкости выполняется соотношение:

$$\varepsilon_1 + \frac{P}{\rho} = const. \quad (5)$$

Его называют уравнением Бернулли. Для несжимаемой жидкости можно считать, что полная плотность энергии \mathcal{E} представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии. Тогда уравнение Бернулли примет вид:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = const, \text{ или} \quad (6)$$

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = const. \quad (7)$$

В последнем выражении все слагаемые имеют размерность давления. Величину $P = P_c$ называют статическим давлением, $\rho v^2 / 2$ – динамическим напором, $P + \rho v^2 / 2$ – полным напором. В частном случае, при горизонтальной ориентации трубки тока, выражение (6) примет вид:

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (8)$$

Учитывая уравнение (2), нетрудно убедиться, что в трубке переменного сечения скорость минимальна, а давление максимально там, где сечение максимально, и наоборот – скорость максимальна, а давление минимально в той точке, где сечение минимально.

Как известно, газы обладают большей сжимаемостью, чем жидкости. Однако, если максимальная скорость в потоке газа u_{max} много меньше скорости звука в нем, сжимаемостью газа можно пренебречь, и для описания потока газа использовать уравнение Бернулли (8). Поэтому данное уравнение используют в лабораторной работе для описания потока воздуха, создаваемого микрокомпрессором.

Экспериментальная часть.

Описание установки

Принципиальная схема установки изображена на рисунке 2. Поток воздуха создается с помощью микрокомпрессора (1), состоящего из вентилятора и нагревательного элемента. Включение вентилятора и установление теплового режима осуществляется с помощью переключателя (2). Воздух из микрокомпрессора поступает в отрезок горизонтальной трубки переменного сечения (3) из оргстекла. Внутренний диаметр трубки в области штуцера (4) равен 30мм, а в области штуцера (5) – 14 мм. Далее струя воздуха выходит в свободное пространство, где располагается специальная платформа (6), позволяющая перемещать зонд (7) в двух направлениях: вдоль и поперек оси струи воздуха. Зонд (7) снабжен двумя наконечниками (8), один имеет осевое отверстие и предназначен для измерения полного напора, второй наконечник имеет небольшое боковое отверстие и предназначен для измерения статического давления. Подвижный зонд присоединен с помощью гибкой трубки к микроманометру (9).

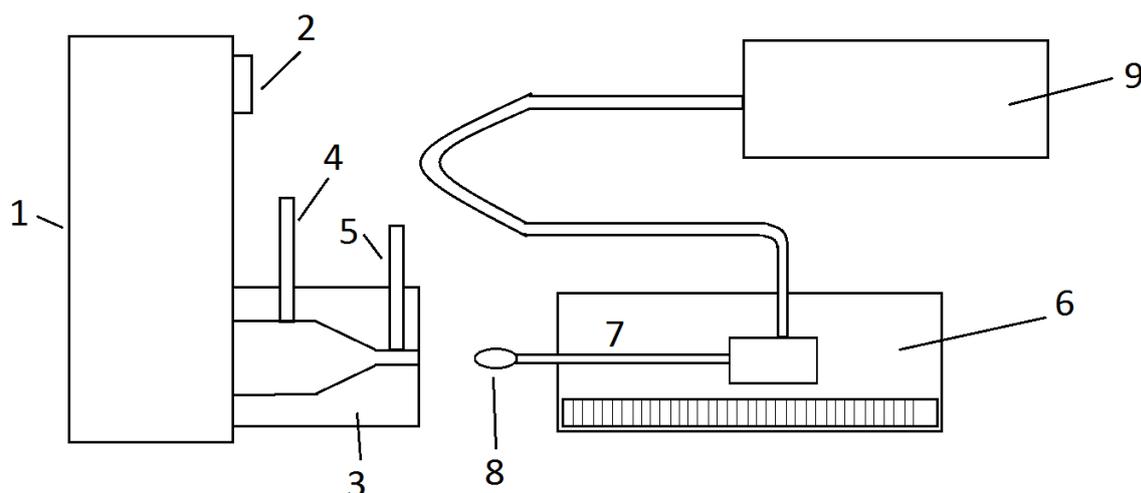


Рис. 2

Методика измерений

1. Включить микрокомпрессор и установить регулятор температуры в положение «I». Температура воздуха при этом будет практически равна комнатной.
2. Установить на зонде наконечник с осевым отверстием и измерить полный напор $P_{\text{полн}}$ на оси струи в зависимости от координаты « x » как внутри трубки (3), так и в свободном пространстве.

3. Установить на зонде наконечник с боковым отверстием и измерить статическое давление P_c вдоль оси струи.
4. Построить на одном рисунке графики $P_{\text{полн}}(x)$ и $P_c(x)$.
5. Используя соотношение $P_{\text{полн}} = P_c + \rho v^2 / 2$, рассчитать скорость воздуха на оси $v(x)$ и построить график. Плотность воздуха рассчитать по уравнению Менделеева – Клапейрона.
6. Подключить микроманометр к штуцерам (4) и (5) и измерить статическое давление на внутренней боковой стенке трубки (3), сравнить с давлением на оси.
7. Рассчитать средний секундный расход газа в сечениях S_1 и S_2 , где располагаются штуцеры (4) и (5).

Контрольные вопросы

1. Что такое линия тока, трубка тока?
2. Какие бывают виды течения газа или жидкости?
3. Следствием какого фундаментального закона является закон Бернулли?
4. Каков смысл слагаемых в законе Бернулли?
5. Почему сумма трех слагаемых в законе Бернулли определяется с точностью до некоторой константы?

Лабораторная работа № 15. Исследование колебаний физического маятника

Теоретическая часть.

Уравнение динамики вращательного движения

Любое сложное движение твердого тела можно представить как сумму двух простых движений: поступательного и вращательного. Поэтому рассмотрение движения твердого тела целесообразно начинать с анализа этих простых движений.

Целью данной лабораторной работы является изучение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Вращательным движением называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами на одной прямой, называемой осью вращения.

Пусть частица массой Δm движется по окружности радиуса r . Основной закон динамики вращательного движения для нее можно получить, используя второй закон Ньютона:

$$\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (1)$$

Умножим векторно слева этого уравнение на радиус-вектор частицы \vec{r}

$$\Delta m \left[\vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{r} \vec{F}]. \quad (2)$$

Рассмотрим производную по времени от векторного произведения радиус-вектора на скорость частицы:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \vec{v}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{v} \right] + \left[\vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} \right]. \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (3) равно нулю, так как $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, а векторное произведение вектора самого на себя равно нулю.

Второе слагаемое совпадает с векторным произведением в левой части уравнения (2), которую можно представить так:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \Delta m \vec{v}] = [\vec{r} \vec{F}]. \quad (4)$$

Вектор $\vec{L} = [\vec{r}\Delta m\vec{v}]$ называют моментом импульса. Его модуль:

$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\Delta m\vec{v}| \sin \alpha, \quad (5)$$

где α - угол между радиус - вектором \vec{r} и импульсом частицы $\Delta m\vec{v}$.

Вектор $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$ называют моментом силы. Для простоты будем полагать, что вектор силы лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Тогда модуль момента силы можно представить так:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \beta, \quad (6)$$

где β – угол между радиус-вектором, проведённым в точку приложения силы, и силой \vec{F} .

Момент силы и момент импульса - величины векторные. Направление их определяется по правилу правого винта: головка правого винта вращается по кратчайшему направлению от первого вектора в векторном произведении ко второму, при этом направление поступательного перемещения винта совпадает с направлением векторного произведения.

Итак, основной закон динамики вращательного движения можно записать следующим образом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (7)$$

Радиус-вектор частицы, движущейся по окружности, перпендикулярен скорости, синус угла между ними равен 1, поэтому в скалярном виде уравнение (7) можно записать так:

$$\frac{d}{dt}(r \Delta mv) = M. \quad (8)$$

Учтем, что $v = \omega r$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{d}{dt}(\Delta mr^2 \omega) = \Delta mr^2 \frac{d\omega}{dt} = M. \quad (9)$$

Величину $J = \Delta mr^2$ принято называть моментом инерции частицы. Вращающееся вокруг неподвижной оси твердое тело можно представить как совокупность N малых частиц (размеры их малы по сравнению с расстоянием до оси вращения) и для каждой частицы написать уравнение (9), а затем сложить все уравнения. В законе движения для одной частицы твердого тела необходимо учитывать также моменты внутренних сил. Однако при суммировании, в соответствии с третьим законом Ньютона, общий момент

внутренних сил окажется равным нулю и в правой части останется только сумма моментов всех внешних сил:

$$\sum_{i=1}^N (\Delta m_i r_i^2) \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^N M_i. \quad (10)$$

Сумму в левой части уравнения естественно назвать моментом инерции твердого тела относительно заданной оси вращения. Тогда уравнение можно представить в виде:

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M, \quad (11)$$

где J – момент инерции тела, ε – угловое ускорение, M – момент всех внешних сил.

Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси (рисунок 1). Точка пересечения оси "O" с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс "C" тела, называется **точкой подвеса маятника**. Положение тела в каждый момент времени t можно охарактеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ . Вращение тела происходит под действием силы тяжести, момент силы M для нее равен:

$$M = -mg \cdot a \sin \varphi, \quad (12)$$

где a - расстояние от оси вращения до центра масс тела. Уравнение динамики вращательного движения для физического маятника записывается в виде:

$$J_1 \ddot{\varphi} = -mg \cdot a \sin \varphi, \quad (13)$$

где J_1 - момент инерции тела относительно оси вращения, проходящего через точку подвеса маятника.

При малых колебаниях маятника $\sin \varphi \approx \varphi$, и уравнение (13) преобразуется к виду:

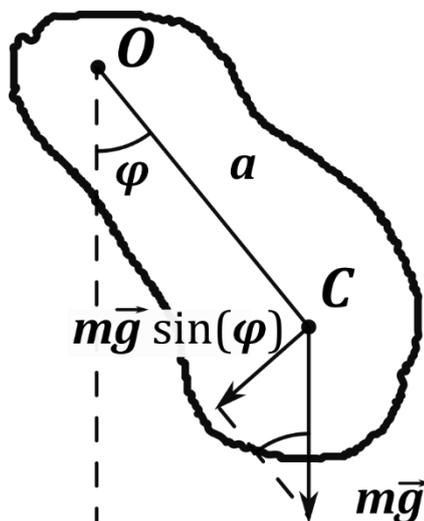


Рис. 1. Физический маятник

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J_1} \varphi = 0. \quad (14)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка с постоянным коэффициентом перед φ . Обозначив его за ω_0^2 приходим к широко известному уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (15)$$

Подстановкой легко убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (16)$$

Данное соотношение аналитически описывает гармонические колебания, которые совершает физический маятник без учета сил сопротивления среды. Величина φ_0 определяет максимальное отклонение колеблющегося тела от положения равновесия и называется амплитудой колебания. Величина ω_0 называется циклической частотой. Величину $\omega t + \theta$ называют фазой колебания, а ее значение при $t = 0$, т.е. величину θ - начальной фазой. Начальная фаза определяется положением тела, в котором оно находилось в момент начала отсчета времени. Если при $t = 0$, $\varphi = 0$, то $\theta = 0$ и $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$. Если же при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, то $\theta = \pi/2$ и $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$.

Периодом гармонического колебательного движения называется наименьшее время T , по истечении которого все величины, характеризующие это движение, принимают первоначальное значение. Учитывая, что период синусоидальной функции равен 2π , из (16) следует, что за время T фаза колебаний должна измениться на 2π , т.е.

$$\begin{aligned} (\omega_0(t + T) + \theta) - (\omega_0 t + \theta) &= \omega_0 T = 2\pi, \\ \omega_0 &= 2\pi/T. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку за ω_0^2 мы обозначили величину mga/J_1 то период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mga}} \quad (18)$$

Если период колебаний не зависит от амплитуды, то такие колебания называются изохронными. Мы видим, что малые колебания физического маятника с амплитудой порядка нескольких угловых градусов изохронны.

Нахождение расстояния между точкой подвеса и центром масс, при котором период колебаний минимален

В данной лабораторной работе в качестве тела, совершающего колебания, рассматривается тонкий однородный стержень массы m . Соответственно в формуле (18) J_1 – момент инерции относительно центра масс тонкого однородного стержня, равный

$$J_1 = ml^2/12, \quad (19)$$

где l – длина стержня.

Для расчёта момента инерции в случаях, когда ось колебаний тела не лежит в его центре масс, используется теорема Штейнера. Тогда формула (18) примет вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2/12 + a^2}{ga}}, \quad (20)$$

где a – расстояние от точки подвеса до центра масс.

Преобразуем (20) к виду:

$$T^2 = \frac{\pi^2 l^2}{3g} \cdot \frac{1}{a} + \frac{4\pi^2}{g} \cdot a = B \cdot \frac{1}{a} + A \cdot a. \quad (21)$$

Из курса математического анализа известно, что экстремум функции $T^2(a)$, находится из условия обращения в ноль первой производной этой функции. Продифференцировав выражение (21) по величине a и приравняв производную к нулю, получим значение a_m :

$$a_m = \sqrt{B/A}. \quad (22)$$

Чтобы доказать то, что a_m является точкой минимума, нужно подставить в выражение производной значение меньше, чем a_m (например $0,1a_m$) и большее (например $10a_m$), и показать, что производная $\frac{d(T^2(a))}{da}$, при переходе через точку a_m , меняет знак с отрицательного на положительный (проделать самостоятельно).

Преобразуем (21) к виду:

$$T^2 \cdot a = A \cdot a^2 + B = f(a^2). \quad (23)$$

Функция $f(a^2)$ является линейной, поэтому определить неизвестные коэффициенты A и B можно графически, построив зависимость $f(a^2) = T^2 \cdot a$ от a^2 .

Теоретическое значение a_m можно получить по формуле (22), выразив коэффициенты A и B через длину маятника и ускорение свободного падения, см. (21)

$$a_m = \sqrt{B/A} = l/\sqrt{12}. \quad (24)$$

Экспериментальная часть. Описание установки

Изучение зависимости периода колебаний от точки подвеса производится на следующей установке (рисунок 2). На подставке (1) установлена основа (2) для крепления металлического стержня (3), который закреплен в точке O_i (4), находящейся на расстоянии a_i от точки, располагающейся в центре масс C данного стержня. В стержне по обе стороны от точки центра масс сделаны отверстия (рисунок 3). Отрезок CO_1 равен 5 см, так же, как и все следующие за ним (справа от центра). Длина отрезка CO_2 составляет 7,5 см, причем следующий за ним O_2O_4 равен 5 см (как и все далее слева от центра).

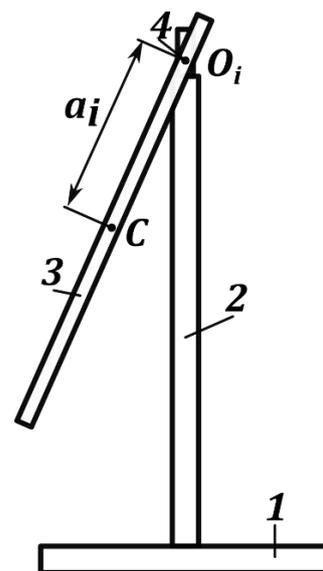


Рис. 2

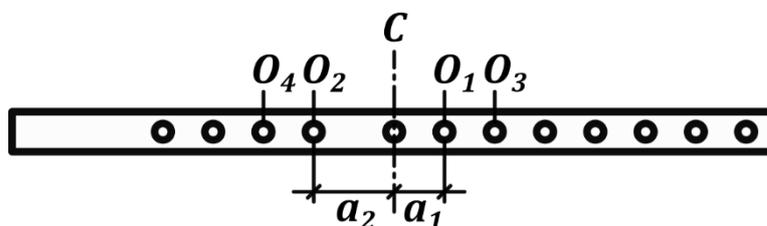


Рис. 3

Таким образом, можно менять расстояние от точки подвеса до центра масс с шагом 2,5 см.

Измерения и обработка результатов

1. Необходимо с помощью секундомера измерить время t_N и число N малых колебаний, рассчитать период одного колебания для каждой точки подвеса и занести соответствующие значения в таблицу 1.

Таблица 1.

| № | a_i , см | a_i^2 , м ² | N | t_N , с | T , с | $T^2 \cdot a_i$, с ² ·м |
|-----|-------------------|--------------------------|-----|-----------|---------|-------------------------------------|
| 1 | 5 | | | | | |
| 2 | 7,5 | | | | | |
| 3 | 10 | | | | | |
| ... | С шагом 2,5 см | | | | | |
| 12 | 40 | | | | | |

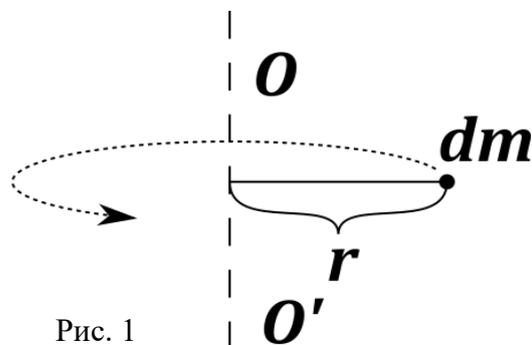
- По значениям из таблицы построить график зависимости $T^2 \cdot a$ от квадрата расстояния a_i^2 между точкой подвеса и центром масс.
- По графику определить коэффициенты A и B линейной функции $f(a^2)$ и рассчитать a_m по формуле (22), при котором период колебаний физического маятника минимален.
- Сравнить экспериментальное значение a_m с теоретическим (24). Длина стержня $l = 80$ см.

Контрольные вопросы

- Что называется математическим маятником? физическим маятником? Приведите 3 примера, как может быть изготовлен физический маятник.
- Запишите уравнение динамики вращательного движения для физического маятника, сделайте пояснение рисунком.
- Выведите дифференциальное уравнение малых колебаний для физического маятника. Каково его решение?
- Выведите выражение для периода колебаний физического маятника, тело которого представлено тонким стержнем.
- Выведите формулу расстояния a_m от точки подвеса до центра тяжести, при котором период колебания физического маятника, выполненного из тонкого стержня, минимален.

Приложение 1. Моменты инерции некоторых однородных тел при вращении вокруг оси, проходящей через их центр масс

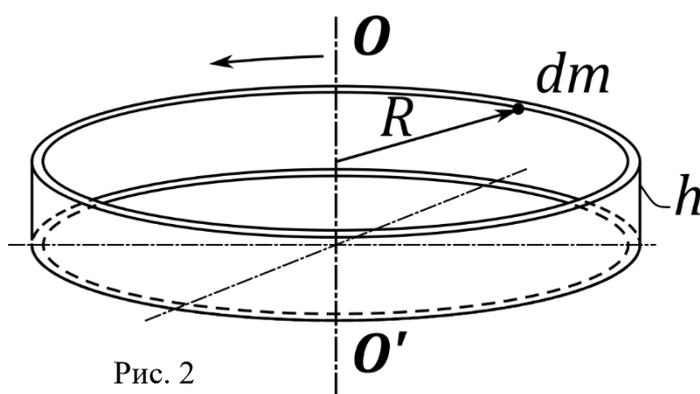
Момент инерции материальной точки



Момент инерции dI материальной точки массой dm , вращающейся вокруг оси OO' по окружности радиуса r , равен

$$dI = dm \cdot r^2. \quad (1)$$

Момент инерции тонкого кольца



Момент инерции I_K тонкого кольца массой M высотой h , средним радиусом R , постоянной объёмной плотностью ρ_V , вращающегося вокруг оси симметрии OO' , можно найти суммируя моменты инерции всех

материальных точек, составляющих кольцо:

$$I_K = \sum_i (dm_i \cdot r_i^2). \quad (2)$$

где r_i – расстояние от i – й материальной точки массой dm_i до оси вращения. В приближении того, что кольцо тонкое, имеем $r_i \approx R$, где R – средний радиус кольца. Тогда $R^2 = \text{const}$ можно вынести за знак суммирования:

$$I_K = R^2 \sum_i dm_i = MR^2. \quad (3)$$

$$I_{\text{кольца}} = MR^2$$

Момент инерции тонкого стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр масс

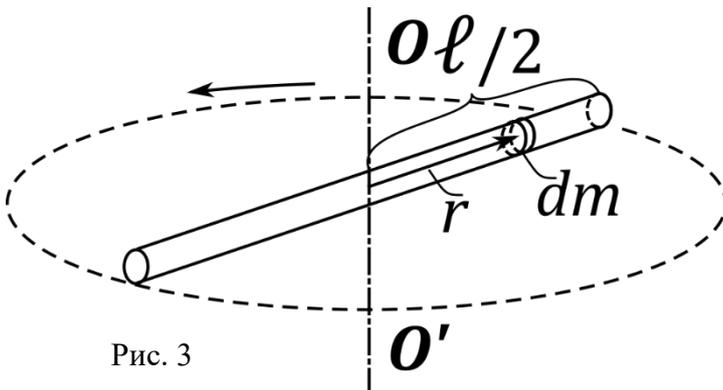


Рис. 3

Момент инерции I_c тонкого стержня массой M длиной l , постоянной линейной плотностью ρ_l , вращающегося вокруг оси OO' , проходящей через его центр масс, можно найти как удвоенный момент инерции

всех материальных точек, составляющих половину стержня от центра масс до одного из концов:

$$I_c = 2 \sum_i (dm_i \cdot r_i^2). \quad (4)$$

где r_i – расстояние от i – й материальной точки массой dm_i до оси вращения.

Перейдём от суммирования к интегрированию и выразим элемент массы через плотность стержня и приращение длины ($dm = \rho_l dr$):

$$\begin{aligned} I_c &= 2 \int_0^{\ell/2} \rho_l \cdot r^2 dr = 2\rho_l \int_0^{\ell/2} r^2 \cdot dr = 2\rho_l \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{\ell/2} \\ &= 2\rho_l \frac{\ell^3}{24} = \rho_l \frac{\ell^3}{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выразив массу стержня $M = \rho_l \ell$, получим:

$$I_c = \rho_l \frac{\ell^3}{12} = \rho_l \ell \frac{\ell^2}{12} = \frac{1}{12} M \ell^2. \quad (6)$$

$$I_{\text{стержня}} = \frac{1}{12} M \ell^2$$

Момент инерции диска (сплошного цилиндра)

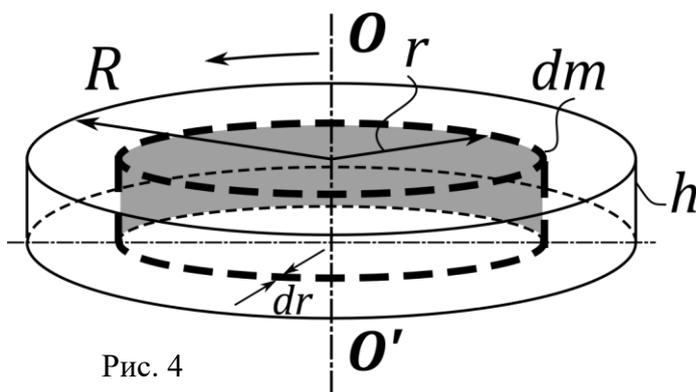


Рис. 4

Однородный диск массой M радиусом R , постоянной объёмной плотностью ρ_V , высотой h , вращающийся вокруг оси OO' , проходящей через его центр масс, мысленно разобьём на тонкие кольца с радиусом r , толщиной dr , и массой $dm =$

$\rho_V \cdot dV = \rho_V \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot h$. Момент инерции кольца равен

$$dI = dm \cdot r^2 = \rho_V \cdot 2\pi r^3 \cdot dr \cdot h. \quad (7)$$

Момент инерции диска запишем в виде интегральной суммы моментов инерции всех составляющих его колец:

$$\begin{aligned} I_{\text{д}} &= \int_{r=0}^{r=R} dI = \int_0^R \rho_V 2\pi h \cdot r^3 \cdot dr = \rho_V 2\pi h \int_0^R r^3 \cdot dr \\ &= \rho_V 2\pi h \cdot \frac{R^4}{4} = \rho_V \pi h \frac{R^4}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выразив массу диска, равную $M = \rho_V \cdot \pi R^2 \cdot h$, получим:

$$I_{\text{д}} = \rho_V \pi R^2 h \frac{R^2}{2} = 0.5MR^2. \quad (9)$$

$$I_{\text{диска}} = \frac{1}{2}MR^2$$

Момент инерции шара

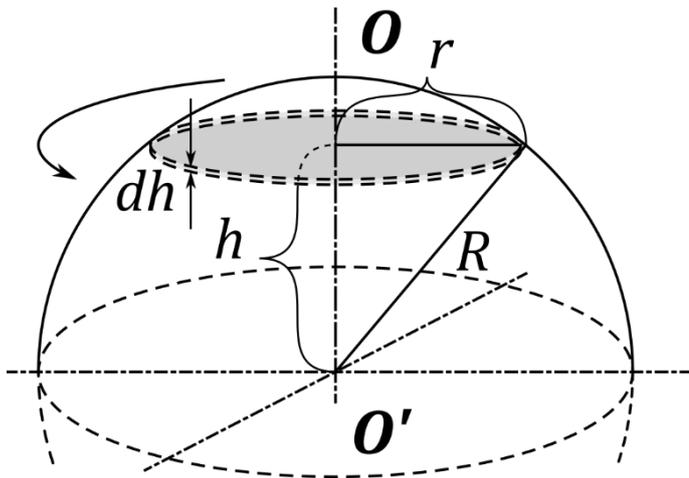


Рис. 5

Однородный шар массой M радиусом R , постоянной объёмной плотностью ρ_V , вращающийся вокруг оси OO' , проходящей через его центр масс, мысленно разобьём на тонкие диски высотой dh , массой $dm = \rho_V \cdot dV = \rho_V \cdot \pi r^2 \cdot dh$. Момент инерции такого диска равен:

$$dI_1 = 0.5 dm r^2 = 0.5 \rho_V \cdot \pi r^4 \cdot dh. \quad (10)$$

По теореме Пифагора, квадрат радиуса шара R равен сумме квадратов радиуса диска r и высоты h . Поэтому радиус диска r можно выразить через R и h :

$$R^2 = r^2 + h^2, \quad r = \sqrt{R^2 - h^2}. \quad (11)$$

Возведём r в 4ю степень и подставим в выражение для момента инерции диска dI_1 . Получим:

$$\begin{aligned} dI_1 &= 0.5 \pi \rho_V (R^2 - h^2)^2 dh \\ &= 0.5 \pi \rho_V dh (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4). \end{aligned} \quad (12)$$

Момент инерции шара запишем в виде удвоенной интегральной суммы моментов инерции дисков, из которых состоит половина шара:

$$\begin{aligned} I_{III} &= 2 \int_{h=0}^{h=R} dI_1 = 2 \int_0^R 0.5 \pi \rho_V (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4) dh \\ &= \pi \rho_V \left\{ R^4 h \Big|_0^R - 2R^2 \frac{h^3}{3} \Big|_0^R + \frac{h^5}{5} \Big|_0^R \right\} \\ &= \pi \rho_V \left\{ R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right\} \\ &= \pi \rho_V \frac{15 - 10 + 3}{15} R^5 = \frac{8}{15} \pi \rho_V R^5. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично можно подставить выразить r^2 в выражение для массы диска dm :

$$dm = \rho_V \cdot \pi(R^2 - h^2) \cdot dh. \quad (14)$$

Масса шара равна:

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_{h=0}^{h=R} dm = 2 \int_0^R \rho_V \cdot \pi(R^2 - h^2) \cdot dh \\ &= 2\pi \rho_V \left\{ R^2 h \Big|_0^R - \frac{h^3}{3} \Big|_0^R \right\} = 2\pi \rho_V \left\{ R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right\} \\ &= 2\pi \rho_V \frac{3-1}{3} R^3 = \rho_V \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned} \quad (15)$$

Выделив массу шара в выражении момента инерции шара (13), получим:

$$I_{\text{ш}} = \frac{8}{15} \rho_V \pi R^5 = \frac{2}{5} \left(\rho_V \frac{4}{3} \pi R^3 \right) R^2 = \frac{2}{5} MR^2. \quad (16)$$

$$I_{\text{шара}} = \frac{2}{5} MR^2$$

Литература

- 1) Стрелков, Сергей Павлович. Механика : учебник / С. П. Стрелков. 4-е изд., стер. Санкт-Петербург : Лань, 2005. 560 с. : ил.
- 2) Сивухин, Дмитрий Васильевич (1914-1988). Общий курс физики : учебное пособие для студентов физических специальностей вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. Москва : Физматлит. ISBN 978-5-9221-1513-1 : Б.г. Т. 1: Механика. 2014. 560 с.
- 3) Савельев, Игорь Владимирович. Курс общей физики : в 4 т. : учебное пособие / И. В. Савельев. Москва : КноРус, Б.г. Т. 1: Механика. Молекулярная физика и термодинамика / И. В. Савельев. 2012. 528 с.
- 4) Матвеев, Алексей Николаевич. Механика и теория относительности : учеб. пособие / А. Н. Матвеев. 4-е изд., стереотип. Санкт-Петербург : Лань, 2009.
- 5) Хайкин, Семен Эммануилович. Физические основы механики = Physical foundations of mechanics : учебное пособие / С. Э. Хайкин. - Изд. 3-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2008. - 754 с. : ил., табл.
- 6) Фриш, Сергей Эдуардович. Курс общей физики : в 3 т. : учеб. / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. Санкт-Петербург : Лань. (Классическая учебная литература по физике) . ISBN 5-8114-0662-2 : Б.г. Т. 1: Физические основы механики; Молекулярная физика; Колебания и волны. 2006. 480 с. : ил.
- 7) Пейн, Г. Физика колебаний и волн / Г. Пейн. Москва : Мир, 1979. 389 с. : ил.

Оглавление

| | |
|---|----|
| Лабораторная работа № 1. Проверка основного закона динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека | 3 |
| Лабораторная работа № 2. Определение угловой скорости прецессии гироскопа | 9 |
| Лабораторная работа № 3. Изучение движения маятника Максвелла | 13 |
| Лабораторная работа № 4. Изучение качения тела по наклонной плоскости | 16 |
| Лабораторная работа № 5. Определение моментов инерции тел методом крутильных колебаний | 21 |
| Лабораторная работа № 6. Определение скорости пули с помощью баллистического маятника | 25 |
| Лабораторная работа № 7. Определение ускорения свободного падения с помощью обратного и математического маятников | 29 |
| Лабораторная работа № 8. Изучение затухающих колебаний | 40 |
| Лабораторная работа № 9. Изучение вынужденных колебаний | 45 |
| Лабораторная работа № 10. Изучение упругости твердого тела. Определение модуля Юнга..... | 51 |
| Лабораторная работа № 11. Изучение упругости твёрдого тела. Определение модуля сдвига методом кручения | 57 |
| Лабораторная работа № 12. Определение скорости звука в воздухе | 60 |
| Лабораторная работа № 13. Изучение динамики вращательного движения | 71 |
| Лабораторная работа № 14. Проверка уравнения Бернулли | 77 |
| Лабораторная работа № 15. Исследование колебаний физического маятника ... | 82 |
| Приложение 1. Моменты инерции некоторых однородных тел при вращении вокруг оси, проходящей через их центр масс | 89 |
| Литература | 94 |

Виталий Иванович Семихин
Борис Владимирович Григорьев
Альбина Вольфовна Ширшова
Александр Владимирович Шаталов
Денис Александрович Важенин

МЕХАНИКА

Учебно-методическое издание для студентов направлений

подготовки

03.03.02 Физика, 16.03.01 Техническая физика

Лабораторный практикум

Подписано в печать 12.02.2021. Тираж 20 экз.

Объём 5,5 усл. печ. л. Формат 60x84/16. Заказ № 3.

Издано на кафедре прикладной и технической физики Тюменского
государственного университета

625003, г. Тюмень, Перекопская 15а.