РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра расходометрии нефти и газа

Б. В. ГРИГОРЬЕВ, С. Г. НИКУЛИН, Е. В. ЗАЙЦЕВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для студентов
естественно-научных направлений

Тюмень
Издательство
Тюменского государственного университета
2017

УДК: 389(075.8)
ББК: Ж10я73
АЗ: Г834

Б.В. Григорьев, С.Г. Никулин, Е.В. Зайцев. Основы математической обработки результатов физико-технических измерений. Учебно-методическое пособие для студентов естественно-научных направлений. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2017, 32 с.

В учебно-методическом пособии приведена классификация погрешностей физико-технических измерений, описаны причины их возникновения и методы оценки погрешностей; рассмотрены основные положения обработки результатов прямых и косвенных измерений; даны рекомендации по построению графиков измеряемых зависимостей и оформлению таблиц для представления результатов измерений.

Учебно-методическое пособие разработано для студентов, приобретающих первичные навыки проведения экспериментальных исследований.

Рекомендовано к изданию кафедрой расходометрии нефти и газа. Утверждено проректором по образовательной деятельности Тюменского государственного университета.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР: ***С. Г. Никулин***, зав. базовой кафедрой расходометрии нефти и газа

РЕЦЕНЗЕНТЫ: ***А. Г. Труфанова***, зам. главного метролога АО «ГМС «Нефтемаш»

А. В. Елышев, зам. начальника управления по взаимодействию с индустриальными партнерами Тюменского государственного университета, канд. хим. наук.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наука начинается с тех пор, как начинаю измерять; точная наука немыслима без меры.

Д. И. Менделеев

I. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. ПРОГРЕШНОСТЬ И ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Измерение физических величин

Важной задачей физического эксперимента является определение количественных характеристик исследуемого объекта или явления. При ее решении встречаются с ее двумя последовательными процессами: во-первых, с измерениями, которые выполняются в процессе лабораторной работы; во-вторых, с вычислениями, которые выполняются при обработке результатов измерений.

Измерением физической величины называется последовательность операций по нахождению значения этой величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Различают два основных вида измерений физических величин: прямые измерения и косвенные.

Прямым измерением называют измерение физической величины, при котором искомое значение находят непосредственно из опытных данных (выходной измерительный сигнал уже содержит информацию об измеряемой физической величине). Таковы, например, измерения температуры физического объекта термометром, массы тела взвешиванием на циферблатных весах, длины с помощью линейки и т. д. Однако в большинстве экспериментов приходится иметь дело с косвенными измерениями.

Косвенным измерением называют измерение физической величины, при котором искомое значение вычисляют с помощью известной зависимости между этой величиной и величинами, определяемыми прямыми измерениями. Например, вычисление плотности тела по прямым измерениям его массы и объема.

2. Погрешности измерений

Все измерения могут быть произведены, как правило, с ограниченной точностью. Иначе говоря, результат всякого измерения дает нам не истинное значение величины, а лишь значение, достаточно близкое к истинному. Это приближенное к истинному значение величины, найденное экспериментальным путем, называют **действительным значением физической величины**.

Под **погрешностью (ошибкой) измерений** понимают отклонения результатов измерений от истинного значения измеряемой величины. При этом различают абсолютную и относительную погрешности.

Абсолютная погрешность измерения – это разница между измеренным x и истинным X значениями измеряемой величины:

$$\Delta x = x - X \tag{1.1}$$

Поскольку истинное значение измеряемой величины неизвестно, то в качестве наиболее близкого к нему можно принять среднее значение результатов ряда измерений одной и той же величины, т. е.

$$\Delta x = x - \overline{x} \tag{1.2}$$

Абсолютную погрешность выражают в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность измерения – это отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины, выраженное в относительных единицах или в процентах:

$$\delta = \frac{|\Delta x|}{\overline{x}} \tag{1.3}$$

Точностью измерений называют качество измерений, отражающее близость результатов измерений к истинному значению измеряемой величины. Она равна обратному значению модуля относительной погрешности.

Все погрешности по характеру происхождения делятся на систематические, случайные и грубые.

Систематические погрешности вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Значения систематических погрешностей от измерения к измерению остаются постоянными или могут изменяться по определенному закону. Их можно исключить путем введения поправки к измеренному значению, если известны причина и закон изменения систематической погрешности. Они связаны в основном с погрешностями средств измерений и несовершенством методов измерений.

В зависимости от причин возникновения различают четыре вида систематических погрешностей:

а) погрешности метода, происходящие от ошибочности или недостаточной разработанности принятой теории метода измерения. Например, при измерении диаметра не учитывается температурное расширение детали, обрабатываемой на станке; тонкое кольцо деформируется излишним усилием при измерении его диаметра штангенциркулем и т. п.;

б) инструментальные погрешности, зависящие от погрешностей применяемых средств измерений;

в) погрешности, обусловленные неправильной установкой и взаимным расположением средств измерения. Например, весы не выставлены по уровню; параллакс при отсчете по шкале и т. п.;

г) личные погрешности, обусловленные индивидуальными особенностями наблюдателя. Например, запаздывание или опережение при регистрации изменяющегося во времени показания прибора и т. п.

Случайные погрешности вызываются неконтролируемыми обстоятельствами и всегда присутствуют в эксперименте. Природа случайных погрешностей может быть различной: флуктуации нулевого положения указателя измерительного прибора, несовершенство органов чувств экспериментатора, непрерывные неконтролируемые изменения внешних воздействий – температуры, влажности, давления и т. д. В отличие от систематических значения случайных погрешностей изменяются непредсказуемым образом при повторных измерениях одной и той же величины, и исключить их невозможно.

Случайные погрешности служат причиной разброса результатов повторных измерений относительно истинного значения измеряемой величины. Пользуясь законом статистики, можно найти интервал, в котором заключено истинное значение измеряемой физической величины.

Грубые погрешности, или промахи, относятся к группе случайных погрешностей и обусловлены, главным образом, недосмотром экспериментатора или неисправностью средства измерения. Они значительно превышают ожидаемые значения погрешностей и в связи с этим легко обнаруживаются. Такие результаты измерений отбрасываются.

II. ОПЕРАЦИИ НАД ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ БЕЗ СТРОГОГО УЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ

1. Верные и сомнительные значения цифры приближенного числа

Помимо значения физической величины полагается указывать погрешность, с которой оно определено. Однако часто погрешность не указывают, а записывают лишь значение физической величины. Например, для определения момента инерции тел методом крутильных колебаний даются: радиус диска-платформы $R=0{,}142$ *м*, длина подвеса $l=3{,}25$ *м*, масса платформы $m=3{,}8$ *кг* и т. д. В таких случаях следует считать, что абсолютная погрешность не превосходит одной единицы последней значащей цифры. Например, для радиуса диска-платформы $R=0{,}142$ *м* абсолютная погрешность не будет превосходить 0,001, а для длины подвеса $l=3{,}25$ *м* – значения 0,01 и т. д. Следовательно, все значащие цифры числа, выражающего значения физической величины, кроме последней, нужно считать верными; последнюю же цифру надо считать сомнительной.

Значащими цифрами числа являются все цифры данного числа, кроме нулей, стоящих слева. Нули в середине или в конце числа (справа) – значащие цифры. Например, в числе 0,05030 первые два нуля не являются значащими, а третий и четвертый – значащие.

В случае больших целых чисел с нулями на конце возникает вопрос, служат ли нули для обозначения значащих цифр или для определения разряда цифр (например, число 42000). Чтобы избежать такой неопределенности, следует писать подобные числа в виде $4{,}2\cdot10^4$ если они имеют две значащие цифры, или $4{,}20\cdot10^3$, если они имеют три значащие цифры.

2. Правила округления

Если приближенное значение физической величины содержит лишние или недостоверные цифры, то его округляют. При этом руководствуются следующими правилами.

I) Округление следует выполнять сразу до желаемого числа значащих цифр, а не по этапам.

II) При округлении последняя сохраняемая цифра не изменяется, если:

1) первая отбрасываемая цифра, считая слева направо, меньше 5;

2) первая отбрасываемая цифра, равная 5, получилась в результате предыдущего округления в большую сторону.

III) При округлении последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу, если:

1) первая отбрасываемая цифра больше 5;

2) первая отбрасываемая цифра, считая слева направо, равна 5 (при отсутствии предыдущих округлений или при наличии предыдущего округления в меньшую сторону).

3. Правила подсчета цифр при выполнении математических операций с приближенными числами

При выполнении различных математических операций с приближенными числами надлежит руководствоваться следующими правилами:

1) при сложении и вычитании в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков;

2) при умножении и делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством значащих цифр. Исключение из этого правила допускается в тех случаях, когда один из сомножителей произведения начинается с единицы, а сомножитель, содержащий наименьшее количество значащих цифр, с какой-нибудь другой цифры. В этих случаях в результате сохраняют на одну цифру больше, чем в числе с наименьшим количеством значащих цифр. Например, результат перемножения чисел 13,27 и 0,84 можно записать не двумя, а тремя значащими цифрами;

3) результат расчета значений функций $x^n, \sqrt[n]{x}, \lg x$ некоторого приближенного числа x должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в числе x. При вычислении промежуточных результатов сохраняют на одну цифру, называемую запасной, больше, чем рекомендует правила. В окончательном результате запасную цифру отбрасывают.

Если некоторые приближенные числа содержат больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня и т. д.), чем другие, то их предварительно округляют, сохраняя только одну лишнюю цифру.

III. ПРАКТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Пусть при измерении физической величины x мы получили n значений: $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_n$. Приближенным к истинному значению (действительным значением) величины x будет среднее арифметическое полученных значений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3.1)$$

Чем больше число измерений, тем ближе $\bar{x}$ к истинному значению измеряемой величины X .

Согласно (1.2) абсолютная погрешность измерения равна

$$\Delta x = x - \bar{x}$$

При большом числе измерений равновероятно появление погрешностей с противоположными знаками. В этом случае истинное значение величины x попадает в интервал

$$\bar{x} - \Delta x \le x \le \bar{x} + \Delta x \qquad (3.2)$$

Интервал от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$ называют **доверительным интервалом**. Выражение (3.2) можно переписать в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad (3.3)$$

Вероятность того, что $\bar{x}$ отличается от истинного значения X не более чем на Δx, называют **доверительной вероятностью, или коэффициентом надежности.**

2. Вычисление доверительной вероятности и доверительного интервала по методу Корнфельда

Для определения доверительного интервала пользуются различными методами. Один из простейших, метод Корнфельда, заключается в выборе доверительного интервала от минимального $x_{\min}$ до максимального значения $x_{\max}$ результата в данной серии измерений. В этом случае в качестве приближенного значения измеряемой величины принимают

$$\bar{x} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \tag{3.4}$$

Абсолютная погрешность принимается равной половине доверительного интервала, т.е.

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \tag{3.5}$$

Такому доверительному интервалу соответствует доверительная вероятность:

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{3.6}$$

где n – число измерений в данной серии.

Значения погрешностей измерений определяются всегда с некоторой ошибкой, поэтому они должны содержать не более двух значащих цифр. Таким образом, при записи результата измерений в стандартной форме необходимо соблюдать следующие правила:

1) значение погрешности следует округлять до двух значащих цифр, если первая из них единица, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях;

2) при записи среднего значения результатов измерений физической величины необходимо указывать цифры до того же младшего разряда, что и при записи погрешности.

Пример. В результате $n = 5$ измерений диаметра d шарика микрометром получены значения: 5,27; 5,30; 5,28; 5,32; 5,28 мм. Определить d и Δd, используя метод Корнфельда.

Порядок расчета:

1. Определяем минимальные и максимальные значения измерений диаметра: $d_{\max} = 5{,}32 мм$, $d_{\min} = 5{,}27 мм$.

2. По формуле (3.4) находим приближенное значение измеряемой величины:

$$\bar{d} = \frac{5{,}32 + 5{,}27}{2} = 5{,}295 мм$$

3. Абсолютную погрешность рассчитываем по формуле (3.5):

$$\Delta d = \frac{5{,}32 - 5{,}27}{2} = 0{,}025 мм$$

Согласно первому правилу значение абсолютной погрешности надлежит округлить до одной значащей цифры и принять, что $\Delta d = 0,03 мм$. По второму правилу среднее арифметическое значение диаметра шарика округляется до второго десятичного знака, т. е. $d = 5,30 мм$.

4. Вычисляем доверительную вероятность по выражению (3.6):

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,94$$

Результат измерений записывается в стандартной форме:

$$d = (5,30 \pm 0,03) мм;\ P = 0,94$$

3. Вычисление элементов доверительного интервала с применением элементов математической статистики

Вычисление случайных погрешностей основано на теории вероятностей. Эта теория дает возможность установить в конечном результате только наиболее вероятное значение измеряемой величины. Тем не менее при обработке результатов измерений использование формул и выводов этой теории позволяет верно оценить результаты измерений даже в самых сложных случаях.

Для выявления основных положений теории погрешностей воспользуемся аналогией между случайными погрешностями измерений и другими, более наглядными свойствами объектов, которые также подчиняются этой теории. Практика показывает, что если, например, производятся выстрелы из винтовки при одинаковом тщательном прицеливании в центр мишени, то пули всегда ложатся не точно в ее центр, а на некоторых расстояниях от него. Но вместе с тем нетрудно заметить, что точки поражения, далекие от центра мишени, встречаются реже по сравнению с точками, близкими к центру. Это обстоятельство особенно отчетливо выявляется при большом числе последовательных выстрелов.

Разобьем площадь мишени на полосы, проведя ряд параллельных прямых, отстоявших друг от друга на расстоянии Δr (рис. 3.1). Если определить число попаданий Δn, приходящихся на каждую полосу, то окажется, что оно монотонно убывает по мере удаления от центральной полосы, стремясь к нулю на достаточно большом расстоянии от центра мишени. Это видно на кривой рис. 3.2.

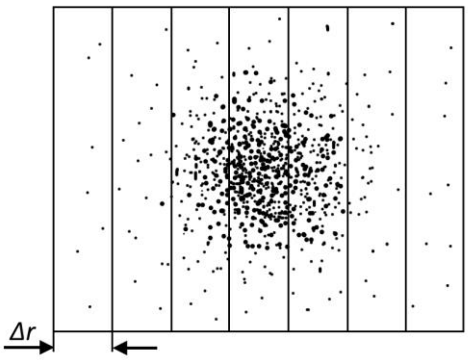

Рис. 3.1. Мишень.

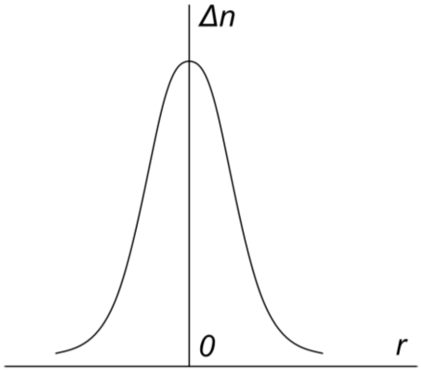

Рис. 3.2. Распределение вероятности попадания в мишень по мере удаления от ее центра.

Совершенно такая же закономерность проявляется во множестве случайных погрешностей, т. е. погрешности, большие по абсолютной величине, реже встречаются по сравнению с малыми погрешностями. Таким образом, случайные погрешности должны группироваться около истинного значения измеряемой величины так же, как группируются точки поражения мишени около ее центра.

Допустим, что произведено n измерений некоторой величины x: $x_1, x_2, ..., x_n$. Можно ожидать, что число Δn полученных результатов, которые лежат в некотором интервале Δx, должно быть пропорционально:

1) общему числу измерений n;

2) величине взятого интервала Δx;

3) некоторой функции распределения случайных величин $f(x)$.

Таким образом, можно записать, что

$$\Delta n = nf(x)\Delta x \tag{3.7}$$

Вид функции распределения $f(x)$ был определен Гауссом. Теория Гаусса приводит к так называемому закону нормального распределения случайных погрешностей. Выводы этой теории основаны на двух аксиомах, очевидность которых при большом числе измерений не вызывает сомнений:

- вероятность (или частота) появления малых случайных погрешностей больше вероятности (или частоты) больших случайных погрешностей.

- вероятность (или частота) появления случайных погрешностей не зависит от их знака, т. е. случайные погрешности, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто.

Из выражения (3.7) найдем вероятность того, что некоторое значение x_i лежит в интервале от x до $x+\Delta x$:

$$\frac{\Delta n}{n} = f(x)\Delta x \tag{3.8}$$

Отсюда нетрудно заключить, что функция распределения

$$f(x) = \frac{\Delta n}{n\Delta x} \tag{3.9}$$

представляет собой плотность этой вероятности, т. е. определяет вероятность появления случайной величины x_i в единичном интервале Δx.

Найденная Гауссом Функция имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{\Delta n}{n\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.10}$$

Параметр функции распределения σ представляет собой **среднеквадратичную погрешность измерений** и, как следует из теории, определяется общим выражением

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x-X)^2 f(x)dx \tag{3.11}$$

График функций Гаусса представлен на рис. 3.3, 3.4. Максимум этой функции соответствует $x = X$, где X – истинное значение измеряемой величины. Функция $f(x)$ симметрична относительно центра распределения. Ширина максимума функции определяется величиной σ. На рис. 3.3 функция изображена для трех различных значений σ. Чем точнее измерения, тем ближе к истинному значению X лежат результаты отдельных измерений, т. е. величина σ меньше.

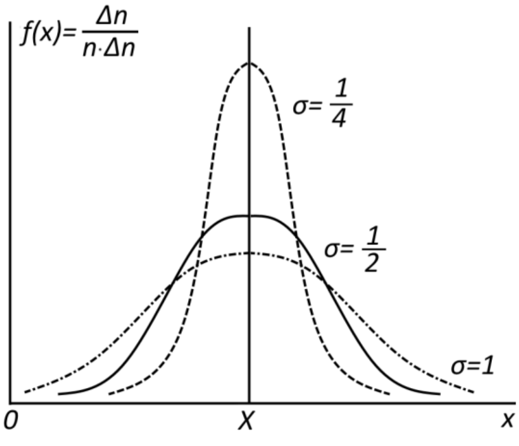

Рис. 3.3. Кривые распределения вероятности.

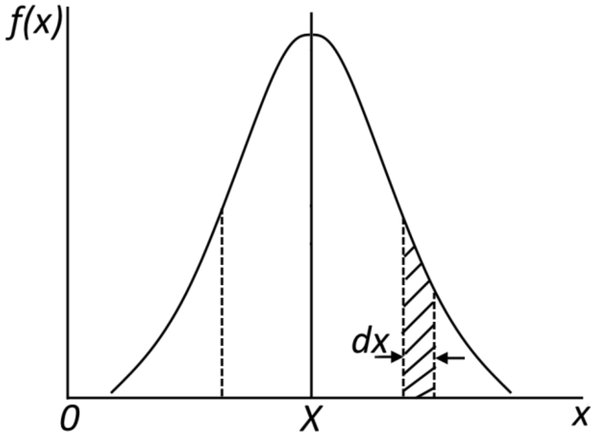

Рис. 3.4. Функция Гаусса.

В примере со стрельбой по мишени малому значению σ соответствует малое рассеяние точек попадания от центра мишени. Поэтому σ называют **дисперсией распределения погрешностей измерения**.

На рис. 3.4 выделим бесконечно малу площадь, равную $f(x)dx$ (эта площадь заштрихована). Согласно (3.8) она пропорциональна числу попадания случайной величины x_i в интервал dx и равна вероятности этого события. Площадь, ограниченная кривой $f(x)$, пропорциональна вероятности попадания случайной величины в интервал от 0 до ∞ и равна сумме элементарных площадей или интегралу

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1$$

Равенство единице этого интеграла имеет очевидный смысл: любой результат измерения окажется в данном интервале. При ограничении пределов интегрирования вероятность уменьшается.

Распределение Гаусса не является единственно возможным. Имеются и другие функции распределения, однако все они в пределе переходят в распределение Гаусса.

Наилучшей оценкой истинного значения величины X, как указано в разделе 3.1, является среднее значение по n измерениям:

$$X \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Наилучшей оценкой среднеквадратичной погрешности отдельного измерения служит формула

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

В качестве абсолютной погрешности среднего значения $\bar{x}$ принимают величину

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \qquad (3.12)$$

называемую **стандартной погрешностью среднего значения** $\bar{x}$. При $n \to \infty$ значение $S_n \to 0$. При не очень большом числе измерений для нахождения абсолютной погрешности (доверительного интервала) Δx вводят коэффициент $t(p,n)$, учитывающий число измерений и доверительную вероятность:

$$\Delta x = t(p,n)S_n \tag{3.13}$$

В этом случае распределение случайной величины, как показывает теория, не является распределением Гаусса, а определяется другого вида распределением – распределением Стьюдента. Закон изменения коэффициента Стьюдента $t(p,n)$ определяется этим распределением. Наиболее употребительные значения коэффициента Стьюдента представлены в таблице 1. Как правило, для технических измерений принимают доверительную вероятность Р = 0,95. С такой же доверительной вероятностью проводятся расчеты погрешностей многократных измерений в лабораторных работах. Распределение Стьюдента похоже на нормальное распределение Гаусса, к которому оно и стремится при $n \to \infty$, но имеет длинные «хвосты».

Таблица 1. Значения коэффициентов Стьюдента $t(p,n)$.

P / n	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
3	2,92	4,30	6,96	9,92	31,60
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,90	2,36	3,00	3,50	5,40
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
50	1,68	2,01	2,40	2,68	3,50
100	1,66	1,98	2,36	2,63	3,39

Таким образом, при ограниченном числе измерений x доверительная граница Δx определяется выражением (3.13), и окончательный результат измерений величины x представляется в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t(p,n)S_n$$

Пример. Проведем обработку результатов прямых измерений диаметра шарика с помощью микрометра по данным, приведенным в параграфе 2.

Значения d_i для 5 измерений сведем в таблицу 2.

Таблица 2. Значения прямых измерений величины d_i.

№ измерения	d_i, мм	$\left\|d_i - \overline{d}\right\|$, мм	$\left(d_i - \overline{d}\right)^2$, мм^2
1	5,27	0,02	0,0004
2	5,30	0,01	0,0001
3	5,28	0,01	0,0001
4	5,32	0,03	0,0009
5	5,28	0,01	0,0001

Порядок расчета:

1. По формуле (3.1) находим среднее арифметическое значение диаметра:

$$\overline{d} = \frac{5{,}27 + 5{,}30 + 5{,}28 + 5{,}32 + 5{,}28}{5} = 5{,}29 \text{ мм}$$

2. По выражению (3.12) находим стандартную погрешность:

$$S_n = \sqrt{\frac{4+1+1+9+1}{5 \cdot 4} \cdot 10^{-4}} = 0{,}009 \text{ мм}$$

3. По таблице 2 определяем коэффициент $t(p,n)$ и по формуле (3.13) рассчитываем значение абсолютной погрешности:

$$t(p,n) = 2{,}78$$

$$\Delta d = 2{,}78 \cdot 0{,}009 = 0{,}025 мм$$

или после округления: $\Delta d = 0{,}03 мм$.

4. Записываем результат измерений:

$$d = (5{,}29 \pm 0{,}03) мм;\ P = 0{,}95$$

Более полная запись измерений включает следующее: $n = 5$; $\overline{d} = 5{,}29 мм$; $S_n = 0{,}009 мм$; $\Delta d = \pm 0{,}03 мм$ при $P = 0{,}95$.

Полученные результаты предлагается сравнить с результатом, вычисленным по методу Корнфельда.

IV. ОЦЕНКА ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ (ПРИБОРНОЙ) ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Средства измерений

Средством измерений называют техническое устройство, используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические свойства. Важнейшими из этих средств являются меры, измерительные приборы и измерительные преобразователи.

Мерой называют средство измерений, предназначаемое для воспроизведения физической величины данного размера. Например, гири (мера массы), магазин сопротивлений.

Измерительным прибором называют средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме доступной для непосредственного восприятия наблюдателем. Например, термометр, вольтметр, измеритель парциальных давлений.

Измерительным преобразователем называют средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования и (или) хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателем. Например, делитель напряжения, термопара в цепи термоэлектрического пирометра.

Для передачи сигнала измерительной информации наблюдателю измерительные приборы снабжаются отсчетными устройствами (стрелками, шкалами, цифровыми индикаторами, самопишущими и печатающими устройствами).

Основными характеристиками шкалы отсчетного устройства измерительного прибора являются:

- отметка шкалы – знак на шкале, соответствующий некоторому значению измерительной величины;
- деление шкалы – промежуток между двумя соседними отметками шкалы;
- цена деления шкалы – разность значений величины, соответствующих двум соседним отметкам шкалы.

Чувствительность измерительного прибора характеризуют величиной, обратной цене деления его шкалы.

2. Систематические погрешности

В предыдущих разделах предполагалось, что систематические погрешности измерений отсутствует и учету подлежат только случайные погрешности. Действительно, погрешности, которые вызываются недостатками применяемого метода измерений, неточностью расчетной формулы (так называемые методические погрешности), можно заблаговременно учесть и исключить или существенно уменьшить путем совершенствования метода измерений, а также введения уточнений в расчетную формулу. Устранить полностью инструментальные (приборные) погрешности невозможно.

Инструментальные (приборные) погрешности вызываются несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительных приборов. Например, небольшое различие в длинах плеч рычажных весов, несовпадение в стрелочном приборе центра шкалы с осью вращения стрелки, изменение хода ручного секундомера при изменении температуры и т. п. Их определяют на основе паспортных данных приборов, класса точности, точности нониуса и т. д.

3. Класс точности средства измерения

Классом точности средства измерения называют его характеристику, служащую показателем установленных для него государственным стандартом пределов погрешностей и других параметров, влияющих на точность.

Применяются следующие классы точности приборов: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Обозначение класса точности выражает в процентах относительную или приведенную погрешность прибора.

Многие показывающие приборы (манометры, амперметры, вольтметры, ваттметры и др.) нормируются по приведенной погрешности, т.е. погрешности, выраженной в процентах от верхнего предела измерений (у многопредельных приборов – от верхнего предела на соответствующем диапазоне) или от длины шкалы. Приведенная погрешность используется для нормирования погрешности приборов со шкальным отсчетом, имеющих постоянную абсолютную погрешность по всей шкале прибора. Обозначение класса точности прибора записывается на его шкале в виде соответствующих цифр. Формула для расчета приборной погрешности имеет вид:

$$\Delta x_{приб} = \frac{\gamma}{100} x_{\max}, \tag{4.1}$$

где γ – класс точности прибора, $x_{\max}$ – верхний предел измерений прибора.

Измерительные приборы могут также нормироваться по относительной погрешности, т .е. погрешности, выраженной в процентах от действительного значения измеряемой величины. Относительная погрешность используется для нормирования (определения) погрешности средств измерений, у которых относительная погрешность остается постоянной во всем диапазоне измерений или зависит от значения измеряемой величины. Обозначение класса точности изображается на шкале такого прибора соответствующими цифрами, заключенными в кружок. В этом случае:

$$\Delta x_{приб} = \frac{\gamma}{100} x, \tag{4.2}$$

где x – действительное значение измеряемой величины.

4. Вычисление доверительного интервала с учетом инструментальной (приборной) погрешности измерения

При измерении физической величины показания прибора обычно округляют до ближайшего деления шкалы (иногда до половины деления). Если измерение производится так называемым техническим методом, то достаточно ограничиться двумя-тремя измерениями и не нужно проводить статистическую обработку результатов. Однако следует учесть приборную погрешность, которую находят по формуле (4.1) или (4.2) и принимают в качестве стандартной систематической погрешности.

Пример. Измерение силы тока производится амперметром класса точности 0,5 на диапазоне $I_{\max} = 1A$. Необходимо оценить стандартную систематическую погрешность.

По формуле (4.1) приборная погрешность равна

$$\Delta I_{приб} = \frac{0,5}{100} 1A = 0,005A$$

Следовательно, стандартная систематическая погрешность равна

$$S = I_{приб} = \pm 0,005A$$

Поскольку амперметр нормирован по приведенной погрешности**,** то на всем диапазоне шкалы $0...1A$ предельную приборную погрешность следует принять одинаковой и равной $\Delta I = \pm 0,005A$. Отсюда нетрудно заключить, что относительная погрешность измерения будет тем меньше, чем ближе показание амперметра к верхнему пределу измерений.

Приборная погрешность может быть указана в паспорте прибора. Она выражает максимальное значение суммарной погрешности (систематической и случайной) при доверительной вероятности, близкой к 1 (обычно принимают $P = 0,997$).

Если класс точности неизвестен и нет паспортных данных прибора, можно использовать обычно применяемое правило градуировки: приборная погрешность принимается равной половине цены деления шкалы прибора. При этом приближенно можно считать доверительную вероятность равной 0,9.

В общем случае необходимо принимать во внимание как случайные, так и систематические погрешности прямых измерений. При этом стандартная погрешность измерения физической величины x вычисляется по формуле

$$\Delta x = \sqrt{(S_n)^2 + (S_{приб})^2}\ , \tag{4.3}$$

где S_n – стандартная случайная погрешность; $S_{приб}$ – стандартная систематическая погрешность, вычисленная по формуле (4.1) или (4.2).

Если S_n и $S_{приб}$ отличаются друг от друга в два или более раз, то практически можно считать, что Δx равна большей из них.

Отсюда следует, что для повышения точности измерений нет смысла увеличивать число измерений, а целесообразнее принять меры к уменьшению систематической погрешности, например, используя прибор более высокого класса точности.

V. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Подготовка исходных данных

Пусть для косвенных измерений физической величины A используется известная функциональная зависимость A от ряда других независимых величин $x, y, z, B, C, D, ..., Q$, заданная в форме $A = f(x, y, z, B, C, D, ..., Q)$.

Среди переменных могут быть величины трех типов:

1) Величины, определяемые путем прямых измерений (например, величины x, y, z), которые после проведения этих измерений представляются в стандартной форме:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x; \qquad y = \overline{y} \pm \Delta y; \qquad z = \overline{z} \pm \Delta z$$

2) Данные установки (например, величины *B* и *C*), т. е. характеристики экспериментальной установки, известные из предыдущих (тарировочных) измерений. Эти величины также должны быть заданы в аналогичной форме:

$$B = \overline{B} \pm \Delta B; \qquad C = \overline{C} \pm \Delta C$$

В противном случае считают, что погрешность равна единице последней значащей цифры (см. раздел II).

3) Табличные величины (например, величина *D*) – величины, которые в данном опыте не измеряются, а берутся из таблиц. Табличная величина может быть константой (например, $D = \pi$). В этом случае ее нужно брать с такой точностью, чтобы относительная погрешность ее была значительно меньше относительных погрешностей всех остальных величин, входящих в функциональное выражение величины *A*. Если же *D* – заданная в табличной форме функция непосредственно измеряемой величины, то ее также нужно представить в стандартной форме:

$$D = \overline{D} \pm \Delta D$$

Наилучшим значением величины *A* при косвенном ее измерении будет

$$A = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, ..., \overline{Q}) \qquad (5.1)$$

2. Правила расчета погрешностей косвенных измерений

При вычислении погрешностей косвенных измерений:

1) как показывает теория, складываются не модули, а квадраты погрешностей, обусловленные независимыми источниками;

2) погрешности, даваемые различными источниками, необходимо вычислить раздельно и обязательно учитывать максимальный вклад в погрешность окончательного результата; рекомендуется отбрасывать те погрешности, которые хотя бы вдвое меньше максимальной.

1. Для нахождения погрешности величины A используется связь дифференциала функции с бесконечно малыми изменениями аргументов:

$$dA = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial Q}dQ,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial Q}$ – частные производные функции (5.1) по переменным $x, y, \ldots, Q$.

Стандартная погрешность величины A вычисляется по формуле

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\right)^2 \Delta Q^2} \qquad (5.2)$$

Относительная погрешность:

$$\frac{\Delta A}{\overline{A}} = \frac{df(x, y, \ldots, Q)}{f(\overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{Q})} = d\left[\ln f(x, y, \ldots, Q)\right]$$

Окончательно для вычисления относительной погрешности величины $A = f(x, y, \ldots, Q)$ получается соотношение:

$$\frac{\Delta A}{\overline{A}} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln f\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\ln f\right)^2 \Delta y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial Q}\ln f\right)^2 \Delta Q^2} \qquad (5.3)$$

Таким образом, последовательность операций по вычислению погрешности косвенных измерений представляются следующей.

Способ 1:

1) Производят обработку результатов прямых измерений. При этом для всех измеряемых величин задается одно и то же значение доверительной вероятности P. Находят среднее значение A по формуле (5.1).

2) Логарифмируют функцию $A = f(x, y, \ldots, Q)$.

3) Находят частные производные $\frac{\partial}{\partial x}\ln f; \frac{\partial}{\partial y}\ln f; \ldots; \frac{\partial}{\partial Q}\ln f$.

4) Подставляют полученные значения в выражение (5.3) и находят ΔA.

5) Записывают результат в стандартной форме: $A = \overline{A} \pm \Delta A; P$.

Способ 2:

1) Производят обработку результатов прямых измерений. При этом для всех измеряемых величин задается одно и то же значение доверительной вероятности *P*. Находят среднее значение *A* по формуле (5.1).

2) Находят частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial Q}$.

3) По формуле (5.2) находят ΔA.

4) Записывают результат в стандартной форме: $A = \overline{A} \pm \Delta A; P$.

Пример. Определить объем цилиндра по результатам прямых измерений его диаметра $d = (3,46 \pm 0,04)\text{см}$ и высоты $h = (4,87 \pm 0,05)\text{см}$.

Воспользуемся первым способом обработки результатов измерений.

Наиболее точное значение объема цилиндра определяется по формуле

$$V = \frac{1}{4}\pi \overline{d}^2 \overline{h}$$

Прежде чем приступить к вычислению, необходимо выяснить, с какой точностью надо взять из таблицы значения числа π, чтобы погрешность этой постоянной не повлияла на точность определения объема цилиндра. Максимальную относительную погрешность дают измерения диаметра: $\frac{\Delta d}{d} = 0,012$. Следовательно, число десятичных знаков в значении π надо взять таким, чтобы $\frac{\Delta \pi}{\pi} < 0,012$. Для этого достаточно ограничиться значением $\pi = 3,14$. Тогда

$$\frac{0,001593}{3,14} < 0,012$$

1. Находим среднее значение объема по формуле (5.1):

$$\overline{V} = \frac{1}{4} \cdot 3,14(3,46 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 4,87 \cdot 10^{-2}\,\text{м}^3 = 45,77 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^3$$

2. Логарифмируем формулу объема цилиндра:

$$\ln V = \ln \pi + 2\ln \overline{d} + \ln \overline{h}$$

3. Находим частные производные и подставляем в формулу (5.3):

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 (\Delta\pi)^2 + \left(\frac{4}{\bar{d}}\right)^2 (\Delta d)^2 + \left(\frac{1}{\bar{h}}\right)^2 (\Delta h)^2}$$

Отсюда получаем

$$\Delta V = \bar{V}\sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2}$$

$$\Delta V = 45,8\cdot 10^{-6}\sqrt{6,40\cdot 10^{-4}}\,м^3 = 1,16\cdot 10^{-6}\,м^3$$

Окончательный результат:

$$V = (45,8 \pm 1,2)\cdot 10^{-6}\,м^3;\, P = 0,95$$

VI. ОФОРМЛЕНИЕ ТАБЛИЦ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

1. Оформление таблиц

Результаты всех измерений, данные экспериментальной установки и условия проведения опытов записываются в лабораторном журнале во время выполнения работы, а затем и в отчете. Результаты работы желательно представлять в виде таблиц и графиков.

К оформлению таблиц предъявляются следующие требования.

1) Каждая таблица должна иметь номер и название.

2) Перед изготовлением таблицы определяется число всех строк и столбцов и их относительные размеры.

3) Чертить таблицы нужно с помощью линейки; для изображения линий желательно использовать один цвет, для написания цифр и букв – другой.

4) Каждая строка или столбец таблицы должны иметь свое название, обозначение величины и ее единицы измерения.

5) В первые строки (столбцы) таблиц рекомендуется записывать величины, использующиеся в качестве аргументов, впоследствии выполняющие роль функций.

6) Последние строки или столбцы обычно предназначаются для записи средних значений величин и их погрешностей.

7) Каждое исправление данных таблиц в лабораторном журнале должно поясняться.

8) Все результаты таблиц и графики в отчете должны подтверждаться соответствующими расчетами в лабораторном журнале.

2. Построение графиков

При оформлении графиков, наглядно иллюстрирующих зависимости одних величин от других, необходимо выполнять следующие правила.

1) Графики строятся на миллиметровой бумаге или, как исключение, на бумаге в клетку, вклеиваются в лабораторный журнал или тетрадь для отчетов.

2) Масштаб откладываемых по оси координат делений выбирается таким, чтобы график изображаемой зависимости охватывал все поле чертежа.

3) Графики обычно строят в декартовых координатах.

4) Откладываемые по осям отрезки и их метки целесообразно выбирать кратными целым или четным числам.

5) Метки на осях координат наносятся со стороны поля графика; цифровые обозначения проставляются только для крупных единиц масштаба и соответствующие им метки делаются несколько длиннее.

6) У осей координат обязательно указываются обозначения величин и их единиц.

7) Экспериментальные значения величин наносятся точками, кружками, крестиками и т. п. Погрешности измерений изображаются на графиках в виде отрезков длиной в доверительный интервал. В середине отрезков располагаются экспериментальные точки. Эти отрезки располагаются параллельно соответствующей оси (рис. 6.1).

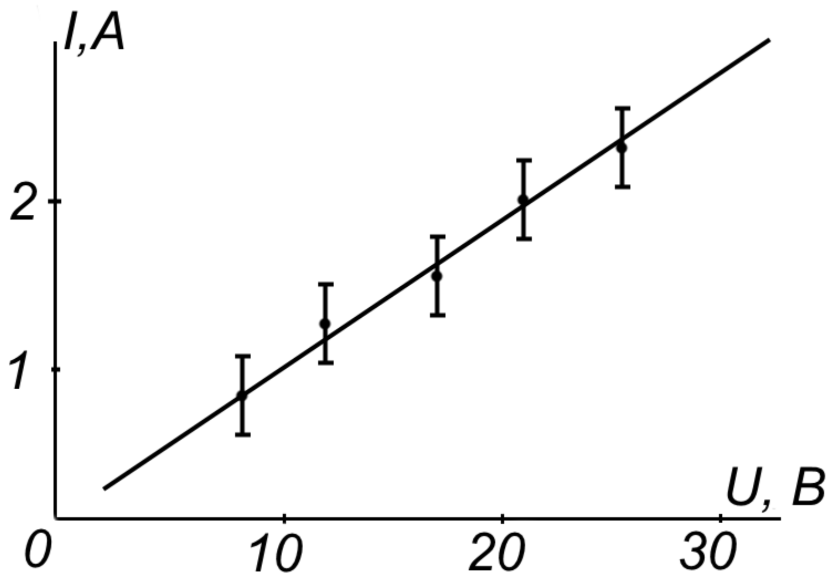

Рис. 6.1. Пример построения графика по экспериментальным точкам.

8) При проведении экспериментальной кривой точки соединяются плавно таким образом, чтобы их число по ту и другую стороны от кривой осталось примерно одинаковым. Для более точного проведения кривой используют метод наибольших квадратов.

9) Если на графике изображается теоретическая кривая, то рядом с ней указывается формула, по которой она рассчитывается.

10) При изображении нескольких кривых на одном поле графика каждая из них номеруется, и даются соответствующие пояснения. При необходимости для каждой кривой проводятся параллельные оси координат или наносятся легко различимые метки масштаба на одной оси.

Пример. Для определения температуры катода простейшей электронной лампы-диода можно воспользоваться линейной зависимостью

$$\ln J_a = -\frac{e}{kT}\Delta\varphi + \ln J_0,$$

где J_a – сила анодного тока, $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между анодом и катодом, e – заряд электрона, k – постоянная Больцмана, T – температура катода, J_0 – некоторая постоянная. Эта зависимость является уравнением вида:

$$J = ax + b,$$

где $J = \ln J_a$, $x = \Delta\varphi$, $a = -\frac{e}{kT}$, $b = \ln J_0$.

Зная несколько пар значений x и y, можно построить эту зависимость и по графику найти значение T.

Допустим, в ходе эксперимента были получены значения $\Delta\varphi$ и $\ln J_a$, представленные в таблице 3.

Таблица 3. Значения величин $\Delta\varphi$ и $\ln J_a$

$\ln J_a$	-3,92	-3,60	-2,91	-2,74	-2,53	-2,36	-2,11
$\Delta\varphi\cdot 10^3, B$	405	337	233	224	179	137	78

Построим экспериментальные точки в координатной плоскости (рис. 6.2):

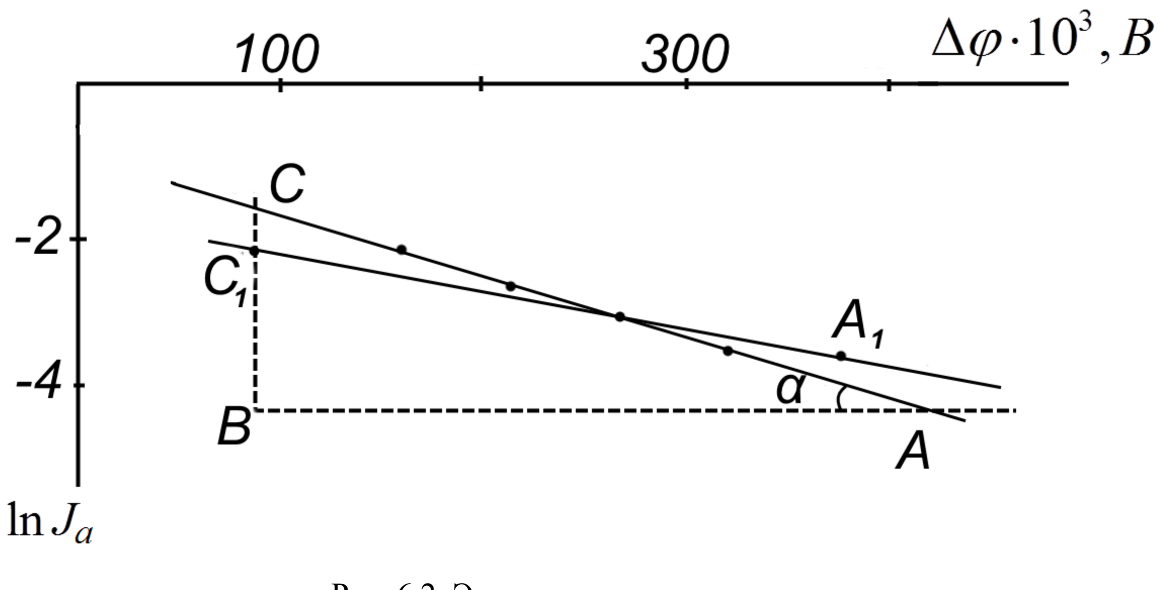

Рис. 6.2. Экспериментальные точки.

Через полученные точки можно провести несколько прямых, например, AC, A_1C_1 и т.д., которым будут соответствовать разные линейные уравнения и, следовательно, разные значения температур.

Так, для прямой AC получим

$$a = -\frac{e}{kT} = tg\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{-4{,}25-(-2{,}10)}{(440-80)\cdot 10^{-3}} = -5{,}97$$

$$T = -\frac{e}{ak} = 1{,}94\cdot 10^{3}\,K$$

Аналогично для прямой A_1C_1 имеем

$$a_1 = -7{,}35; \qquad T_1 = 1{,}58\cdot 10^{3}\,K$$

Какая же из построенных прямых будет наиболее правильной? На практике обычно прямую проводят таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от прямой была минимальной. Такую прямую считают наилучшей. Более точно ответить на поставленный вопрос позволяет использование метода наименьших квадратов.

3. Понятие о методе наименьших квадратов (МНК)

Надежным и научно обоснованным способом определения коэффициентов экспериментальных зависимостей является метод наименьших квадратов. Суть его заключается в подборе таких значений коэффициентов, при которых сумма квадратов отклонений измеренных в опытах значений y_i от рассчитанных была бы минимальной. МНК позволяет не только найти коэффициенты функциональной зависимости, но и провести оценку погрешностей найденных коэффициентов.

Рассмотрим применение МНК для построения наилучшей прямой.

Пусть измеряемые величины x и y связаны линейной зависимостью

$$y = ax + b,$$

где a и b – неизвестные параметры.

Эту функциональную зависимость можно представить графически, если известно несколько пар значений x_i и y_i. Вследствие того, что x_i и y_i измерены с некоторой погрешностью, они не ложатся на одну прямую (рис. 6.2).

Между экспериментальными точками можно провести множество различных прямых. Наша задача заключается в том, чтобы прямую провести наилучшим образом. В математической статистике показывается, что наилучшей прямой будет та, для которой сумма квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta y_i\right)^2$ будет минимальной.

Согласно методу наименьших квадратов наиболее точные значения параметров a и b определяются выражениями

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\lambda}{\Delta} \tag{6.1}$$

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{6.2}$$

Погрешность в определении параметров a и b определяют по формулам

$$\Delta a = t(p,n)\sqrt{\frac{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 - a\lambda}{\Delta(2n)}} \tag{6.3}$$

$$\Delta b = \Delta a\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \tag{6.4}$$

Когда вид функции $y = f(x)$ неизвестен, этот метод нужно применять крайне осторожно, иначе можно получить совершенно нелепые результаты, особенно в случае быстроменяющихся функций.

Пример. Воспользуемся МНК для решения предыдущей задачи по определению температуры катода. Для нахождения параметров a и b по уравнениям (6.1) и (6.2) составим таблицу 4.

Таблица 4. Результаты промежуточного вычисления для определения параметров a и b.

n	y_i	$x_i \cdot 10^3$	$x_i^2 \cdot 10^6$	$x_i y_i \cdot 10^3$	y_i^2
1	-3,92	405	164025	-1567,6	15,37
2	-3,60	337	113569	-1213,2	12,96
3	-2,91	233	54289	-679,0	8,47
4	-2,74	224	50176	-613,8	7,51
5	-2,53	179	32041	-452,9	6,40
6	-2,36	137	18769	-323,3	5,57
7	-2,11	78	6084	-164,6	4,45
Σ	-20,17	1593	438953	-5034	60,73

Отсюда, согласно выражениям (6.1), (6.2):

$$a = \frac{7 \cdot \left(-5034 \cdot 10^{-3}\right) - \left(-32130 \cdot 10^{-3}\right)}{7 \cdot 438953 \cdot 10^{-6} - 2537649 \cdot 10^{-6}} = -5,80$$

$$b = \frac{438953 \cdot 10^{-6} \cdot 60,73 - 1593 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-5034 \cdot 10^{-3}\right)}{7 \cdot 438953 \cdot 10^{-6} - 2537649 \cdot 10^{-6}} = -1,56$$

Следовательно, уравнения прямой, полученной по МНК, будет иметь вид:

$$y = -5,80x - 1,56$$

ЛИТЕРАТУРА

1. РМГ 29-2013 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. - М.: Стандартинформ, 2014. - 56 с.

2. СТ. СЭВ 543-77. Числа. Правила записи и округления. – М.: Изд-во стандартов, 1978.

3. Зайдель А.Н. Погрешности измерения физических величин. – СПб: Наука, 1985. – 112 с.

4. Монсик В. Б., Скрынников А. А. Вероятность и статистика: учебное пособие. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. - 381 с.

5. Светозаров В.В. Элементарная обработка результатов измерений: учебное пособие. – М.: Изд-во МИФИ, 1983. – 52 с.

6. Стоцкий Л.Р. Физические величины и их единицы: Справочник. – М.: Просвещение, 1984. -239 с.

7. Яворский В.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. Изд-во 2-е, переработанное, - М.: Наука 1985. – 512 с.

8. Курепин В. В., Баранов И. В. Обработка экспериментальных данных: методические указания. - СПб.: СПбГУНиПТ, 2003. – 57 с.

Борис Владимирович ГРИГОРЬЕВ
Сергей Геннадьевич НИКУЛИН
Евгений Вячеславович ЗАЙЦЕВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для студентов
естественно-научных направлений

Подписано в печать __________ г. Тираж _____ экз
Объем _____ усл. печ. л. Формат 60х84/16. Заказ № _____.
Издательство Тюменского государственного университета
625003, г. Тюмень, ул. Семакова, 10