

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Романчук Иван Сергеевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 21.12.2022 10:38:13

Уникальный программный ключ:

6319edc2b582ffdacea443f01d5779368d0957ac34f5cc074d81131530452479

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра моделирования физических процессов и систем

А.Я. Гильманов, Т.Н. Ковальчук, А.П. Шевелёв

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Учебно-методическое пособие

для студентов направления

«Техническая физика: Физика недр (магистратура)»

Тюмень

Издательство

Вектор Бук

2021

УДК 532.546.2  
ББК 22.253.3  
Г47

**А.Я. Гильманов, Т.Н. Ковальчук, А.П. Шевелёв.**  
**Неизотермическая многокомпонентная фильтрация.** Учебно-методическое пособие для студентов направления «Техническая физика: Физика недр (магистратура)». Тюмень: Издательство Вектор Бук, 2021. 200 с.

Учебно-методическое пособие содержит теоретический материал и набор заданий для лекционных и практических занятий по дисциплине «Неизотермическая многокомпонентная фильтрация» для студентов 1 курса магистратуры «Техническая физика: Физика недр». Пособие освещает наиболее значимые и практически применяемые разделы многокомпонентной фильтрации и содержит задачи для закрепления рассмотренной темы. Приведённые задачи требуют как аналитического решения, так и численного, что показывает взаимосвязь этих методов.

Учебная программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ: Неизотермическая многокомпонентная фильтрация. Режим доступа: <https://www.utmn.ru/sveden/education/eduOp/>, свободный.

Рекомендовано к изданию кафедрой моделирования физических процессов и систем.

© ФГАОУ ВО Тюменский государственный университет, 2021

© Гильманов А.Я., Ковальчук Т.Н., Шевелёв А.П., 2021

Александр Янович Гильманов  
Татьяна Николаевна Ковальчук  
Александр Павлович Шевелёв

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Учебно-методическое пособие  
для студентов направления  
«Техническая физика: Физика недр (магистратура)»

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	7
1. Основные понятия и уравнения многофазной фильтрации.....	7
2. Потенциальное движение газированной жидкости .....	14
3. Практическое задание .....	16
ГЛАВА 1. ЗАДАЧА БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА.....	17
1.1. Задача Баклея-Левретта .....	17
1.2. Аналитический и автомоделный методы решения задачи Баклея-Левретта .....	22
1.3. Графический метод решения задачи Баклея-Левретта .....	26
1.4. Численные методы решения задачи Баклея-Левретта. Метод Эйлера .....	33
1.5. Численные методы решения задачи Баклея-Левретта. Метод Лакса-Вендроффа .....	39
1.6. Практическая работа .....	44
ГЛАВА 2. ЗАДАЧА РАПОПОРТА-ЛИСА .....	46
2.1. Задача Рапопорта-Лиса.....	46
2.2. Численные методы решения задачи Рапопорта-Лиса. Метод Эйлера .....	48
2.3. Численные методы решения задачи Рапопорта-Лиса. Метод Лакса-Вендроффа.....	49
2.4. Концевые эффекты в задаче Рапопорта-Лиса.....	51
2.5. Капиллярная пропитка.....	53
2.6. Практическая работа .....	57
ГЛАВА 3. МНОГОФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ .....	58
3.1. Обобщённый закон Дарси для трёхфазной фильтрации .....	58
3.2. Модель Маскета-Миреса .....	62
3.3. Функция Христиановича .....	64
3.4. Фильтрация многокомпонентных смесей с учётом фазовых переходов .....	66
3.5. Практические задачи .....	71
ГЛАВА 4. МНОГОФАЗНАЯ СИСТЕМА В СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ ..	80
4.1. Равновесие многофазной системы.....	80
4.2. Различные уравнения состояния. Фугитивность. Коэффициент фугитивности .....	85
4.3. Практическая работа .....	95
ГЛАВА 5. НЕРАВНОВЕСНАЯ ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ.....	96
5.1. Неравновесность распределения фаз в пористой среде. Неравновесная двухфазная фильтрация .....	96
5.2. Стабилизированная зона при неравновесной фильтрации .....	99
5.3. Практические задачи .....	103
ГЛАВА 6. МОДЕЛИ ФИЛЬТРУЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ .....	104
6.1. Реологические модели фильтрующихся жидкостей.....	104

6.2. Уравнение пьезопроводности .....	107
6.3. Метод Монте-Карло для решения уравнения пьезопроводности. ....	110
6.4. Законы фильтрации неньютоновских жидкостей. Одномерные задачи фильтрации вязкопластичной жидкости.....	112
6.5. Двухфазное течение неньютоновской жидкости.....	118
6.6. Фронтальное вытеснение неньютоновской жидкости.....	119
6.7. Предельная нефтеотдача. Целики остаточной нефти .....	123
6.7.1. Формы существования остаточной нефти в пласте .....	123
6.7.2. Силы, удерживающие остаточную нефть. Причины существования остаточной нефти в пласте .....	125
6.7.3. Механизм вытеснения нефти водой .....	129
6.7.4. Распределение остаточной нефти в пласте .....	130
6.7.5. Условия эффективного применения методов увеличения нефтеотдачи.....	133
6.7.6. Целики остаточной нефти .....	134
6.8. Целики в однородном пласте.....	136
6.9. Практическая работа .....	139
<b>ГЛАВА 7. ЯВНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ.....</b>	<b>140</b>
7.1. Явная конечно-разностная схема для решения уравнения пьезопроводности .....	140
7.2. Порядок аппроксимации, устойчивость и сходимостъ явной схемы для уравнения пьезопроводности .....	144
7.3. Практическая работа .....	148
<b>ГЛАВА 8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПЛАСТЕ .....</b>	<b>149</b>
8.1. Уравнение теплопроводности. Распределение температуры в пласте в зависимости от расстояния до нагнетательной скважины .....	149
8.2. Явная конечно-разностная схема для решения уравнения теплопроводности .....	153
8.3. Неявная конечно-разностная схема для решения уравнения теплопроводности .....	155
8.4. Порядок аппроксимации, устойчивость и сходимостъ неявной схемы для уравнения теплопроводности .....	159
8.5. Практическая работа .....	161
<b>ГЛАВА 9. ПРОЦЕССЫ В ПЛАСТЕ ПРИ НАЛИЧИИ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ .....</b>	<b>163</b>
9.1. Процессы массопереноса в пористой среде при наличии активной примеси.....	163
9.2. Процессы теплопереноса в пористой среде при наличии активной примеси.....	165
9.3. Уравнение баланса активной примеси в многофазном случае ....	166
9.4. Фронтальное вытеснение нефти раствором активной примеси. Автомодельные решения .....	167

9.5. Графическая интерпретация процесса вытеснения нефти раствором активной примеси .....	170
9.6. Вытеснение оторочкой активной примеси.....	176
9.7. Практические задачи .....	178
ГЛАВА 10. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДА .....	187
10.1. Общие положения теории функций комплексного переменного (ТФКП). Уравнения Коши-Римана .....	187
10.2. Характеристическая функция, эквипотенциальные линии и функция тока .....	188
10.3. Порядок исследования плоского течения с помощью ТФКП.....	189
10.4. Определение массовой скорости.....	190
10.5. Характеристическая функция течения при совместном действии источника и стока .....	191
10.6. Время движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока .....	192
10.7. Практические задачи .....	194
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	199

## ВВЕДЕНИЕ

### 1. Основные понятия и уравнения многофазной фильтрации

При разработке нефтяных и газовых месторождений большую роль играет приток флюида к скважине, следовательно, и теория фильтрации. Однако в самом простом виде она была получена для однофазной среды, когда в пласте, например, имеется только нефть. В реальности там могут находиться сразу несколько фаз: нефть, вода, газ. Поэтому большую роль играет теория многофазной фильтрации.

Следует различать приведённые ниже понятия.

**Компонент** – индивидуальное с химической точки зрения вещество системы.

**Фаза** – часть системы, ограниченная поверхностью раздела, при переходе через которую свойства системы меняются скачкообразно.

**Агрегатное состояние** – физическое состояние вещества, зависящее от комбинации температуры и давления, характеризующее способность или не способность тел сохранять форму, объём, наличие или отсутствие ближнего и дальнего порядка и ряд других свойств. Выделяют 4 агрегатных состояния вещества: газ, жидкость, твёрдое тело и плазма.

Все углеводородные системы можно разделить на гомогенные и гетерогенные [2] (рис. 1).



Рис. 1. Гомогенные и гетерогенные углеводородные системы.

Необходимо ввести важнейшие характеристики многофазной среды.

**Насыщенностью**  $S_i$  порового пространства  $i$ -й фазой называется отношение объёма  $V_i$ , занятого этой фазой, к объёму пор  $V_n$ , причём сумма насыщенностей всех  $n$  фаз равна 1, так как сумма объёмов, занятых разными фазами, равняется объёму пор [5]:

$$S_i = \frac{V_i}{V_n}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n S_i = 1. \quad (2)$$

**Скорость  $i$ -той фазы**  $u_i$  – отношение объёмного расхода данной фазы  $Q_i$  к площади  $\Omega_i$ , перпендикулярной к направлению течения этой фазы:

$$u_i = \frac{Q_i}{\Omega_i}. \quad (3)$$

Принимается основное допущение, что каждая фаза движется под действием своего давления  $p_i$ . Тогда закон фильтрации для каждой из фаз (закон Дарси для  $i$ -той фазы)



$$\vec{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} k_i(S) (\text{grad} p_i - \rho_i \vec{g}), \quad (4)$$

где  $k$  – абсолютная проницаемость (называется также проницаемостью и характеризует способность пористой среды пропускать через себя флюид при однофазной фильтрации),  $\mu_i$ ,  $k_i$ ,  $\rho_i$  – соответственно вязкость, относительная фазовая проницаемость (ОФП) и плотность  $i$ -той фазы,  $g$  – ускорение свободного падения.

**Фазовая проницаемость** – проницаемость пористой среды для данной жидкости или газа в присутствии другой фазы (нефть-вода, нефть-газ, газ-вода, либо в более сложном многофазном случае), измеряется в  $\text{м}^2$ .

**Относительная фазовая проницаемость**  $k_i$  или  $f_i$  – это отношение фазовой проницаемости к абсолютной проницаемости, безразмерная величина.

Как правило, для двухфазных систем в качестве  $S$  берут насыщенность более подвижной фазы (в системе нефть-вода ей, как правило, является вода), другую насыщенность легко вычислить из (2).

Другие важные допущения для классической теории фильтрации:

1. Каждая из фаз находится в состоянии термодинамического равновесия.
2. Процессы однонаправленные.

При рассмотрении совместной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей приходится различать вытесняющую и вытесняемые фазы, так как относительные проницаемости различны в зависимости от того, какая из фаз (более или менее смачиваемая) первоначально заполняла пористую среду, то есть существует гистерезис относительных проницаемостей из-за различной смачиваемости.

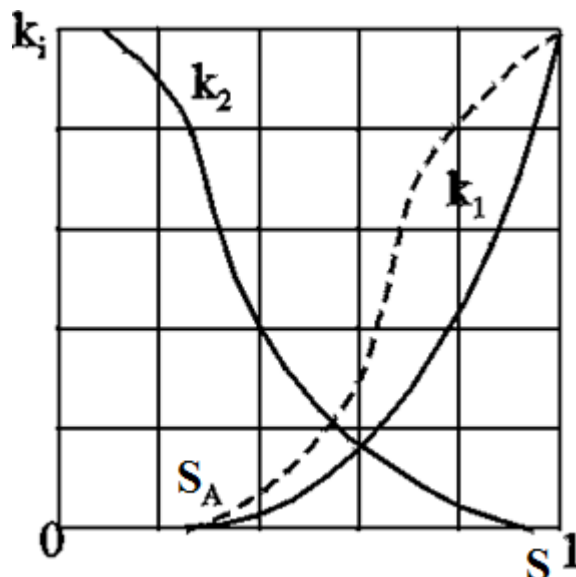


Рис. 2. Кривые ОФП [5].

Пусть  $S_A$  – остаточная насыщенность из-за наличия связанной фазы, например, связанной воды (связанная водонасыщенность), которую невозможно извлечь или переместить, ниже этого значения насыщенность недостижима.

Характерная несимметричная форма кривых относительной проницаемости (рис. 2) объясняется тем, что при одной и той же насыщенности при невысоких её значениях более смачивающая фаза занимает преимущественно мелкие поры и относительная проницаемость у неё меньше. При этом, если увеличивать  $S$  от  $S_A$ , то изменение ОФП этой фазы  $k_1$  будет происходить по линии, выделенной жирным на рис. 2, при уменьшении  $S$  (смена вытесняющей и вытесняемой фаз) ОФП будет меняться другим образом (пунктирная линия на рис. 2), то есть наблюдается гистерезис из-за различной смачиваемости. ОФП другой фазы  $k_2$ , например, нефти, тогда уменьшается с ростом  $S$  и достигает нулевого значения вблизи остаточной насыщенности данной фазы, близкой на рис. 2 к 0, поскольку с учётом (2) насыщенность другой фазы  $S$  тогда близка к 1. В реальности значения остаточной насыщенности могут сильно

отличаться от 0. Величины остаточной нефтенасыщенности и связанной водонасыщенности могут зависеть от структуры порового пространства, капиллярных эффектов и многих других причин.

Сумма относительных проницаемостей для каждого фиксированного значения  $S$  всегда меньше 1:  $k_1(S)+k_2(S)<1$ .

Присутствие связанной смачивающей фазы (например, воды) мало влияет на течение несмачивающей жидкости, тогда как присутствие остаточной несмачивающей фазы значительно "стесняет" движение смачивающей фазы.

Характер зависимостей определяется различной степенью смачивания твёрдых зерен породы фазами, причём относительная проницаемость наиболее проницаемой фазы – воды зависит только от водонасыщенности, и почти не зависит от нефте- и газонасыщенности в трёхфазном случае.

Относительная фазовая проницаемость в многофазном потоке почти не зависит от вязкости жидкости, её плотности, внутрижидкостного натяжения, градиента давления, скорости.

Для зависимости ОФП от водонасыщенности существует множество теоретических и эмпирических корреляций.

Для определения преобладающих потоков используют специальные **треугольные диаграммы Гиббса-Розебома** (рис. 3), на сторонах которых отложены насыщенности, образующие замкнутый цикл по часовой стрелке. Видно, что область трёхфазной фильтрации мала.

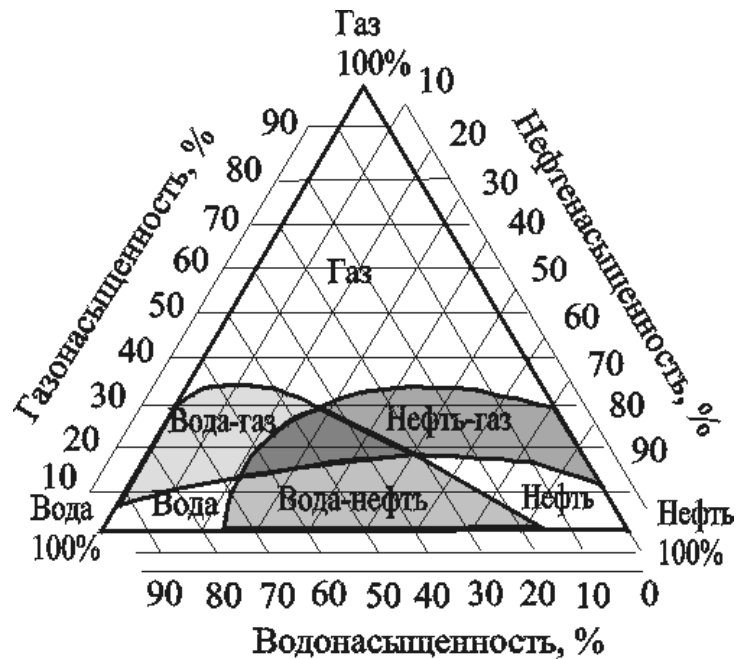


Рис. 3. Диаграмма насыщенностей трёхфазной системы [5].

**Капиллярное давление** – разность давлений двух фаз:  $p_k = p_2 - p_1$ , где  $p_1$  и  $p_2$  – давление в первой и второй фазах, причём большее давление – на стороне жидкости, не смачивающей твёрдые зерна породы. При этом

$$p_k(S) = \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(S), \quad (5)$$

где  $\sigma$  – коэффициент межфазного поверхностного натяжения;  $\theta$  – статический краевой угол смачивания между жидкостями и породой;  $m$  – пористость (отношение объёма пор к общему объёму пласта);  $J(S)$  – безразмерная функция Лавретта (рис. 4). На этом графике 1 – кривая вытеснения (дренирования), 2 – кривая пропитки, то есть снова наблюдается гистерезис (аналогично кривым ОФП),  $A$  – остаточная насыщенность вытесняемой жидкости, равная  $A = 1 - S^*$ , где  $S^*$  – максимальная насыщенность вытесняющей жидкости,  $S^*$  – остаточная насыщенность вытесняющей жидкости.

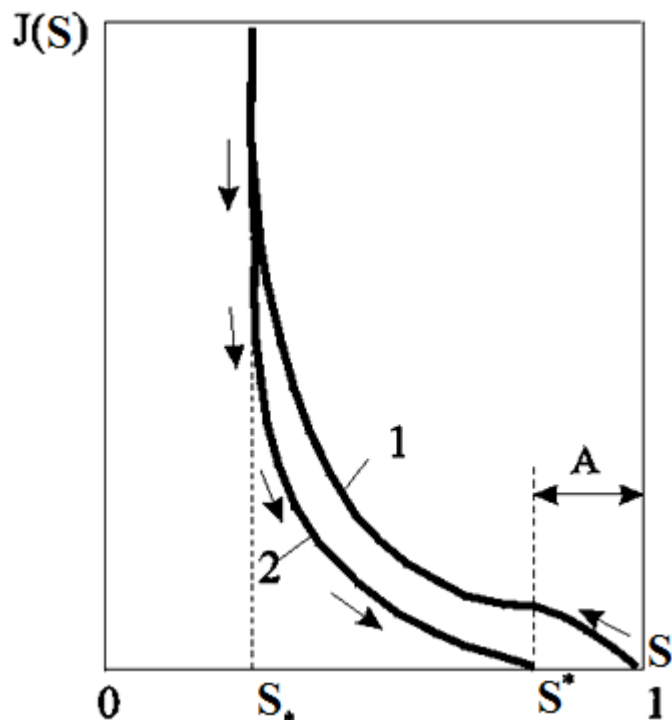


Рис. 4. Зависимость функции Леверетта от насыщенности [5].

Процессы многофазной фильтрации зависят от:

- 1) размеров области течения;
- 2) характерного времени фильтрационного процесса.

Если размеры области малы, то при достаточно малых скоростях фильтрации капиллярные силы могут превзойти внешний перепад давления.

Если рассматривается движение в очень большой области (например, в целой нефтяной или газовой залежи), то влияние капиллярных сил на распределение давления незначительно и их действие проявляется в локальных процессах перераспределения фаз.

Для расчётов двухфазной фильтрации необходимо использовать уравнения неразрывности при отсутствии фазовых переходов (индекс 1 обозначает воду, 2 – нефть, вода не превращается в нефть):

$$\frac{\partial(m\rho_1 S)}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \vec{u}_1) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(m\rho_2(1-S))}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2\vec{u}_2) = 0, \quad (7)$$

где  $t$  – время.

Уравнения (6) и (7) можно упростить при следующих допущениях:

- Жидкости несжимаемы – нестационарные процессы упругого перераспределения давления заканчиваются в начале процесса вытеснения, плотности постоянны.
- Среда недеформируема, пористость постоянна.

Тогда (6) и (7) можно переписать после деления уравнений на соответствующие плотности, а также с учётом правила дифференцирования разности в (7) так:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0, \quad (8)$$

$$-m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0. \quad (9)$$

## 2. Потенциальное движение газированной жидкости

**Газированная жидкость** – смесь жидкой и газовой фаз. Необходимое условие существования – давление меньше давления насыщения.

При увеличении содержания свободного газа фазовая проницаемость для газа растёт, а фазовая проницаемость для жидкой фазы уменьшается.

Используется многофазная модель течения для расчётов. Течение считается одномерным радиальным вдоль радиуса  $r$ . Тогда для массовых расходов необходимо использовать следующие уравнения, полученные из закона Дарси:

$$\frac{G_{\text{ж}}}{Ar^j} = \psi_{\text{ж}}(p) \frac{dp}{dr}, \quad (10)$$

$$\frac{G_{\text{гс}}}{Ar^j} = \psi_{\text{г}}(p) \frac{dp}{dr}, \quad (11)$$

$$\frac{G_{\text{ГР}}}{Ar^j} = \psi_{\text{ж}}(p) \frac{dp}{dr} \sigma_{\text{М}}(p), \quad (12)$$

$$\psi_i(p) = \frac{k_i \rho_i(p)}{\mu_i}, \quad (13)$$

$$\sigma_{\text{М}}(p) = \frac{G_{\text{ГР}}}{G_{\text{ж}}}, \quad (14)$$

где  $G_{\text{ж}}$ ,  $G_{\text{гс}}$ ,  $G_{\text{гр}}$  – массовые расходы соответственно жидкости, свободного и растворённого газов,  $A$  – коэффициент, зависящий от площади притока для разного типа течения,  $j$  – показатель формы потока, зависящий от типа течения,  $\psi_i(p)$  – некоторая функция, зависящая от давления и определяемая выражением (13), где  $i=\text{ж, г}$  (жидкость и газ соответственно),  $\sigma_{\text{М}}(p)$  – массовая растворимость газа в жидкости, т. е. количество массы газа, растворённого в единице массы жидкости при давлении  $p$ .

При этом:

1. Для плоскопараллельного течения  $j=0$ ,  $A=Bh$ , где  $B$  – ширина галереи скважин,  $h$  – мощность пласта.
2. Для плоскорадиального течения  $j=1$ ,  $A=2\pi h$ .
3. Для радиально-сферического течения  $j=2$ ,  $A=2\pi$ .

Соотношение для массового расхода всего газа  $G_{\text{г}}$  можно получить при учёте (10), (11) и (12):

$$\frac{G_{\text{г}}}{Ar^j} = \frac{G_{\text{гс}} + G_{\text{гр}}}{Ar^j} = \psi_{\text{г}}(p) \frac{dp}{dr} + \frac{G_{\text{ж}}}{Ar^j} \sigma_{\text{М}}(p). \quad (15)$$

Необходимо ввести следующее понятие. Объёмный газовый фактор  $\Gamma$  представляет собой отношение объёмного газового дебита  $Q_{\text{г}}$ , приведённого к давлению 1 атм, к объёмному дебиту жидкого компонента  $Q_{\text{ж}}$ , приведённому к тем же условиям (так как объёмные расходы зависят от давления, а массовые – постоянны):

$$\Gamma = \frac{Q_{\text{г}}}{Q_{\text{ж}}} = \frac{\rho_{\text{ж0}} \psi_{\text{г}}(p)}{\rho_{\text{г0}} \psi_{\text{ж}}(p)} + \sigma(p), \quad (16)$$

где  $\rho_{ж0}$  и  $\rho_{г0}$  – значения плотности жидкости и газа соответственно при давлении 1 атм, а объёмная растворимость газа в жидкости вычисляется по формуле

$$\sigma(p) = \frac{\rho_{ж0}}{\rho_{г0}} \sigma_M(p). \quad (17)$$

Объёмные дебиты связаны с массовыми так ( $i=ж, г$ ):

$$Q_i = \frac{G_i}{\rho_{i0}}. \quad (18)$$

По закону Генри объёмная растворимость газа в жидкости пропорциональна давлению  $\sigma(p) = \alpha p$ , где  $\alpha$  – объёмный коэффициент растворимости, постоянный для выбранных газа и жидкости.

### Вопросы для самопроверки:

1. Чем отличается компонент от фазы? Вода и лёд – это многокомпонентная или многофазная система?
2. Чем гомогенные системы отличаются от гетерогенных?
3. Что такое насыщенность? Почему сумма насыщенностей всех фаз равна 1?
4. От чего зависят относительные фазовые проницаемости?
5. Какова связь капиллярного давления с функцией Леверетта?
6. Каковы основные допущения для получения уравнений двухфазной фильтрации?
7. Что такое газированная жидкость?
8. Почему объёмные дебиты необходимо приводить к одним условиям в газовом факторе?

### 3. Практическое задание

Получите формулу объёмного газового фактора (16) с использованием определения объёмной растворимости газа (17), объёмных дебитов (18) и необходимых соотношений для массовых расходов (10), (15).



# ГЛАВА 1. ЗАДАЧА БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА

## 1.1. Задача Баклея-Левретта

Любое движение можно описать системой трёх основных уравнений – законами сохранения массы, импульса и энергии.

Закон сохранения массы для воды и для нефти соответственно в случае несжимаемой жидкости (плотность постоянна) аналогичны (8) и (9):

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0, \quad (1.1)$$

$$-m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0. \quad (1.2)$$

В качестве закона сохранения импульса используется закон Дарси (4) для воды и нефти соответственно (давления записаны под общим градиентом с введением вертикальной координаты  $z$  так, чтобы слагаемые под градиентом складывались, а не вычитались)

$$\vec{u}_1 = -\frac{k}{\mu_1} k_1(S) \operatorname{grad}(p_1 + \rho_1 g z), \quad (1.3)$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{k}{\mu_2} k_2(S) \operatorname{grad}(p_2 + \rho_2 g z). \quad (1.4)$$

Из (5) капиллярное давление

$$p_k(S) = p_2 - p_1 = \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(S). \quad (1.5)$$

Сложим уравнения (1.1) и (1.2):

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 + \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 0, \quad (1.7)$$

откуда

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}(t), \quad (1.8)$$

где  $\vec{u}(t)$  – вектор суммарной скорости фильтрации, постоянный относительно координат, но зависящий в общем случае от времени. Поскольку объёмный расход равен произведению скорости фильтрации

на площадь фильтрации (являющуюся постоянной), то из (1.8) следует постоянство объёмного расхода относительно координаты, что является свойством несжимаемой жидкости (как и постоянство скорости фильтрации относительно координат, что следует из общего вида закона сохранения массы).

Будем рассматривать движение по горизонтали, тогда гравитационными эффектами в (1.3) и (1.4) можно пренебречь.

Из (1.3), (1.4) и (1.8)

$$\vec{u}(t) = -\frac{k}{\mu_1}k_1(S)\text{grad}p_1 - \frac{k}{\mu_2}k_2(S)\text{grad}p_2. \quad (1.9)$$

Из (1.5) можно выразить давление в нефтяной фазе и подставить в (1.9):

$$\vec{u}(t) = -\frac{k}{\mu_1}k_1(S)\text{grad}p_1 - \frac{k}{\mu_2}k_2(S)\text{grad}\left(p_1 + \sigma\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}J(S)\right), \quad (1.10)$$

$$\vec{u}(t) = -k\text{grad}p_1\left(\frac{k_1(S)}{\mu_1} + \frac{k_2(S)}{\mu_2}\right) - \frac{kk_2(S)}{\mu_2}\sigma\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}\text{grad}J(S), \quad (1.11)$$

$$-k\text{grad}p_1 = \frac{\vec{u}(t)}{\frac{k_1(S)}{\mu_1} + \frac{k_2(S)}{\mu_2}} + \frac{\frac{kk_2(S)}{\mu_2}\sigma\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}\text{grad}J(S)}{\frac{k_1(S)}{\mu_1} + \frac{k_2(S)}{\mu_2}}. \quad (1.12)$$

Пусть давления в фазах одинаковы и равны давлению  $p$  (допущение, компенсируемое в выражении (1.12) наличием функции Леверетта, учитывающей капиллярные силы), тогда с учётом (1.3), (1.4) и (1.8) при движении по горизонтали:

$$\frac{\vec{u}_1}{\vec{u}} = \frac{\vec{u}_1}{\vec{u}_1 + \vec{u}_2} = \frac{\frac{-kk_1(S)}{\mu_1}\text{grad}p}{\frac{-kk_1(S)}{\mu_1}\text{grad}p - \frac{kk_2(S)}{\mu_2}\text{grad}p} = \frac{k_1(S)}{k_1(S) + \mu^*k_2(S)}, \quad (1.13)$$

где введено обозначение относительной вязкости – отношения вязкости воды к вязкости нефти:

$$\mu^* = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (1.14)$$

Из (1.13) можно ввести некоторую функцию насыщенности:

$$F(S) = \frac{k_1(S)}{k_1(S) + \mu^* k_2(S)} = \frac{\frac{k_1(S)}{\mu_1}}{\frac{k_1(S)}{\mu_1} + \frac{k_2(S)}{\mu_2}}, \quad (1.15)$$

которая называется **функцией Баклея-Леверетта** и имеет смысл доли воды в двухфазном потоке нефть-вода:

$$\frac{\vec{u}_1}{\vec{u}} = F(S). \quad (1.16)$$

Для построения функции Баклея-Леверетта необходимо знать зависимость ОФП от насыщенности. Для этого существуют различных теоретические и эмпирические корреляции, простейшими из которых являются типовые квадратичные корреляции [2] (с учётом выражения нефтенасыщенности через водонасыщенность из (2)):

$$k_1(S) = S^2, k_2(S) = (1 - S)^2. \quad (1.17)$$

Существуют и более сложные корреляции, учитывающие остаточные водонасыщенность и нефтенасыщенность, обусловленные капиллярными, гравитационными и другими эффектами, то есть такие насыщенности фаз, при которых другая фаза не может вытеснить эту фазу ни при каких условиях.

С учётом (1.15) выражение (1.12) можно записать в виде

$$-k \text{grad} p_1 = \frac{\vec{u}(t)}{\frac{k_1(S)}{\mu_1} + \frac{k_2(S)}{\mu_2}} + \frac{\frac{k k_2(S)}{\mu_2} F(S) \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} \text{grad} J(S)}{\frac{k_1(S)}{\mu_1}}. \quad (1.18)$$

Используем закон сохранения массы для воды (1.1) с учётом (1.3):

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div} \left( -\frac{k}{\mu_1} k_1(S) \text{grad} p_1 \right) = 0, \quad (1.19)$$

откуда после подстановки (1.18)

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{\frac{k_1(S)}{\mu_1} \vec{u}(t)}{\frac{k_1(S)}{\mu_1} + \frac{k_2(S)}{\mu_2}} + \frac{k k_2(S)}{\mu_2} \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} F(S) \operatorname{grad} J(S) \right) = 0. \quad (1.20)$$

Учитывая (1.15), получим

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(F(S) \vec{u}) + \frac{k \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}}}{\mu_2} \operatorname{div}(k_2(S) F(S) \operatorname{grad} J(S)) = 0. \quad (1.21)$$

Используя декартовую трёхмерную систему координат  $x, y, z$ , введём безразмерные параметры: безразмерную координату  $X$  (а также  $Y$  и  $Z$ ), используя расстояние между нагнетательной и добывающей скважинами  $L$ , безразмерное время  $T$ , используя характерное время  $t_0$ , безразмерную скорость  $V$ , используя удельный дебит закачки (измеряется в м/с)  $u_0$ , зависящий из закона Дарси от давления на нагнетательной скважине  $p_{inj}$  и на добывающей  $p_{pr}$ , а также второе капиллярное число  $N_2$  (нередко обозначают  $N_c$  и называют капиллярным числом), причём

$$X = \frac{x}{L}; T = \frac{t}{t_0}; \vec{V} = \frac{\vec{u}}{u_0}; t_0 = \frac{mL}{u_0}; u_0 = \frac{k(p_{inj} - p_{pr})}{\mu_2 L}; N_2 = \frac{\sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}}}{p_{inj} - p_{pr}}, \quad (1.22)$$

аналогично

$$Y = \frac{y}{L}; Z = \frac{z}{L}, \quad (1.23)$$

тогда из (1.22) и (1.23)

$$dt = t_0 dt, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \frac{\partial f_x}{L \partial X} + \frac{\partial f_y}{L \partial Y} + \frac{\partial f_z}{L \partial Z} = \frac{1}{L} \operatorname{DIV} \vec{f}, \quad (1.25)$$

$$\operatorname{grad} A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial A}{L \partial X} \vec{i} + \frac{\partial A}{L \partial Y} \vec{j} + \frac{\partial A}{L \partial Z} \vec{k} = \frac{1}{L} \operatorname{GRAD}(A), \quad (1.26)$$

где  $\vec{f}$  – некоторый вектор с соответствующими проекциями на оси  $f_x, f_y, f_z$ ,  $A$  – некоторая скалярная функция,  $\operatorname{DIV} \vec{f}$  означает безразмерную

дивергенцию вектора  $\vec{f}$ ,  $\text{GRAD}(A)$  – безразмерный градиент скалярной функции  $A$ .

Тогда (1.21) с учётом (1.22)–(1.26) примет вид

$$m \frac{\partial S}{t_0 \partial T} + \frac{u_0}{L} \text{DIV}(F(S)\vec{V}) + \frac{k\sigma\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}}{\mu_2 LL} \text{DIV}(k_2(S)F(S)\text{GRAD}J(S)) = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{u_0}{L} \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{u_0}{L} \text{DIV}(F(S)\vec{V}) + \frac{u_0\sigma\cos\theta\sqrt{\frac{m}{k}}}{L(p_{inj} - p_{pr})} \text{DIV}(k_2(S)F(S)\text{GRAD}J(S)) = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \text{DIV}(F(S)\vec{V}) + N_2 \text{DIV}(k_2(S)F(S)\text{GRAD}J(S)) = 0. \quad (1.29)$$

Уравнение (1.29) учитывает капиллярные силы и называется **уравнением Рапопорта-Лиса** (задачей Рапопорта-Лиса). Но обычно  $N_2 \leq 10^{-3}$  и капиллярными силами можно пренебречь. Тогда получим **уравнение Баклея-Левверетта**

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \text{DIV}(F(S)\vec{V}) = 0, \quad (1.30)$$

причём обычно  $u_0$  вводят так, чтобы  $|\vec{V}| = 1$ .

Существует и более распространённая форма его записи в одномерном случае, выводющаяся из (1.21) без учёта капиллярных сил с учётом (1.7) и (1.8):

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial F(S)}{\partial x} = 0. \quad (1.31)$$

При учёте (1.22) (и  $u=u_0$ ):

$$m \frac{\partial S}{t_0 \partial T} + \frac{u_0}{L} \frac{\partial F(S)}{\partial X} = 0, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \frac{\partial F(S)}{\partial X} = 0, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \frac{dF(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial X} = 0. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) – одномерное безразмерное уравнение Баклея-Левверетта (задача Баклея-Левверетта). Оно может быть решено

графически, численно, аналитически и с помощью автомодельной переменной.

## 1.2. Аналитический и автомодельный методы решения задачи Баклея-Леверетта

Сначала рассмотрим **аналитический метод решения задачи Баклея-Леверетта**.

Водонасыщенность, как следует из задачи (1.31) и (1.34), является функцией координаты и времени, тогда её полный дифференциал

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial x} dx. \quad (1.35)$$

Также используем само уравнение Баклея-Леверетта (1.31), расписав производную сложной функции  $F$

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + uF'(S) \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (1.36)$$

где штрихом обозначена производная по насыщенности.

Система уравнений (1.35)–(1.36) (относительно неизвестных производных насыщенности) имеет нетривиальное решение, когда определитель, составленный из коэффициентов перед неизвестными, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} dt & dx \\ m & uF'(S) \end{vmatrix} = 0, \quad (1.37)$$

откуда

$$mdx = uF'(S)dt, \quad (1.38)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{uF'(S)}{m}. \quad (1.39)$$

Интегрируя (1.39) и обозначая постоянную интегрирования за начальную координату  $x_0$  в момент времени  $t=0$ , получим

$$x = \frac{uF'(S)}{m}t + x_0. \quad (1.40)$$

В безразмерном виде система уравнений аналогично состоит из:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial X} dX \quad (1.41)$$

и уравнения (1.34). Тогда для нетривиального решения

$$\begin{vmatrix} dT & dX \\ 1 & F'(S) \end{vmatrix} = 0, \quad (1.42)$$

откуда

$$dX = F'(S)dT, \quad (1.43)$$

$$\frac{dX}{dT} = F'(S). \quad (1.44)$$

После интегрирования (1.44) и введения безразмерной начальной координаты  $X_0$  в момент времени  $T=0$ , получим

$$X = F'(S)T + X_0. \quad (1.45)$$

Отсюда, если известна производная функции Баклея-Левверетта (типовой график которой показан на рис. 1.1 в сравнении с графиком функции Баклея-Левверетта) как функция насыщенности (а её несложно найти из функции Баклея-Левверетта, для построения которой нужно лишь знать корреляции ОФП), можно найти зависимость водонасыщенности от безразмерной координаты (рис. 1.2), откуда легко перейти к размерной.

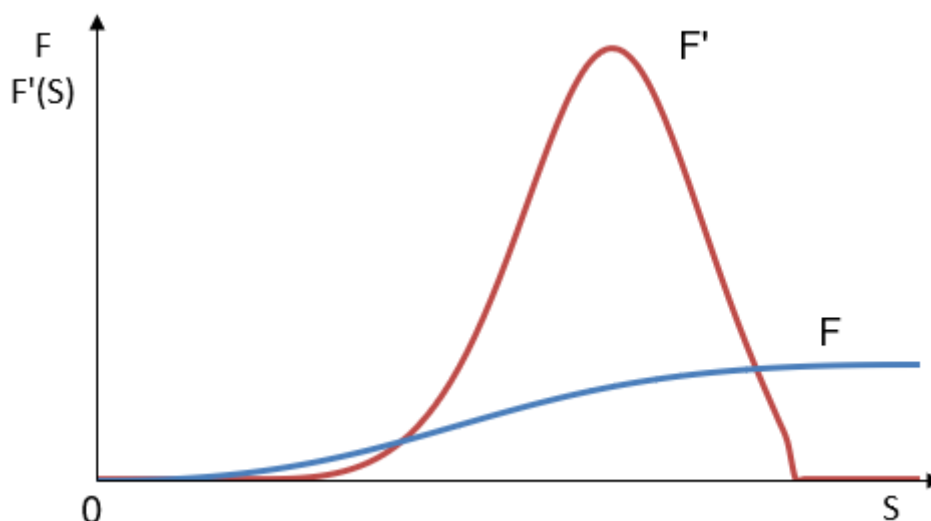


Рис. 1.1. Типовые графики функции Баклея-Левверетта и её производной.

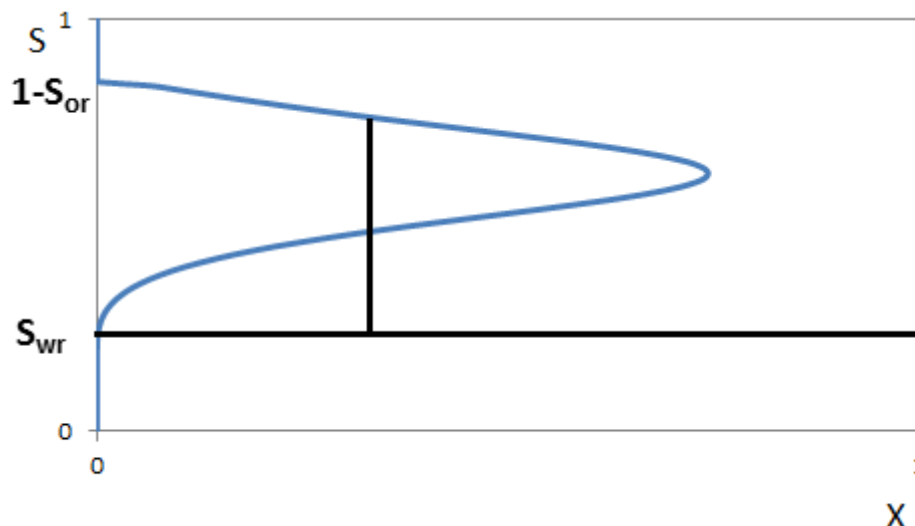


Рис. 1.2. Типовой график зависимости водонасыщенности от безразмерной координаты при аналитическом и автомоделном решении.

Полученный аналитически график зависимости водонасыщенности от безразмерной координаты будет иметь неоднозначность, поэтому необходима его обработка для получения фронта насыщенности с помощью проведения горизонтальной линии при значении остаточной водонасыщенности  $S_{wr}$ , до которой и должна падать водонасыщенность на фронте (и распространяться далее с этим же значением) и отсечения затем с помощью вертикальной линии равных площадей (выравниваем и компенсируем неоднозначность) под графиком до горизонтальной линии при  $S_{wr}$  и внутри графика до получающегося выступа (рис. 1.2). При этом график должен идти от начального значения водонасыщенности  $1-S_{or}$ , где  $S_{or}$  – остаточная нефтенасыщенность. Тогда и получится правильный итоговый график (фронт будет идти по проведённой вертикальной линии). Наличие не размытого фронта водонасыщенности соответствует реальным процессам устойчивого вытеснения нефти водой.



Теперь рассмотрим **автомодельное решение задачи Баклея-Левретта**.

Для этого необходимо ввести безразмерную автомодельную переменную  $\xi$  так (с учётом (1.22)):

$$\xi = \frac{X}{T} = \frac{\frac{x}{L}}{\frac{t}{\frac{mL}{u_0}}} = \frac{mx}{tu_0}. \quad (1.46)$$

Тогда нужно пересчитать производные по  $x$  и  $t$  (если  $A$  – некоторая функция координаты и времени):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{mx}{t^2 u_0} \frac{dA}{d\xi}; \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{m}{tu_0} \frac{dA}{d\xi}. \quad (1.47)$$

Подставляя (1.47) в (1.31) с учётом  $u=u_0$ , получим:

$$-m \frac{mx}{t^2 u_0} \frac{dS}{d\xi} + \frac{u_0 m F'(S)}{tu_0} \frac{dS}{d\xi} = 0, \quad (1.48)$$

$$-\frac{mx}{tu_0} \frac{dS}{d\xi} + F'(S) \frac{dS}{d\xi} = 0, \quad (1.49)$$

а учитывая (1.46), имеем

$$\xi \frac{dS}{d\xi} = F'(S) \frac{dS}{d\xi}. \quad (1.50)$$

Для (1.50) имеется разрывное решение  $S=S_{wr}=const$ , и  $F'(S) = \xi$ , что с учётом (1.46) аналогично выражению (1.40) при нулевой начальной координате. Таким образом, аналитический и автомодельный методы решения приводят к одинаковому результату и одинаковому распределению водонасыщенности по безразмерной координате (рис. 1.2).

Следует отметить, что вместо «водонасыщенность» часто в задаче Баклея-Левретта говорят «насыщенность».

### 1.3. Графический метод решения задачи Баклея-Левверетта

Простейшим способом нахождения зависимости водонасыщенности от безразмерной координаты (и понимания движения фронта вытеснения) является **графический метод (метод Велджа)**. Следует рассмотреть его вывод и пример использования.

Уравнение (1.34) может быть решено методом характеристик. Тогда

$$\frac{dX}{\frac{dF(S)}{dS}} = \frac{dT}{1}, \quad (1.51)$$

или, если  $\alpha$  – угол наклона касательной к графику функции Баклея-Левверетта, учитывая (1.45) при нулевой начальной координате и геометрический смысл производной функции в точке, получим

$$\frac{dF(S)}{dS} = F'(S) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dX}{dT} = \frac{X}{T}. \quad (1.52)$$

В случае сложных нелинейных кусочно-заданных зависимостей относительных фазовых проницаемостей от водонасыщенности уравнение (1.52) решить аналитически затруднительно или невозможно. Однако из выражения (1.52) можно графически найти зависимость водонасыщенности от координаты, если построить касательные к графику функции Баклея-Левверетта в точках, соответствующих различному значению водонасыщенности. Если момент времени, при котором строится искомая зависимость, фиксирован, то изменение угла наклона при переходе от одной касательной (соответствующей одной точке водонасыщенности) к другой даст изменение координаты. Остаётся выяснить, каким образом можно получить скачок водонасыщенности на фронте (рис. 1.2). Пусть площадь поперечного сечения равна  $A$ , до скачка (рис. 1.3), то есть пока фронт воды не достиг данной точки, водонасыщенность равна остаточной водонасыщенности:

$S_-=S_{wr}$ ; после скачка (рис. 1.3) водонасыщенность равна водонасыщенности на фронте  $S_f$ .  $S_+=S_f$ ; скорость вытеснения равна  $u_0$ .

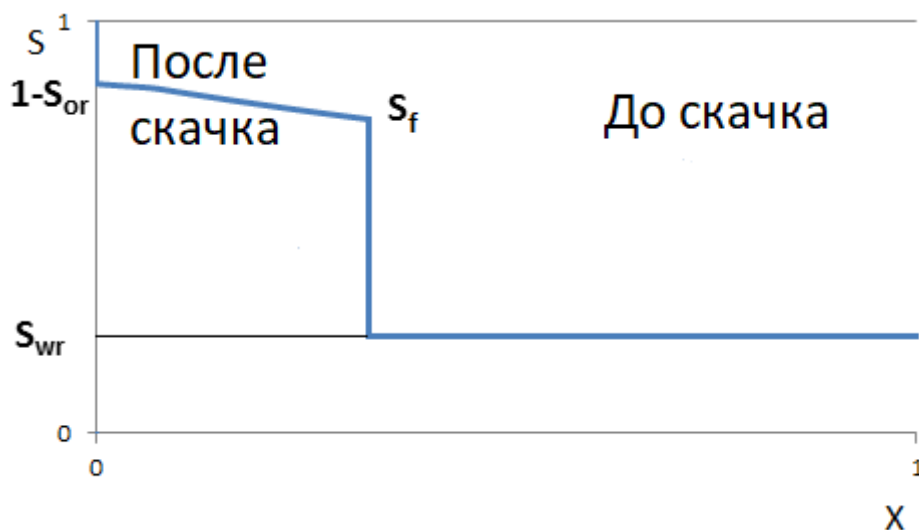


Рис. 1.3. Зависимость водонасыщенности от координаты и скачок насыщенности.

Тогда закачиваемый в поры объём (то есть объём, умноженный на пористость) может быть расписан как произведение скорости на площадь и время:

$$mV_B = u_0 A t, \quad (1.53)$$

где  $V_B$  – закачиваемый объём воды.

С другой стороны, изменение объёма воды в порах состоит из двух слагаемых: изменения объёма на фронте при постоянной координате и площади, вызванное изменением насыщенности и изменением объёма из-за изменения насыщенности после скачка (рис. 1.3), когда изменяется и координата (поэтому необходимо интегрирование зависимости):

$$V_B = A x_f (S_f - S_{wr}) + A \int_{S_f}^{1-S_{or}} x(S) dS, \quad (1.54)$$

где  $x_f$  – координата фронта.

Из балансовых соотношений объём  $V_e$  из (1.53) равен объёму  $V_e$  из (1.54). Следует учесть выражение для координаты (1.40) при нулевой начальной координате, тогда из равенства (1.53) и (1.54):

$$\frac{u_0 A t}{m} = \frac{u_0 A F'(S_f)}{m} t (S_f - S_{wr}) + \frac{u_0 A t}{m} \int_{S_f}^{1-S_{or}} F'(S) dS, \quad (1.55)$$

откуда, учитывая, что функция Баклея-Левверетта при максимальной водонасыщенности, когда нефтенасыщенность остаточная, равна 1 (весь поток обводнён), получим:

$$1 = F'(S_f)(S_f - S_{wr}) + 1 - F(S_f), \quad (1.56)$$

$$F'(S_f) = \frac{F(S_f)}{(S_f - S_{wr})}. \quad (1.57)$$

Поскольку графический метод Велджа связан с построением касательных к  $F$ , следует рассмотреть уравнение касательной к функции Баклея-Левверетта, проведённой из точки остаточной водонасыщенности, в точке фронтальной водонасыщенности. Очевидно, в точке  $S_{wr}$  ордината касательной равна 0, тогда по уравнению касательной имеется выражение:

$$0 = F(S_f) + F'(S_f)(S_{wr} - S_f), \quad (1.58)$$

эквивалентное (1.57), то есть (1.57) – уравнение касательной к функции Баклея-Левверетта, проведённой из точки остаточной водонасыщенности, в точке фронтальной водонасыщенности. Точка пересечения этой касательной с линией, равной 1 на оси  $F$ , соответствует средней водонасыщенности к моменту прорыва воды  $S^*$  (поскольку доля воды в потоке станет 1). Таким образом, чтобы определить насыщенность на фронте, необходимо провести касательную к функции Баклея-Левверетта из точки остаточной водонасыщенности. Насыщенность водой в точке касания будет соответствовать фронтальной. Тангенс угла наклона этой касательной

из (1.52) позволит определить координату фронта, где водонасыщенность будет скачком снижаться от фронтальной до остаточной. При большем значении координаты водонасыщенность равна остаточной (рис. 1.3). Чтобы построить водонасыщенность в зависимости от координаты при меньшем значении  $X$ , необходимо провести касательные к  $F$  в точки с большим значением водонасыщенности. Нулевая точка по координате соответствует нагнетательной скважине, где значение водонасыщенности равно  $1-S_{or}$ . Описанный метод будет показан на примере.

**Пример 1.1.** Получить распределение водонасыщенности в зависимости от безразмерной координаты методом Велджа в момент времени  $T=0,3$ , если функция Баклея-Левретта имеет вид, представленный на рис. 1.4.

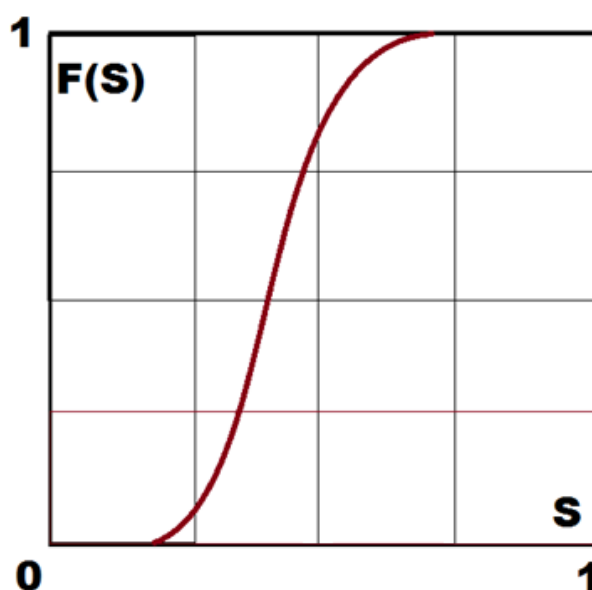


Рис. 1.4. Характерный вид функции Баклея-Левретта.

**Решение.** Сразу можно сделать несколько полезных выводов из рис. 1.4. Функция Баклея-Левретта становится ненулевой при превышении остаточной водонасыщенности  $S_{wr} \approx 0,2$ ;  $F$  принимает значение 1 при  $S = 1 - S_{or} \approx 0,73$ , причём для этой точки безразмерная

координата будет нулевой, то есть там расположена нагнетательная скважина. На фронте вытеснения водонасыщенность должна падать от насыщенности на фронте  $S_f$  до остаточной  $S_{wr}$ , ниже которой она уже упасть не может. По методу Велджа для нахождения насыщенности на фронте проводится касательная к функции Баклея-Лeverетта из точки остаточной водонасыщенности (рис. 1.5). Насыщенность в точке касания будет равна насыщенности на фронте  $S_f$ .

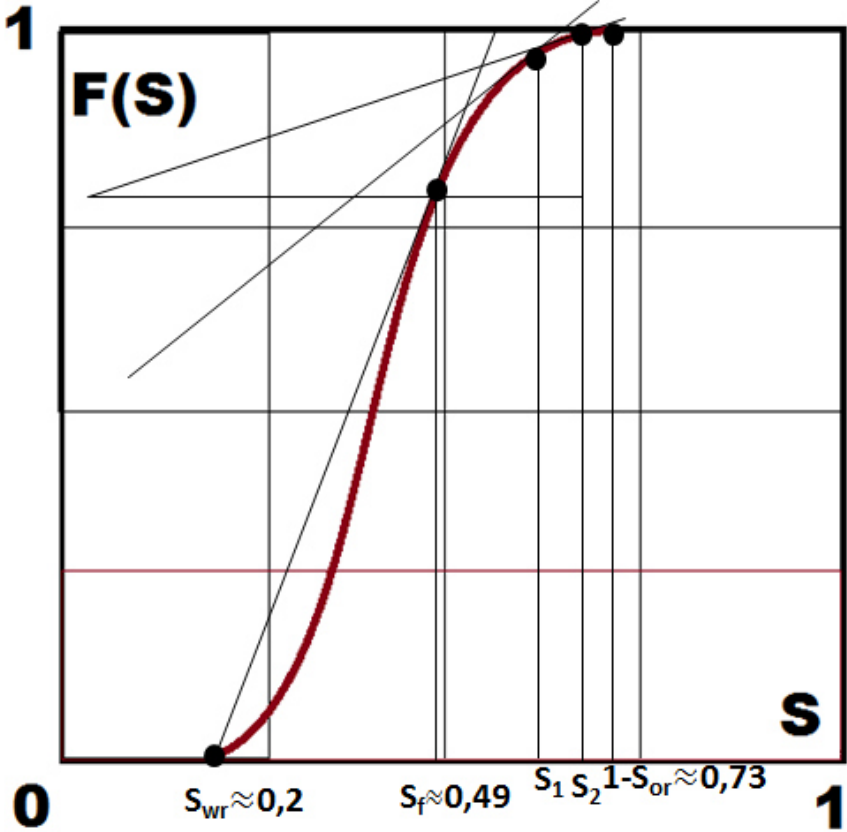


Рис. 1.5. Решение задачи Баклея-Лeverетта методом Велджа.

Поскольку добывающая скважина расположена при  $X=1$ , то безразмерное время прорыва воды в добывающую скважину находится из (1.52) так:

$$T = \frac{1}{\text{tg}\alpha_f}, \tag{1.59}$$

где  $\alpha_f$  – угол наклона касательной в точке водонасыщенности на фронте.

Из (1.52) и рис. 1.5 (откуда находится  $\alpha_f$ ) для координаты фронта  $X_f$  имеем:

$$X_f = T \operatorname{tg} \alpha_f = 0,3 \cdot \frac{0,78}{0,29} = 0,81.$$

То есть водонасыщенность с увеличением координаты будет плавно снижаться от  $1-S_{or}$  до  $S_f$ , соответствующей координате  $X_f$ , где будет наблюдаться скачкообразное падение насыщенности до  $S_{wr}$ . Отсюда можно построить итоговый график  $S(X)$ , но лучше уточнить его, выбрав ещё два значения насыщенности  $S_1$  и  $S_2$  в диапазоне между насыщенностью на фронте и конечной водонасыщенностью  $1-S_{or}$ , для которых найдём соответствующие координаты  $X_1$  и  $X_2$  из (1.52), проведя в точки на функции Баклея-Левретта, соответствующие этим значениям водонасыщенности, касательные с углами наклона  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Для  $S_1=0,625$  и  $S_2=0,7$  получим:

$$X_1 = T \operatorname{tg} \alpha_1 = 0,3 \cdot \frac{0,2}{0,325} \approx 0,18,$$

$$X_2 = T \operatorname{tg} \alpha_2 = 0,3 \cdot \frac{0,2}{0,65} \approx 0,09.$$

Тогда итоговый график будет таким, как показано на рис. 1.6.

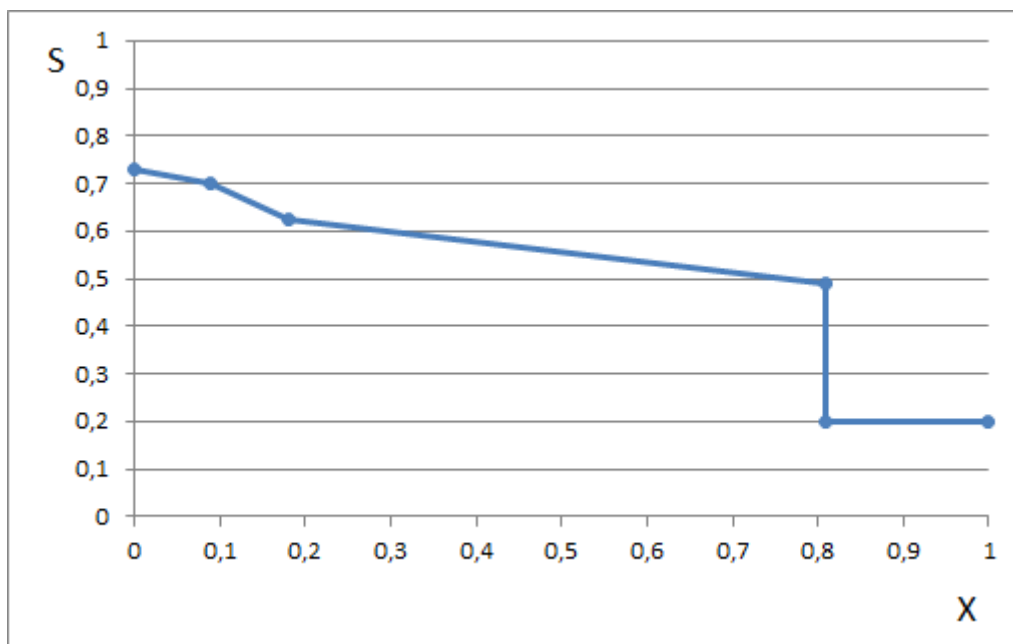


Рис. 1.6. График распределения водонасыщенности в зависимости от безразмерной координаты.

Ответ: см. рис. 1.6.

Отдельно отметим, что коэффициент вытеснения нефти  $K_{вн}$  может быть найден по определению как отношение разности начального объёма нефти  $V(1 - S_{wr})$  при начальной нефтенасыщенности  $(1 - S_{wr})$  и конечного объёма нефти (когда разработка прекращается)  $V(1 - S_*)$  при конечной нефтенасыщенности  $(1 - S_*)$  в момент прорыва воды в добывающую скважину (или скважины, если их несколько) к начальному объёму нефти ( $V$  – объём пласта):

$$K_{вн} = \frac{V((1 - S_{wr}) - (1 - S_*))}{V(1 - S_{wr})} = 1 - \frac{1 - S_*}{1 - S_{wr}}. \quad (1.60)$$

**Пример 1.2.** Угол наклона касательной к функции Баклея-Левретта в точке фронтальной водонасыщенности равен 45 градусов. Чему равно время прорыва воды к добывающей скважине, если характерное время процесса составляет 200 суток?

**Решение.** Безразмерное время прорыва воды в добывающую скважину можно определить из (1.59):



$$T = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}45^\circ} = 1,$$

причём

$$T = \frac{t}{t_0},$$

где  $t_0$  – характерное время процесса,

откуда размерное время прорыва воды  $t$  будет равно

$$t = Tt_0 = 1 \cdot 200 \cdot 86400 \text{ с} = 200 \cdot 86400 \text{ с} = 200 \text{ сут.}$$

Ответ:  $t = 200$  сут.

## 1.4. Численные методы решения задачи Баклея-Леверетта.

### Метод Эйлера

Аналитические методы решения удобны, когда точное решение можно получить в достаточно простом виде. В то же время они при применении к задаче Баклея-Леверетта так или иначе связаны с оценочными графическими построениями. Кроме того, в более сложном случае (при учёте капиллярных эффектов) получить аналитическое решение затруднительно или невозможно. Поэтому целесообразно применение **численных методов**, связанных с аппроксимацией производных (бесконечно малых приращений) конечными разностями.

Для начала следует поставить некоторые допущения:

1. Течение одномерное плоскопараллельное вдоль оси  $x$  (как рассматривалось выше).
2. Капиллярными эффектами пренебрегаем (учтено в выводе уравнения Баклея-Леверетта).
3. Пренебрегаем гравитационными эффектами, поскольку рассматривается движение по горизонтали (учтено в выводе уравнения Баклея-Леверетта).

Самым простым численным методом для задачи Баклея-Леверетта является применение **явной конечно-разностной схемы**. Этот метод

носит такое название, поскольку неизвестная функция в новый момент времени (на новом временном слое с номером  $n+1$ ) может быть в явном виде выражена через её значения в известный предыдущий момент времени (на предыдущем временном слое с номером  $n$ ). По определению производной как приращений, если избавиться от пределов (**по методу Эйлера**), будем иметь для уравнения Баклея-Левретта (1.33)

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T}, \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta X}, \quad (1.62)$$

где выбрана левая аппроксимация приращения функции Баклея-Левретта, иначе схема даёт некорректные результаты, как следует из практики её решения, введена численная сетка с шагом  $\Delta X$  по горизонтальной координате и шагом  $\Delta T$  по времени,  $i$  – номер расчётного узла по горизонтальной координате. Значение функции Баклея-Левретта в расчётном узле с номером  $i$  на  $n$ -ом слое вычисляется по формуле

$$F_i^n = F(S_i^n) = \frac{k_1(S_i^n)}{k_1(S_i^n) + \mu^* k_2(S_i^n)}. \quad (1.63)$$

В качестве корреляций относительных фазовых проницаемостей можно использовать модельные **корреляции Кори**

$$k_1(S) = 0, S \leq S_{wr}; \quad k_1(S) = \left( \frac{S - S_{wr}}{1 - S_{wr}} \right)^{2,5}, S \geq S_{wr}; \quad (1.64)$$

$$k_2(S) = 0, S \geq 1 - S_{or}; \quad k_2(S) = \left( \frac{1 - S - S_{or}}{1 - S_{wr} - S_{or}} \right)^{1,5}, S_{wr} \leq S \leq 1 - S_{or};$$

$$k_2(S) = 1, S \leq S_{wr}. \quad (1.65)$$

В эти корреляции насыщенность водой должна подставляться на соответствующем шаге.

После подстановки (1.61) и (1.62) в (1.33) можно получить итоговое выражение **явной конечно-разностной схемы для уравнения Баклея-Левретта с аппроксимацией производных по методу Эйлера**:

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} + \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta X} = 0. \quad (1.66)$$

Для водонасыщенности на неизвестном слое в итоге имеем:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta T}{\Delta X} (F_i^n - F_{i-1}^n). \quad (1.67)$$

Фактически в этой аппроксимации от производных (бесконечно малых приращений) произведён переход к конечным разностям, что, конечно, вносит некоторую ошибку. Поэтому необходимо проверять **порядок аппроксимации численной схемы** – ошибку, вносимую при переходе от дифференциальных уравнений к алгебраическим.

Для первой производной по координате следует разложить значение функции  $F$  в следующем расчётном узле в ряд Тейлора в окрестности точки  $i$ :

$$F_{i+1}^n = F_i^n + \frac{\partial F}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} (\Delta X)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} (\Delta X)^3 + \dots$$

Получим в левой части выражение, аналогичное (1.62):

$$\frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta X} = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \Delta X + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} (\Delta X)^2 + \dots$$

В силу малости шага  $(\Delta X)^2 \ll \Delta X$ , поэтому третьим и всеми последующими членами ряда можно пренебречь, что приводит к выражению

$$\frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta X} = \frac{\partial F}{\partial X} + o(\Delta X), \quad (1.68)$$

где  $o(\Delta X)$  – бесконечно малая величина порядка  $\Delta X$ .

Выражение (1.68) означает первый порядок аппроксимации первой производной по координате.

Аналогично для первой производной по времени при замене  $X$  на  $T$  и разложении функции в ряд Тейлора в окрестности точки  $n$  можно получить выражение

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} = \frac{\partial S}{\partial T} + o(\Delta T), \quad (1.69)$$

что означает первый порядок аппроксимации первой производной по времени.

Следует отметить, что для численной схемы важна проверка **сходимости численного решения к истинному значению**. Это понятие означает стремление численного решения к аналитическому при уменьшении шага численной сетки (то есть при приближении конечной разности к бесконечно малому приращению, фигурирующему в производной). Сходимость позволяет доверять результатам, полученным из численных расчётов. Для задачи Баклея-Левверетта аналитическое решение было получено в предыдущих разделах данной книги.

Другим важным понятием для численных схем является **устойчивость численной схемы** – условие ненакопления ошибки, то есть ошибка на новом шаге должна быть меньше или равна ошибке на предыдущем. Одним из методов проверки устойчивости в силу его применимости к большому числу схем является **метод Неймана с помощью разложения в ряд Фурье (метод Неймана)**. Он учитывает разложение значения функции в расчётном узле сетки на значение функции в соответствующий момент времени в одном и том же расчётном узле и экспоненциальную часть, связанную с координатой. Метод позволяет найти коэффициент перехода от  $n$ -го слоя к  $(n+1)$ -ому, который должен не превосходить 1 для устойчивости (ненакопления ошибки). При этом значение функции  $S$  в расчётном узле  $j$  по координате на  $n$ -ом временном слое  $S_j^n$  раскладывается по определению ряда Фурье так:

$$S_j^n = S_j(T^n)e^{ikX_j}, \quad (1.70)$$

где  $S_j(T^n)$  – значение водонасыщенности в узле  $j$  в момент времени  $T^n$ , соответствующий  $n$ -ому временному слою,  $i$  – мнимая единица,  $k$  – некоторый коэффициент,  $X_j$  – координата узла  $j$ . Аналогично для других индексов:

$$S_{j-1}^n = S_j(T^n)e^{ikX_{j-1}}, \quad (1.71)$$

$$S_j^{n+1} = S_j(T^{n+1})e^{ikX_j}. \quad (1.72)$$

Перед применением метода перепишем численную схему (1.66) в виде:

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta T} + a \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{\Delta X} = 0, \quad (1.73)$$

где  $a$  – производная функции Баклея-Левверетта по водонасыщенности, что следует из (1.34) и выражения для производной водонасыщенности по координате, аналогичного (1.62).

Применим метод Неймана к явной конечно-разностной схеме для уравнения Баклея-Левверетта (1.73). С учётом (1.70) – (1.72):

$$S_j(T^{n+1})e^{ikX_j} = S_j(T^n)e^{ikX_j} - \frac{a\Delta T}{\Delta X} S_j(T^n)(e^{ikX_j} - e^{ikX_{j-1}}), \quad (1.74)$$

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left( 1 - \frac{a\Delta T}{\Delta X} (1 - e^{-ik\Delta X}) \right), \quad (1.75)$$

где учтён шаг по координате:

$$\Delta X = X_j - X_{j-1}. \quad (1.76)$$

С учётом формулы Эйлера для экспоненты комплексного числа (1.75) примет вид

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left( 1 - \frac{a\Delta T}{\Delta X} (1 - (\cos(k\Delta X) - i \sin(k\Delta X))) \right). \quad (1.77)$$

В силу малости шага по координате

$$\sin(k\Delta X) \rightarrow 0, \quad (1.78)$$

кроме того, по формуле двойного аргумента

$$\cos(k\Delta X) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right), \quad (1.79)$$

тогда

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left(1 - \frac{2a\Delta T}{\Delta X} \sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right)\right). \quad (1.80)$$

Учтём, что квадрат синуса не превосходит единицы, тогда

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left(1 - \frac{2a\Delta T}{\Delta X}\right). \quad (1.81)$$

Чтобы ошибка не накапливалась, коэффициент перехода  $G$  из (1.81) не должен превосходить единицу по модулю:

$$G = \left(1 - \frac{2a\Delta T}{\Delta X}\right), \quad (1.82)$$

$$\left|1 - \frac{2a\Delta T}{\Delta X}\right| \leq 1, \quad (1.83)$$

$$-1 \leq 1 - \frac{2a\Delta T}{\Delta X} \leq 1. \quad (1.84)$$

Из правого неравенства имеем  $\Delta T \geq 0$ , что выполняется всегда (шаг по времени положителен), из левого:

$$-2 \leq -\frac{2a\Delta T}{\Delta X}, \quad (1.85)$$

откуда получается **условие устойчивости явной конечно-разностной схемы с аппроксимацией производных по методу Эйлера для уравнения Баклея-Левретта**

$$\Delta T \leq \frac{\Delta X}{a}. \quad (1.86)$$

Производная функции Баклея-Левретта по водонасыщенности является неотрицательной величиной (рис. 1.1).

Граничным условием для явной конечно-разностной схемы будет равенство водонасыщенности на левой границе максимальной водонасыщенности, возможной в рассматриваемом пласте:

$$S_1^n = 1 - S_{wr}, \forall n. \quad (1.87)$$

Начальное условие – равенство водонасыщенности связанной (однако рекомендуется приравнивать водонасыщенность к связанной с прибавкой некоторой небольшой поправки, например, 0,001, чтобы не иметь нулевых относительной фазовой проницаемости воды при расчётах, что дало бы нулевую функцию Баклея-Левверетта и стационарное решение):

$$S_i^1 = S_{wr}, i = \overline{2, l_k}, \quad (1.88)$$

где  $l_k$  – число шагов по координате.

## 1.5. Численные методы решения задачи Баклея-Левверетта. Метод Лакса-Вендроффа

Другим распространённым численным методом решения задачи Баклея-Левверетта является **метод Лакса-Вендроффа**. В этом методе используется центральная разностная аппроксимация насыщенностей для производной по координате (шаг по времени будет накапливаться из итоговой формулы, где он будет стоять множителем аналогично (1.67)), которую раскладывают в ряд Тейлора с точностью до второго слагаемого:

$$a \frac{S_{i+1}^n - S_{i-1}^n}{2\Delta X} = a \frac{\partial S}{\partial X} + a^2 \frac{\Delta T}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial X^2}. \quad (1.89)$$

Центральная разностная аппроксимация взята, поскольку симметрична относительно текущей координаты.

Производная по времени записывается без изменений и имеет тот же порядок аппроксимации, что и у явной конечно-разностной схемы по методу Эйлера.

Распишем вторую производную по координате:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{S_{i+1}^n - S_i^n}{\Delta X} \right) = \frac{\frac{S_{i+1}^n - S_i^n}{\Delta X} - \frac{S_i^n - S_{i-1}^n}{\Delta X}}{\Delta X} = \frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{\Delta X^2}. \quad (1.90)$$

Для второй производной по координате следует разложить значения функции в соседних к текущему узлах в окрестности этого узла  $i$ :

$$S_{i+1}^n = S_i^n + \frac{\partial S}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \Delta X^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 S}{\partial X^3} \Delta X^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 S}{\partial X^4} \Delta X^4 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 S}{\partial X^5} \Delta X^5 + \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 S}{\partial X^6} \Delta X^6 + \dots,$$

$$S_{i-1}^n = S_i^n - \frac{\partial S}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \Delta X^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 S}{\partial X^3} \Delta X^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 S}{\partial X^4} \Delta X^4 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 S}{\partial X^5} \Delta X^5 + \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 S}{\partial X^6} \Delta X^6 - \dots,$$

после чего, при сложении этих выражений и переносе  $S_i^n$  в левую часть, а также при делении на  $\Delta X^2$ , получим выражение в левой части, аналогичное формуле (1.90):

$$\frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{(\Delta X)^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 S}{\partial X^4} \Delta X^2 + \frac{1}{360} \frac{\partial^6 S}{\partial X^6} \Delta X^4 + \dots$$

В силу малости шага  $\Delta X^4 \ll \Delta X^2$ , поэтому третьим и всеми последующими членами ряда можно пренебречь, что приводит к выражению

$$\frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{\Delta X^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + o(\Delta X^2). \quad (1.91)$$

Итак, порядок аппроксимации производной по координате у метода Лакса-Вендроффа второй, в этом заключается его преимущество перед методом Эйлера.

Заменяя из (1.89) производную насыщенности по координате на конечные разности и подставляя в (1.34) с учётом (1.61) и введённого выше  $a$  как производной функции Баклея-Левретта по координате, имеем

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} + a \frac{S_{i+1}^n - S_{i-1}^n}{2\Delta X} - a^2 \frac{\Delta T}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = 0. \quad (1.92)$$

Следует учесть (1.90), тогда



$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} + a \frac{S_{i+1}^n - S_{i-1}^n}{2\Delta X} - a^2 \frac{\Delta T}{2} \frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{\Delta X^2} = 0. \quad (1.93)$$

Выражение (1.93) – схема Лакса-Вендроффа для уравнения Баклея-Левретта. Её можно записать в виде:

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} + \frac{K_{i+1}^n - K_i^n}{\Delta X} = 0, \quad (1.94)$$

где введены обозначения:

$$K_i^n = \frac{F_i^n + F_{i-1}^n}{2} - a_i^2 \frac{\Delta T}{2\Delta X} (S_i^n - S_{i-1}^n), \quad (1.95)$$

$$a_i = \begin{cases} \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{S_i^n - S_{i-1}^n}, & S_i^n \neq S_{i-1}^n, \\ F_{i-1}^n, & S_i^n = S_{i-1}^n. \end{cases} \quad (1.96)$$

В эквивалентности видов (1.93) и (1.94) можно убедиться при подстановке (1.95) и (1.96) в (1.94):

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} + \frac{\frac{F_{i+1}^n + F_i^n}{2} - a_{i+1}^2 \frac{\Delta T (S_{i+1}^n - S_i^n)}{2\Delta X} - \frac{F_i^n + F_{i-1}^n}{2} + a_i^2 \frac{\Delta T}{2\Delta X} (S_i^n - S_{i-1}^n)}{\Delta X} = 0, \quad (1.97)$$

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} + \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta X} - \frac{a_{i+1}^2 \Delta T (S_{i+1}^n - S_i^n)}{2\Delta X^2} + \frac{a_i^2 \Delta T (S_i^n - S_{i-1}^n)}{2\Delta X^2} = 0, \quad (1.98)$$

с учётом того, что  $a_i$  является производной функции Баклея-Левретта по водонасыщенности  $a$ , а также расписывая производную функции Баклея-Левретта по координате как сложную функцию, имеем вид (1.93).

Обычно используют вид схемы Лакса-Вендроффа (1.94) с учётом (1.95) и (1.96). Из неё выражают искомую насыщенность на неизвестном временном слое, что предоставляется читателю в практической работе к настоящей главе.

Сходимость метода Лакса-Вендроффа проверяется аналогично сходимости явной конечно-разностной схемы по методу Эйлера.

Для метода Лакса-Вендроффа необходимо второе граничное условие (на правой границе), поскольку использовалась вторая

производная по координате. В качестве такого условия следует выбрать отсутствие потока водонасыщенности на правой границе (стабилизацию решения, граница удалена)

$$\frac{\partial S}{\partial X} = 0, \quad (1.99)$$

$$S_{i_k}^n = S_{i_k-1}^n, \quad (1.100)$$

иначе бы из (1.94) при расчёте  $S_{i_k}^n$  происходил бы выход за границу для индекса  $(i_k+1)$ .

Проверим устойчивость схемы Лакса-Вендроффа с помощью метода Неймана при разложении функции в ряд Фурье. Следует использовать (1.70) – (1.72), разложение

$$S_{j+1}^n = S_j(T^n)e^{ikX_{j+1}}, \quad (1.101)$$

и схему (1.93) при выражении водонасыщенности на новом временно слое:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - a\Delta T \frac{S_{i+1}^n - S_{i-1}^n}{2\Delta X} + a^2 \frac{\Delta T^2}{2} \frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{\Delta X^2} = 0. \quad (1.102)$$

Тогда

$$S_j(T^{n+1})e^{ikX_j} = S_j(T^n)e^{ikX_j} - \frac{a\Delta T}{2\Delta X} S_j(T^n)(e^{ikX_{j+1}} - e^{ikX_{j-1}}) + S_j(T^n) \frac{a^2\Delta T^2}{2\Delta X^2} (e^{ikX_{j+1}} - 2e^{ikX_j} + e^{ikX_{j-1}}), \quad (1.103)$$

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left( 1 - \frac{a\Delta T}{\Delta X} \frac{e^{ik\Delta X} - e^{-ik\Delta X}}{2} + \frac{a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} \left( -1 + \frac{e^{ik\Delta X} + e^{-ik\Delta X}}{2} \right) \right),$$

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left( 1 - \frac{a\Delta T}{\Delta X} \sin(k\Delta X) + \frac{a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} (-1 + \cos(k\Delta X)) \right), \quad (1.104)$$

где учтён шаг по координате (1.76) и аналогичный ему со смещением индексов.

С учётом формулы двойного аргумента (1.79)

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left( 1 - \frac{a\Delta T}{\Delta X} \sin(k\Delta X) - \frac{2a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right) \right). \quad (1.105)$$

Учтём, что квадрат синуса не превосходит единицы, тогда

$$S_j(T^{n+1}) = S_j(T^n) \left( 1 - \frac{a\Delta T}{\Delta X} \sin(k\Delta X) - \frac{2a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} \right). \quad (1.106)$$

С учётом малости шага и (1.78) коэффициент перехода

$$G = \left( 1 - \frac{2a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} \right), \quad (1.107)$$

$$\left| 1 - \frac{2a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} \right| \leq 1, \quad (1.108)$$

$$-1 \leq 1 - \frac{2a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} \leq 1. \quad (1.109)$$

Из правого неравенства имеем:

$$\frac{2a^2\Delta T^2}{\Delta X^2} \geq 0. \quad (1.110)$$

что выполняется всегда (квадраты неотрицательны), это решение абсолютно устойчиво, из левого:

$$-1 \leq -\frac{a^2\Delta T^2}{\Delta X^2}, \quad (1.111)$$

откуда в силу неотрицательности физических величин получаем

$$\frac{a\Delta T}{\Delta X} \leq 1. \quad (1.112)$$

Тогда **условие устойчивости метода Лакса-Вендроффа для уравнения Баклея-Левверетта** совпадает с (1.86) – условием устойчивости для явного метода Эйлера.

Часто шаг по времени берут  $10^{-5}$ , шаг по координате  $10^{-2}$ , поскольку значение производной функции Баклея-Левверетта по координате находится обычно в диапазоне от 0 до 10, тогда выполняется условие (1.86).

### Вопросы для самопроверки:

1. Что такое задача Баклея-Левверетта?

2. Каковы основные допущения для задачи Баклея-Леверетта?
3. Каков физический смысл функции Баклея-Леверетта?
4. Как изменится значение функции Баклея-Леверетта с увеличением вязкости нефти?
5. Как записывается уравнение Баклея-Леверетта?
6. Каковы основные методы решения задачи Баклея-Леверетта?
7. Как построить фронт вытеснения на графике водонасыщенности в зависимости от безразмерной координаты при аналитическом решении?
8. Как вводится автомодельная переменная для задачи Баклея-Леверетта?
9. Как выглядит итоговое уравнение с автомодельной переменной для задачи Баклея-Леверетта и чему равно его решение?
10. В чём заключается метод Велджа?
11. Как решить задачу Баклея-Леверетта с помощью численных методов?

## **1.6. Практическая работа**

### **Задача Баклея-Леверетта**

Построить распределение водонасыщенности в зависимости от координаты для задачи Баклея-Леверетта с помощью явной конечно-разностной схемы с аппроксимацией производных по методу Эйлера и с помощью метода Лакса-Вендроффа, взять 100 шагов по координате с шагом 0,01, шаг по времени взять  $10^{-5}$ , остаточная нефтенасыщенность равна 0,1, связанная водонасыщенность 0,1, корреляции для ОФП взять (1.64), (1.65), рассматривать безразмерный момент времени 0,1, вязкость воды 1 сП, вязкость нефти 2 сП. Сравнить полученное решение с графическим и аналитическим, полученными при тех же параметрах с шагом по водонасыщенности для построения графиков 0,01. Проверить

сходимость численных решений с помощью расчётов при шаге по времени  $10^{-6}$ . Указать, одинаковы ли аналитическое и автомодельное решения. Сделать выводы и отчёт по работе.

## ГЛАВА 2. ЗАДАЧА РАПОПОРТА-ЛИСА

### 2.1. Задача Рапопорта-Лиса

Из (1.29) уравнение (задача) Рапопорта-Лиса, учитывающее влияние капиллярных сил (при обозначении капиллярного числа  $N_2=N_c$ )

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \text{DIV}(F(S)\vec{V}) + N_c \text{DIV}(k_2(S)F(S)\text{GRAD}J(S)) = 0. \quad (2.1)$$

Напомним, что обычно обезразмеривают так, чтобы  $|\vec{V}| = 1$ .

Необходимо ввести следующие допущения:

1. Течение одномерное плоскопараллельное вдоль оси  $x$ .
2. Пренебрегаем гравитационными эффектами, поскольку рассматривается движение по горизонтали (учтено в выводе уравнений Рапопорта-Лиса и Баклея-Леверетта).

Из первого допущения с учётом определения производной сложной функции

$$\frac{\partial S}{\partial T} + F'(S) \frac{\partial S}{\partial X} + N_c \frac{\partial}{\partial X} \left( k_2(S)F(S)J'(S) \frac{\partial S}{\partial X} \right) = 0, \quad (2.2)$$

тогда, расписывая производную произведения, получим

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial X} + N_c A = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} + F'(S) \frac{\partial S}{\partial X} + N_c A = 0, \quad (2.4)$$

где введено обозначение

$$A = F(S)J'(S)k_2'(S) \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^2 + F'(S)J'(S)k_2(S) \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^2 + F(S)J''(S)k_2(S) \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^2 + F(S)J'(S)k_2(S) \frac{\partial^2 S}{\partial X^2}. \quad (2.5)$$

Задача Рапопорта-Лиса при одномерной радиальной фильтрации имеет похожий вид, но учитывает безразмерную радиальную координату  $R$  по Басниеву, Кочиной, Максимову [2], берущуюся из записи дивергенции в радиальных координатах:

$$\frac{\partial S}{\partial T} + F'(S) \frac{\partial S}{\partial R} + N_c \frac{\partial}{\partial R} \left( k_2(S) F(S) R J'(S) \frac{\partial S}{\partial R} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Решение в этом случае, однако, более затруднительно, чем для плоскопараллельной фильтрации.

Существует множество корреляций для функции Леверетта, например,

$$J(S) = 10e^{-0,07S}, \quad (2.7)$$

тогда её производные

$$J'(S) = -0,07e^{-0,07S}, \quad (2.8)$$

$$J''(S) = 0,049e^{-0,07S}. \quad (2.9)$$

Из-за капиллярных эффектов фронт вытеснения в задаче Рапопорта-Лиса будет не резким, а несколько размытым, причём чем больше влияние капиллярных эффектов, тем более размытым будет фронт. Зона размытия называется **стабилизированной зоной**, ширина которой простирается от насыщенности, незначительно отличающейся от насыщенности в начале скачка, до остаточной насыщенности.

По теории размерностей оценочная ширина стабилизированной зоны по Басниеву, Кочиной, Максимову [2]

$$l = \frac{p_k L}{\Delta p}, \quad (2.10)$$

где  $p_k$  – капиллярное давление,  $L$  – характерный линейный размер задачи,  $\Delta p$  – перепад давлений в пласте и на забое скважины.

Это размытие показано на рис. 2.1, где  $S_c$  – критическая водонасыщенность (когда функция Баклея-Леверетта отличается от 0, как правило, хотя бы на 0,01 (либо на другое малое значение)),  $S_0$  – остаточная водонасыщенность,  $\xi$  – безразмерная координата.

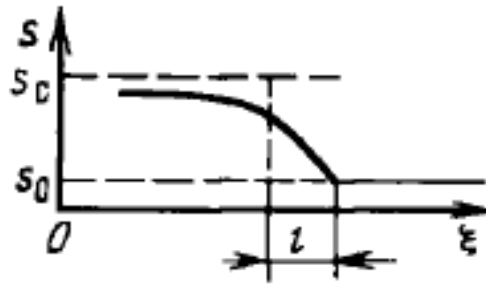


Рис. 2.1. Стабилизированная зона [2].

Аналитическое решение задачи Рапопорта-Лиса из-за вида корреляций функции Леверетта невозможно. Поэтому следует использовать численные методы.

## 2.2. Численные методы решения задачи Рапопорта-Лиса.

### Метод Эйлера

Рассмотрение численных методов для задачи Рапопорта-Лиса следует начать с явной конечно-разностной схемы с аппроксимацией производных по методу Эйлера аналогично задаче Баклея-Леверетта. Тогда производные в (2.3) аппроксимируются как (1.61), (1.62), (1.90),

$$\frac{\partial S}{\partial X} = \frac{S_i^n - S_{i-1}^n}{\Delta X}, \quad (2.11)$$

$$J'(S_i^n) = -0,07e^{-0,07S_i^n}, \quad (2.12)$$

$$J''(S_i^n) = 0,049e^{-0,07S_i^n}, \quad (2.13)$$

где функция Баклея-Леверетта аппроксимируется как (1.63), в А подставляется значение функций в узле  $(i, n)$  (кроме производных водонасыщенности).

В качестве корреляций относительных фазовых проницаемостей можно использовать модельные корреляции Кори (1.64) и (1.65). В эти корреляции насыщенность водой должна подставляться на соответствующем шаге. Получение итогового выражения для явной конечно-разностной схемы с аппроксимацией производных по методу



Эйлера для задачи Рапопорта-Лиса (2.3) аналогично подобной схеме для задачи Баклея-Левверетта и предоставляется читателю в практической работе к данной главе, как и производные функции Баклея-Левверетта и ОФП (сначала аналитически, потом подставить численную аппроксимацию в узле).

Поскольку схема (2.3) при учёте (2.5) содержит вторую производную по координате, то её порядок аппроксимации по  $X$  второй, аналогично (1.91). Порядок аппроксимации производной по времени остаётся первым, как и в задаче Баклея-Левверетта.

Проверка устойчивости любой численной схемы для задачи Рапопорта-Лиса затруднена из-за нелинейности по производным в силу (2.5). Однако при учёте малости капиллярного числа задача Рапопорта-Лиса совпадает с задачей Баклея-Левверетта, и можно с хорошей точностью принять условие устойчивости (1.86), выведенное в предыдущей главе.

Сходимость численного решения задачи Рапопорта-Лиса с помощью описанной схемы проверяется путём уменьшения шага по времени, когда решение должно стремиться к решению задачи Баклея-Левверетта при достаточно малых капиллярных числах.

Граничные условия для задачи Рапопорта-Лиса совпадают с граничными условиями для задачи Баклея-Левверетта по методу Лакса-Вендроффа из-за наличия второй производной водонасыщенности по координате.

## **2.3. Численные методы решения задачи Рапопорта-Лиса.**

### **Метод Лакса-Вендроффа**

Применение метода Лакса-Вендроффа к задаче Рапопорта-Лиса во многом аналогично применению этого метода к задаче Баклея-

Леверетта. В этом случае схема (1.94) с учётом (1.95) и (1.96) выглядит следующим образом:

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta T} + \frac{K_{i+1}^n - K_i^n}{\Delta X} + N_c A_i^n = 0, \quad (2.14)$$

где введено обозначение

$$A = F(S_i^n)J'(S_i^n)k_2'(S_i^n) \left( \frac{S_i^n - S_{i-1}^n}{\Delta X} \right)^2 + F'(S_i^n)J'(S_i^n)k_2(S_i^n) \left( \frac{S_i^n - S_{i-1}^n}{\Delta X} \right)^2 + F(S_i^n) \left( J''(S_i^n)k_2(S_i^n) \left( \frac{S_i^n - S_{i-1}^n}{\Delta X} \right)^2 + J'(S_i^n)k_2(S_i^n) \frac{S_{i+1}^n - 2S_i^n + S_{i-1}^n}{\Delta X^2} \right). \quad (2.15)$$

Из этой схемы выражают искомую насыщенность на неизвестном временном слое, что предоставляется читателю в практической работе к настоящей главе.

В качестве корреляций относительных фазовых проницаемостей можно использовать модельные корреляции Кори (1.64) и (1.65). В эти корреляции водонасыщенность должна подставляться на соответствующем шаге.

Поскольку схема (2.14) с учётом (2.15) содержит вторую производную по координате, то её порядок аппроксимации по X второй, аналогично задаче Баклея-Леверетта. Порядок аппроксимации производной по времени остаётся первым, как и в задаче Баклея-Леверетта.

Условие устойчивости метода Лакса-Вендроффа аналогично условию устойчивости явной конечно-разностной схемы с аппроксимацией производных по методу Эйлера из-за тех же соображений.

Сходимость метода Лакса-Вендроффа проверяется аналогично сходимости явной конечно-разностной схемы по методу Эйлера.

Граничные условия совпадают с явной конечно-разностной схемой для задачи Рапопорта-Лиса.

## 2.4. Концевые эффекты в задаче Рапопорта-Лиса

Действие капиллярных сил также приводит к ряду концевых эффектов. Рассмотрим теорию этих эффектов [1]. Из закона сохранения массы (1.1) в одномерном случае

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -m \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.21) (размерную задачу Рапопорта-Лиса) с учётом малости угла (тогда  $\cos\theta=1$ ) получим

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} + \operatorname{div}(F(S)\vec{u}) + \frac{\sigma\sqrt{km}}{\mu_2} \operatorname{div}(k_2(S)F(S)\operatorname{grad}J(S)) = 0. \quad (2.17)$$

Следует проинтегрировать (2.17), тогда

$$u_1 = uF(S) - a^2 m \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.18)$$

с учётом (1.8)

$$u_2 = u - u_1, \quad (2.19)$$

при этом были введены обозначения коэффициента

$$a^2 = \frac{\sigma\sqrt{k}}{\mu_2\sqrt{m}} \quad (2.20)$$

(квадрат показывает неотрицательность коэффициента) и функции

$$\Phi(S) = - \int J'(S)k_2(S)F(S)dS. \quad (2.21)$$

Граничные условия зависят в случае вытеснения нефти водой от гидрофильности или гидрофобности среды, т. е. от смачиваемости скелета породы. Обычно задаются либо отношение скоростей фильтрации фаз, либо водонасыщенность, либо их комбинация.

В гидрофильной среде вытесняемая фаза (нефть) может выходить в свободное пространство (заполненное вытесняющей фазой – водой) путём противотока, причём такое истечение происходит в виде отдельных капель с радиусом, близким к радиусу самых крупных пор  $r_p$

(иногда он оценивается по среднему радиусу). В таком случае на границе при  $x=0$  задаётся условие равенства капиллярных давлений в среде и в капле. Обозначим оба из них в силу их равенства за  $p_k$ .

$$p_k = \frac{2\sigma}{r_p}, \quad (2.22)$$

причём для среднего радиуса пор (в случае такой оценки) справедлива формула Козени-Кармана, известная из теории фильтрации:

$$r_p = \sqrt{\frac{8k}{m}}. \quad (2.23)$$

Также необходимо задавать граничное условие (и рассмотреть соответствующие концевые эффекты) на второй границе при  $x=L$ . Это условие сильно зависит от состояния среды вне рассматриваемой области (и, в том числе, сказывается на проведении экспериментов с керном). Если вне рассматриваемой области находится значительно более высокопроницаемая среда, то из (5) капиллярное давление в этой среде будет пренебрежимо мало (и его можно считать нулевым) по сравнению с капиллярным давлением где-либо в рассматриваемой области с линейным размером  $L$ , кроме границы, на которой должно выполняться равенство капиллярных давлений из его непрерывности. Тогда на границе при  $x=L$  для основной области водонасыщенность должна быть равна  $S^*$  – максимальной насыщенности вытесняющей жидкости, когда функция Леверетта равна нулю (рис. 4), тогда из (5) капиллярное давление равно нулю для гидрофильной среды при вытеснении нефти водой. Из физических соображений для гидрофобной среды, очевидно, в этом случае водонасыщенность должна быть равна остаточной насыщенности вытесняющей жидкости (воды)  $S^*$ . Если производить численное решение задачи Рапопорта-Лиса в размерном случае с учётом этих граничных условий, то будут наблюдаться

вышеописанные концевые эффекты (рис. 2.2). Видно, что насыщенность достаточно резко принимает необходимые граничные значения при приближении к  $x=L$ , вместо значений  $S'_L$  (для гидрофильной среды) и  $S''_L$  (для гидрофобной среды), которые были бы без этих граничных условий. Это отклонение вблизи границы называется **капиллярным концевым эффектом**.

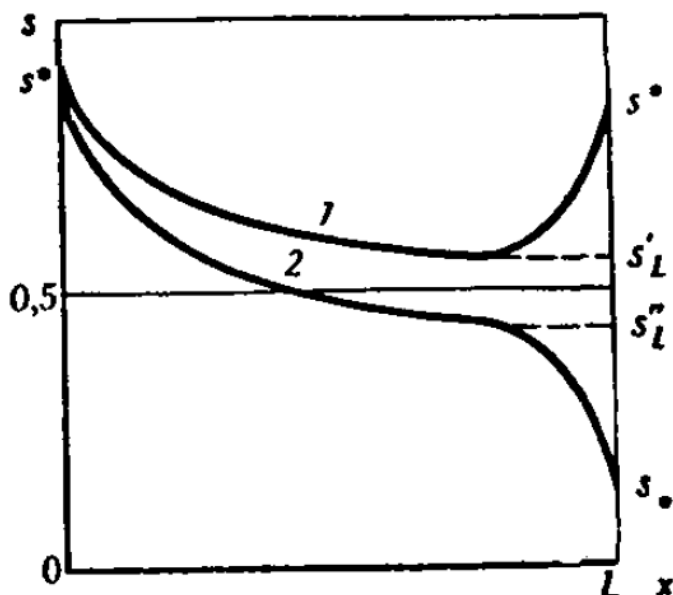


Рис. 2.2. Концевые эффекты в задаче Рапопорта-Лиса для распределения водонасыщенности по координате [1]. 1 – гидрофильная среда, 2 – гидрофобная.

## 2.5. Капиллярная пропитка

При наличии существенных неоднородностей в пласте влияние капиллярных сил на процесс вытеснения может оказаться достаточно большим, что может привести к **капиллярной пропитке** – самопроизвольному впитыванию более смачивающей фазы в пористую среду, насыщенную другой фазой, без внешних воздействий. Для гидрофильных сред это приводит к постепенному увеличению водонасыщенности в пропитываемой области с течением времени, о

чём будет сказано ниже. Капиллярная пропитка может помочь извлечь нефть в случае, если имеется малопроницаемая область с углеводородами, окружённая с остальных сторон высокопроницаемой областью с водой. Тогда в случае противоточной капиллярной пропитки без учёта других факторов смачивающая фаза (вода) будет впитываться, освобождая место для движения несмачивающей (нефти). При этом суммарная скорость фильтрации из-за противотока будет равна нулю, причём с учётом (2.19)

$$u_1 + u_2 = u = 0, \quad (2.24)$$

тогда из (2.18)

$$u_1 = -a^2 m \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (2.25)$$

С учётом (2.21) выражение (2.25) можно переписать в виде

$$u_1 = a^2 m J'(S) k_2(S) F(S) \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (2.26)$$

В этой модели также нужно учесть уравнение для водонасыщенности, которое несложно получить из уравнения неразрывности для воды как несжимаемой жидкости (8) при подстановке в него (2.25) в одномерном случае:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi(S)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.27)$$

При этом по эмпирической модели Баренблатта, Ентова и Рыжика [1] процесс капиллярной пропитки необходимо рассматривать в моменты времени

$$\frac{k}{a^2} \ll t \ll \frac{L^2}{a^2}, \quad (2.28)$$

то есть когда распределение водонасыщенности уже установилось, что отвечает левой части неравенства, но когда ещё процесс не дошёл до границы  $x=L$ , что отвечает правой части неравенства.

Вводя традиционным способом безразмерную автомоделльную переменную

$$\xi = \frac{x}{a\sqrt{t}}, \quad (2.29)$$

где коэффициент  $a$  можно найти из (2.20), а также пересчитав производные по  $x$  и  $t$  (если  $A$  – некоторая функция координаты и времени):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{x}{2at^{\frac{3}{2}}} \frac{dA}{d\xi}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dA}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dA}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{a\sqrt{t}}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dA}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2 t} \frac{d^2 A}{d\xi^2}, \quad (2.33)$$

можем получить из (2.27)

$$-\frac{x}{2at^{\frac{3}{2}}} \frac{dS}{d\xi} - \frac{1}{t} \frac{d^2 \Phi(S)}{d\xi^2} = 0, \quad (2.34)$$

тогда итоговое автомоделльное уравнение с учётом (2.29) примет вид

$$\xi \frac{\partial S}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial^2 \Phi(S)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.35)$$

Граничными условиями для (2.35) являются  $S(0) = S^*$ ,  $S(\infty) = S_0$ , где  $S_0$  – начальная водонасыщенность. Первое условие получено как левое граничное при  $x=0$ , второе – как начальное при  $t=0$ .

Это уравнение может быть решено с помощью специальных функций, но обычно решают уравнение (2.35) численно, как правило, предварительно обезразмеривая его. В итоге получают зависимость водонасыщенности от безразмерного времени  $\tau$  (причём обычно начальную водонасыщенность считают нулевой) (рис. 2.3), из которой

виден рост водонасыщенности с течением времени от начального значения до предельного  $S^*$ .

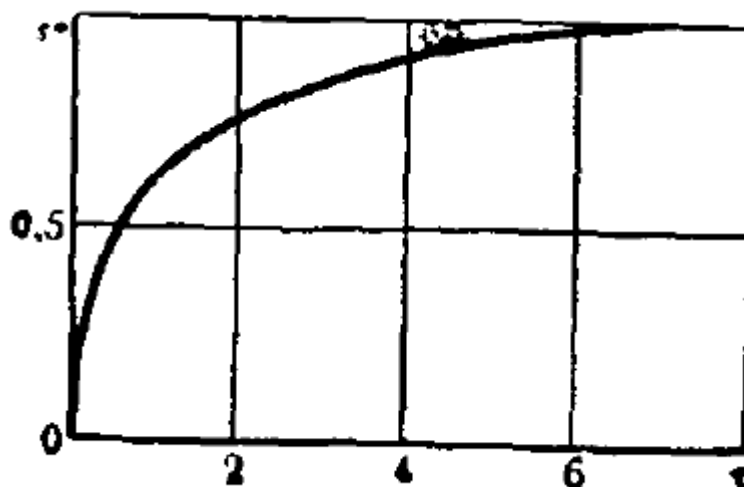


Рис. 2.3. Зависимость водонасыщенности от безразмерного времени при противоточной капиллярной пропитке [1].

#### Вопросы для самопроверки:

1. Чем задача Рапопорта-Лиса отличается от задачи Баклея-Левретта?
2. Как выглядит уравнение Рапопорта-Лиса в общем случае?
3. Как выглядит уравнение Рапопорта-Лиса при одномерной плоскопараллельной фильтрации?
4. Как выглядит уравнение Рапопорта-Лиса при одномерной радиальной фильтрации?
5. Что такое стабилизированная зона?
6. Чему равна ширина стабилизированной зоны?
7. К чему приводит действие капиллярных сил?
8. Какие граничные условия обычно задают при наблюдении концевых эффектов в задаче Рапопорта-Лиса?
9. Чему равно капиллярное давление в среде?
10. Как найти средний радиус пор по формуле Козени-Кармана?



11. Что такое капиллярный концевой эффект?
12. Что такое капиллярная пропитка?
13. В каком случае капиллярная пропитка может помочь фильтрации нефти?
14. Каковы основные уравнения для капиллярной пропитки?
15. Как вводится автомодельная переменная для уравнения капиллярной пропитки?
16. Как меняется водонасыщенность при капиллярной пропитке с течением времени?

## **2.6. Практическая работа**

### **Задача Рапопорта-Лиса**

Построить распределение водонасыщенности в зависимости от координаты для задачи Рапопорта-Лиса с помощью явной конечно-разностной схемы с аппроксимацией производных по методу Эйлера и с помощью метода Лакса-Вендроффа, взять 100 шагов по координате с шагом 0,01, шаг по времени взять  $10^{-5}$ , остаточная нефтенасыщенность равна 0,1, связанная водонасыщенность 0,1, корреляции для ОФП взять (1.64), (1.65), рассматривать безразмерный момент времени 0,1, капиллярные числа 0,01 и 0,001 (рассмотреть 2 случая, посмотреть влияние капиллярного числа), вязкость воды 1 сП, вязкость нефти 2 сП. Сравнить полученное решение с задачей Баклея-Леверетта, полученной при тех же параметрах. Проверить сходимость численных решений с помощью расчётов при шаге по времени  $10^{-6}$ . Сделать выводы и отчёт по работе.

## ГЛАВА 3. МНОГОФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

### 3.1. Обобщённый закон Дарси для трёхфазной фильтрации

Интересен процесс фильтрации при движении смеси нереагирующих между собой и взаимно нерастворимых жидкостей. Капиллярные и массовые силы, как правило, малы (что и показывает решение задачи Рапопорта-Лиса в ряде случаев), поэтому ими можно пренебречь.

Обобщенный закон Дарси для скорости фильтрации  $i$ -той фазы  $v_i$  учитывает относительные фазовые проницаемости и имеет вид:

$$v_i = - \frac{kk_i(S_1, S_2, S_3)}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x}, i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

где  $k$  – абсолютная проницаемость,  $\mu_i$ ,  $k_i$ ,  $S_i$  – соответственно вязкость, относительная фазовая проницаемость (ОФП) и насыщенность  $i$ -той фазы,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  – градиент давления вдоль направления фильтрации  $x$ . Насыщенности фаз удовлетворяют равенству (2) ( $n$  – число фаз).

Если в пористой среде находится система, состоящая из нефти, воды и газа, то проницаемость этой среды необходимо характеризовать тремя фазовыми проницаемостями для нефти, газа и воды. Их величина, также, как и при двухфазном течении, зависит от насыщенности пористой среды фазами, а нередко и от других факторов – структуры порового пространства, физико-химических свойств фаз, самой пористой среды, условий и направления фильтрации.

На рис. 3 (см. «Введение») показаны области насыщенностей, соответствующие одно-, двух- и трёхфазной фильтрации. Вершины треугольной диаграммы соответствуют однофазному случаю для конкретной фазы. Противоположные эти вершинам стороны соответствуют отсутствию данной фазы. При этом выполняется условие равенства суммы насыщенностей трёх фаз единице (2). Области однофазного течения отделены от областей двухфазного и трёхфазного

течений (которые также разделены между собой) линиями. Из рис. 3 (см. «Введение») видно, что при газонасыщенности более 35% подвижным будет только газ (что обусловлено его невысокой вязкостью), а вода и нефть в оставшемся объёме пор будут неподвижны.

При одновременном содержании газа меньше 10% при нулевой нефтенасыщенности и нефти меньше 25% при нулевой газонасыщенности фильтруется только вода, а при малых значениях водонасыщенности и газонасыщенности в движении участвует только нефть. Видны и области двухфазной одновременной фильтрации. В центре диаграммы расположена небольшая область насыщенностей, при которых в потоке одновременно движутся три фазы, но её площадь на диаграмме мала по сравнению со всей площадью треугольника, что говорит о более редком наблюдении на практике трёхфазной фильтрации, чем двухфазной.

Чтобы на треугольной диаграмме (рис. 3.1) определить насыщенности фаз для произвольного состава смеси (произвольной точки), необходимо опустить перпендикуляры на каждую из сторон треугольника. Длина перпендикуляра  $X_i$ , проведённого к стороне, противоположной вершине  $C_i$  (соответствующей 100% насыщенности  $i$ -той фазы) соответствует процентному содержанию  $i$ -той фазы, поскольку по свойству равностороннего треугольника сумма длин перпендикуляров к сторонам этого треугольника равна его высоте  $H$ , которой можно присвоить значение 100% (или 1, согласно (2), тогда длины перпендикуляров будут соответствовать насыщенностям фаз).

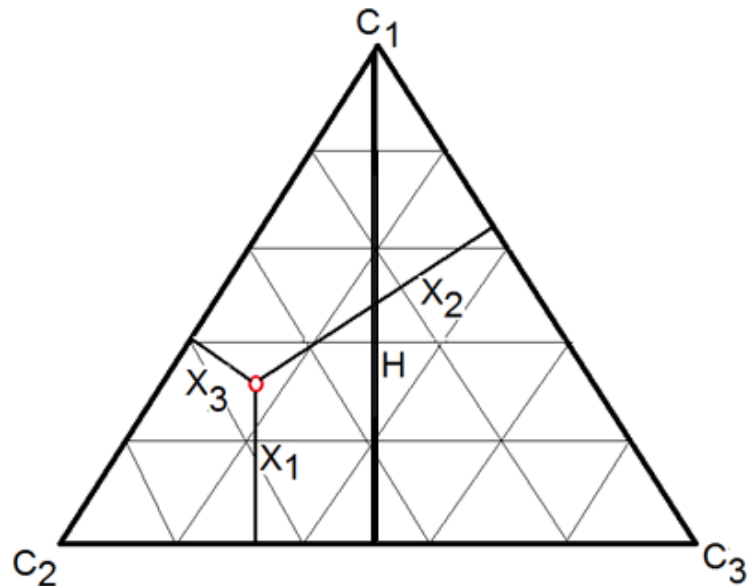


Рис. 3.1. Насыщенности фаз для произвольной точки диаграммы Гиббса-Розебома.

Относительные проницаемости можно определить с помощью треугольных диаграмм, показанных на рис. 3.2, либо различных теоретических и экспериментальных корреляций. Фазы можно обозначить соответственно «Н», «г» и «в».

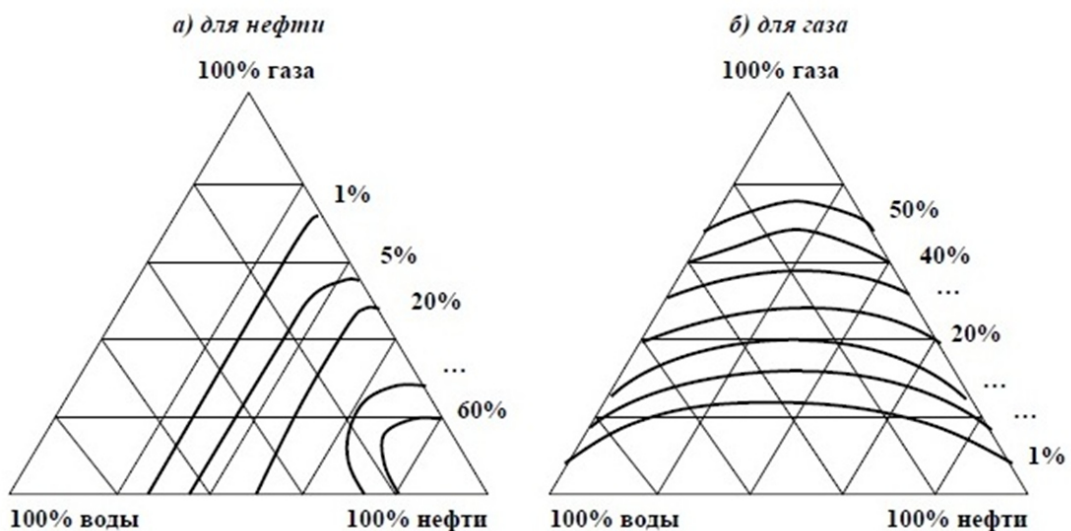


Рис. 3.2. Треугольные диаграммы относительных проницаемостей [2].

При этом следует иметь в виду, что фазовые проницаемости являются функциями двух независимых насыщенностей  $S_H$  и  $S_e$  (с учётом замены газонасыщенности  $S_g=1-S_H-S_e$ ).

Диаграммы строятся так: параллельно каждой стороне равностороннего треугольника проводятся прямые, вдоль которых насыщенность одной из фаз постоянна (в силу постоянного расстояния до стороны, противоположной вершине со 100% насыщенностью этой фазы). Каждая насыщенность изменяется от нуля вдоль стороны треугольника до 100% на противолежащей вершине, причём это изменение обязательно образует замкнутый цикл по часовой стрелке. При пересечении двух прямых, параллельных соответствующим сторонам треугольника, внутри него образуются точки, в которых насыщенности равны определённым значениям  $S_H$ ,  $S_e$ ,  $S_g$  (рис. 3.1). Также на этих диаграммах отмечаются линии одинаковых ОФП (**изопермы**), характер зависимости которых определяется различной степенью смачивания твёрдых зёрен породы фазами, причём относительная фазовая проницаемость наиболее смачивающей фазы – воды – практически зависит только от водонасыщенности  $S_e$  и почти не зависит от нефте- и газонасыщенности  $S_H$  и  $S_g$ , а относительная проницаемость наименее смачивающей фазы – газа – также зависит только от газонасыщенности на практике. Это справедливо для гидрофильных пород. Для ОФП нефти в этом случае существуют различные модели, например, предложенные Стоуном. В случае гидрофобных пород роль фаз изменяется.

Необходимо отметить, что к уравнениям движения (по закону Дарси) стоит добавить законы сохранения масс (уравнения неразрывности) для каждой из фаз, а для замыкания системы – ещё и уравнения состояния и соотношения, учитывающие фазовые переходы при совместной многофазной фильтрации, изменение физических

свойств флюидов. Эти модели достаточно сложные, поэтому используется ряд упрощений, о которых пойдёт речь ниже.

### 3.2. Модель Маскета-Миреса

**Модель Маскета-Миреса (модель чёрной нефти)** является простейшей моделью трёхфазной фильтрации. В её основе лежит предположение, что углеводородная система состоит из двух фаз: жидкой нефтяной (тяжелые фракции нефти) и газовой. При этом нефть нерастворима в газе, а газ может быть как свободным (нерастворённым), так и быть растворённым в нефти. Растворимостью углеводородных компонентов в воде пренебрегают. Также вводится допущение об изотермическом движении. В силу малости капиллярных эффектов ими пренебрегают (эти эффекты рассматривалось ранее в задаче Рапопорта-Лиса).

По закону Генри, который является линейным, растворимость газа в нефти определяется следующим соотношением:

$$V_{гр0} = \alpha V_{но}, \quad (3.2)$$

где  $V_{гр0}$ ,  $V_{но}$  – соответственно объем растворенного газа и объем нефти при стандартных (температура 20°C и давление 1 атм) условиях;  $\alpha$  – коэффициент объемной растворимости газа, причём  $\alpha = \alpha(p)$ .

Следует ввести понятие объёмных коэффициентов нефти  $B_H$  и воды  $B_B$ :

$$B_H = \frac{V_H}{V_{но}}, \quad (3.3)$$

$$B_B = \frac{V_B}{V_{во}}, \quad (3.4)$$

где  $V_H$  и  $V_B$  – соответственно объёмы нефти и воды в пластовых условиях,  $V_{во}$  – объём воды в стандартных условиях.

Из уравнений (3.3)–(3.4) и определения плотности как отношения массы к соответствующему объёму следует:

$$\rho_{B0} = B_B \rho_B, \quad (3.5)$$

$$\rho_{H0} = B_H \rho_H, \quad (3.6)$$

где  $\rho_{B0}$  и  $\rho_{H0}$  – плотности воды и нефти в стандартных условиях,  $\rho_B$  и  $\rho_H$  – плотности воды и нефти в пластовых условиях.

Уравнение неразрывности для каждой из фаз имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \rho_i S_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_i) = 0. \quad (3.7)$$

С учётом выражений (3.3)–(3.4) и уравнений движения (3.1) для водной и нефтяной фаз после деления (3.7) на проницаемость  $k$ , а также на соответствующие плотности воды и нефти в стандартных условиях, которые постоянны, получается:

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_B}{B_B} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_B}{\mu_B B_B} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (3.8)$$

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_H}{B_H} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_H}{\mu_H B_H} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (3.9)$$

где  $k_i = k_i(S_H, S_e)$ ,  $B_e = B_e(p)$ ,  $B_H = B_H(p)$ ,  $\mu_i = \mu_i(p)$ .

Необходимо учесть возможность движения газа как в свободном, так и в растворённом состоянии, чтобы получить верное уравнение движения (фильтрации) газа. При этом растворенный газ переносится со скоростью фильтрации нефти  $v_H$ , а его плотность  $\rho_{gp}$  равна:

$$\rho_{gp} = \frac{M_{gp}}{V_H} = \frac{\rho_G V_{gp0}}{B_H V_{H0}} = \frac{\rho_G \alpha V_{H0}}{B_H V_{H0}} = \frac{\rho_G \alpha}{B_H}, \quad (3.10)$$

где  $M_{gp}$  – масса растворённого газа.

Тогда суммарная массовая скорость фильтрации газа  $(\rho_g v_g)_\Sigma$  определится из соотношения:

$$(\rho_g v_g)_\Sigma = \rho_g v_g + \rho_{gp} v_H = \rho_g v_g + \frac{\rho_g \alpha}{B_H} v_H. \quad (3.11)$$

Полная масса газообразной среды в единице объёма пористой среды:

$$(m \rho_g S_g)_\Sigma = m \rho_g S_g + m \rho_{gp} S_g = m \rho_g S_g + \frac{m \rho_g \alpha S_g}{B_H}. \quad (3.12)$$

Таким образом, с учётом (3.1), (3.11), (3.12) из (3.7) получаем дифференциальное уравнение фильтрации для газообразной фазы:

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_{\Gamma} S_{\Gamma} + \frac{\rho_{\Gamma} S_{\Gamma} \alpha(p)}{B_{\text{H}}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{k_{\Gamma} \rho_{\Gamma}}{\mu_{\Gamma}(p)} + \frac{k_{\text{H}} \rho_{\Gamma} \alpha}{\mu_{\text{H}}(p) B_{\text{H}}} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (3.13)$$

Дифференциальные уравнения (3.8), (3.9) и (3.13) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения насыщенностей  $S_{\text{H}}$ ,  $S_{\text{e}}$  (а с учётом (2) – и  $S_{\text{e}}=1-S_{\text{H}}-S_{\text{e}}$ ) и давления  $p$ , остальные величины считаются известными.

Видно, что, несмотря на принятые допущения, была получена нелинейная как по давлению, так и по насыщенности (в том числе в силу корреляций ОФП) система уравнений, решение которой сложно, а потому требует, как правило, численных методов.

Подробнее вышерассмотренная теория изложена в книге Басниева, Кочиной, Максимова [2].

### 3.3. Функция Христиановича

Необходимо рассмотреть газированную жидкость.

Следует напомнить, что расход жидкости вычисляется по формуле:

$$Q_{\text{ж}} = - \frac{k k_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} \frac{dp}{dx} F, \quad (3.14)$$

где индекс «ж» означает параметры, относящиеся к жидкости,  $F$  – площадь фильтрации. Здесь  $k_{\text{ж}}(S)$  – известная функция насыщенности. Кроме того, как было показано ранее, давление  $p$  – также функция насыщенности, например, по формуле (5). Тогда через насыщенность  $S$  связаны между собой параметры  $k_{\text{ж}}$  и  $p$ , и, зная также зависимость  $k_{\text{e}}(S)$ , которая часто близка к 1, можно построить зависимость  $k_{\text{ж}}(p)$  (рис. 3.3).



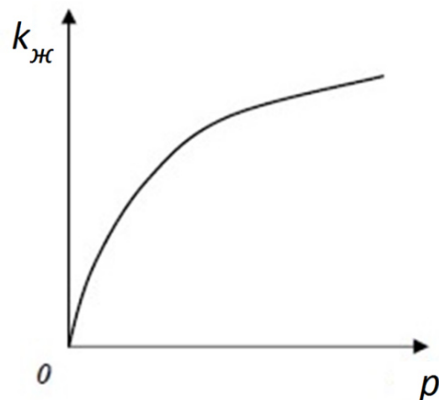


Рис. 3.3. Изменение относительной проницаемости в зависимости от давления.

При известной зависимости  $k_{ж}(p)$  можно ввести функцию, полный дифференциал которой равен:

$$dH = k_{ж}(p)dp, \quad (3.15)$$

которая называется функцией Христиановича и имеет размерность давления, поскольку ОФП жидкости является величиной безразмерной.

С учётом (3.15) уравнение (3.14) для газированной жидкости можно записать в виде:

$$Q_{ж} = -\frac{k}{\mu_{ж}} \frac{dH}{dx} F. \quad (3.16)$$

Для установившегося движения газированной жидкости справедливы все формулы, выведенные для однородной несжимаемой жидкости, если в них заменить давление  $p$  на функцию Христиановича  $H$ :

$$H = \int k_{ж}(p)dp + C. \quad (3.17)$$

При этом плотность и вязкость жидкой фазы считаются постоянными.

Крайне важно отметить, что функция Христиановича определяется с точностью до константы.

Таким образом, при использовании функции Христиановича установившийся дебит жидкой фазы газированной жидкости для скважины, расположенной в центре горизонтального пласта с достаточно удалённым контуром питания, при плоскорадиальной фильтрации определяется по формуле Дюпюи:

$$Q_{\text{ж}} = \frac{2\pi kh (H_{\text{к}} - H_{\text{з}})}{\mu_{\text{ж}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{с}}}}, \quad (3.18)$$

где  $h$  – мощность пласта (то есть его продуктивная толщина),  $H_{\text{к}}$  и  $H_{\text{з}}$  – значения функции Христиановича на контуре питания и забое скважины соответственно,  $R_{\text{к}}$  и  $r_{\text{с}}$  – радиусы контура питания и скважины соответственно. Следует напомнить, что контур питания – место в пласте, где давление становится равным невозмущённому (т. е. пластовому) давлению, поскольку давление ближе к добывающей скважине становится уже меньше пластового для притока жидкости к ней.

### **3.4. Фильтрация многокомпонентных смесей с учётом фазовых переходов**

Следует напомнить, что вышерассмотренная модель Маскета-Миреса была построена на основе предположения, что имеющаяся многокомпонентная смесь состоит из двух частей – жидкой, которая не может быть растворена в газе, и газовой, которая может быть как в свободном состоянии, так и в растворённом в жидкости. В реальности нефти и природные газы состоят из многих компонентов, но на практике этот компонентный состав разбивают с неплохой точностью на 3-4 группы.

При движении углеводородной газожидкостной смеси (ГЖС) каждая из фаз (жидкость и газ) движется со своей скоростью, тогда скорость жидкой фазы  $v_{\text{ж}}$  и скорость газовой фазы  $v_{\text{г}}$ . Каждый компонент

может содержаться как в жидкой, так и в газовой фазе. Учитывая это, уравнение неразрывности для  $i$ -го компонента можно записать в виде (перенеся слагаемое с производной по времени в правую часть):

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_{\Gamma}\rho_{\Gamma}g_i) + \frac{\partial}{\partial x}(v_{\text{ж}}\rho_{\text{ж}}l_i) = -m\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\Gamma}(1-S)g_i + \rho_{\text{ж}}Sl_i), \quad (3.19)$$

где  $\rho_{\Gamma}$  и  $\rho_{\text{ж}}$  – плотности газа и жидкости соответственно;  $g_i$ ,  $l_i$  – доли  $i$ -го компонента в общей массе газовой и жидкой фаз соответственно;  $S$  – насыщенность порового пространства жидкой фазой. При этом плотности существенно зависят от компонентного состава смеси и давления  $p$  в рассматриваемой точке пласта:  $\rho_{\Gamma} = \rho_{\Gamma}(g_1, g_2, \dots, g_n, p)$ ,  $\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}}(l_1, l_2, \dots, l_n, p)$ , где  $n$  – число компонентов в смеси. Параметры  $g_i$  и  $l_i$  определяются с помощью фазовых диаграмм.

Следует рассмотреть характерные линии на фазовой диаграмме (рис. 3.4) при наличии трёх фаз. Зелёная кривая линия – **бинодаль** – линия, отделяющая двухфазную зону (находится внутри бинодали) от однофазной. Прямые зелёные линии соответствуют нодам.

**Нода** – линия, связывающая равновесные составы фаз, вдоль неё составы фаз не меняются, меняется только соотношение долей.

Если фаза с номером 2 соответствует жидкости, а 3 – газу, то точка пересечения ноды с левой частью бинодали соответствует чисто жидкой фазе, с правой – чисто газовой (рис. 3.4). Для произвольной точки ноды компонентный состав определяется по правилу рычага: соотношение объёмов фаз в равновесии определяется соотношением отрезков, на которые точка состава компонентов разделяет ноду:

$$\frac{V_l}{V_l + V_g} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}, \quad (3.20)$$

где  $V_l$  и  $V_g$  – объём жидкой и газовой фаз,  $Y_1$  и  $Y_2$  – доли жидкой и газовой фаз.

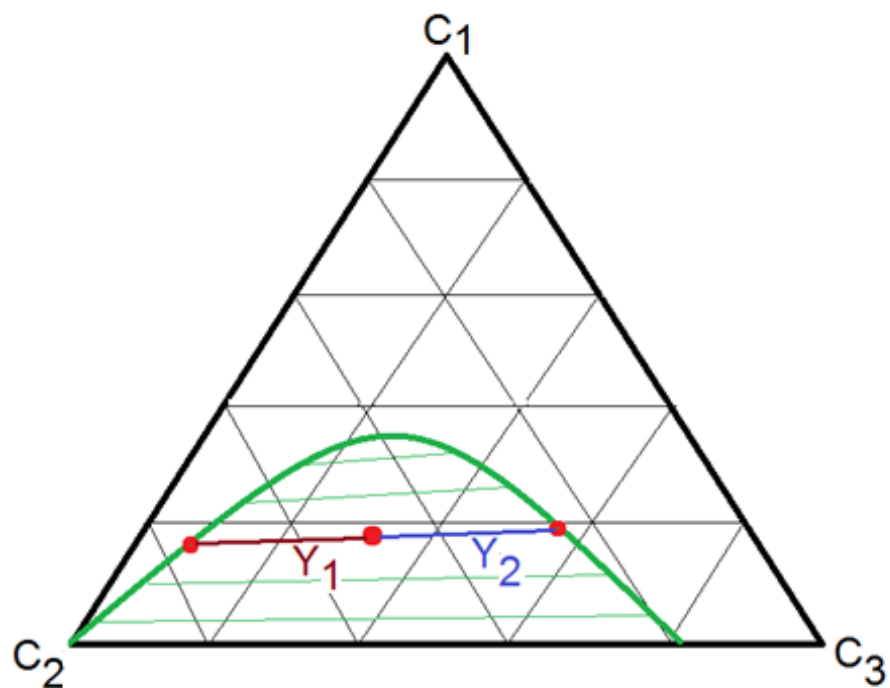


Рис. 3.4. Характерные линии на фазовой диаграмме.

При наличии воды фазовое поведение углеводородных систем существенно изменяется, чем было при её отсутствии, главным образом, из-за того, что жидкие углеводороды, как правило, полностью смешиваются друг с другом, но для воды и углеводорода это справедливо лишь при очень высоких температурах, т. е. наблюдается ограниченная их растворимость. Это приводит к появлению нескольких новых видов фазовых равновесий:

- газ – раствор воды в углеводородах;
- газ – раствор углеводородов в воде;
- углеводородная жидкость – водная жидкость;
- трехфазное равновесие (газ и две жидкие фазы);
- равновесие газ – газ.

Если не учитывать растворимость углеводородов в воде, то система уравнений для случая совместной линейной фильтрации смеси

углеводородных компонентов и воды при использовании (3.1), (2), (3.9) и (3.19)  $i$ -го компонента имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{\Gamma} \rho_{\Gamma} g_i}{\mu_{\Gamma}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} l_i}{\mu_{\text{ж}}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\Gamma} (1 - S_{\text{H}} - S_{\text{ж}}) g_i + \rho_{\text{ж}} S_{\text{ж}} l_i), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{\text{H}}}{\mu_{\text{H}} B_{\text{H}}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S_{\text{H}}}{B_{\text{H}}} \right), \quad (3.22)$$

где газонасыщенность выражена из (2) через нефтенасыщенность и насыщенность жидкостью.

В этой системе (3.21)–(3.22) ОФП газа  $k_{\text{г}}$  и жидкости  $k_{\text{ж}}$  являются функциями насыщенностей нефти  $S_{\text{H}}$  и жидкости  $S_{\text{ж}}$  и давления, а вязкости газа и жидкости соответственно зависят от компонентного состава смеси и давления:  $\mu_{\Gamma} = \mu_{\Gamma}(g_1, g_2, \dots, g_n, p)$ ,  $\mu_{\text{ж}} = \mu_{\text{ж}}(l_1, l_2, \dots, l_n, p)$

Из фазовых соотношений определяются дополнительные зависимости:

$$\sum_{i=1}^n l_i = 1 \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i = 1 \quad (3.24)$$

С учётом (3.23) и (3.24), а также зависимостей долей компонентов от давления, следует записать:  $l_n = l_n(l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, p)$ ,  $g_n = g_n(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, p)$ , тогда

$$\mu_{\Gamma} = \mu_{\Gamma}(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, p),$$

$$\mu_{\text{ж}} = \mu_{\text{ж}}(l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, p),$$

$$\rho_{\Gamma} = \rho_{\Gamma}(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, p),$$

$$\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}}(l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, p).$$

В случае установившегося движения правые части уравнений (3.21)–(3.22) обращаются в ноль. Тогда с учётом (3.1) можно ввести в рассмотрение долю  $i$ -го компонента в общем газожидкостном потоке:

$$\Gamma_i = \frac{v_{\Gamma} \rho_{\Gamma} g_i + v_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} l_i}{v_{\Gamma} \rho_{\Gamma} + v_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}}} = \frac{\frac{k k_{\Gamma}}{\mu_{\Gamma}} \frac{\partial p}{\partial x} \rho_{\Gamma} g_i + \frac{k k_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} \frac{\partial p}{\partial x} \rho_{\text{ж}} l_i}{\frac{k k_{\Gamma}}{\mu_{\Gamma}} \frac{\partial p}{\partial x} \rho_{\Gamma} + \frac{k k_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} \frac{\partial p}{\partial x} \rho_{\text{ж}}} = \frac{f g_i + l_i}{f + 1}, \quad (3.25)$$

где введено обозначение

$$f = \frac{k_{\Gamma} \rho_{\Gamma} \mu_{\text{ж}}}{k_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} \mu_{\Gamma}}. \quad (3.26)$$

В случае установившейся фильтрации  $\Gamma_i = \text{const}$ .

При установившейся фильтрации (3.21) при введении функции Христиановича для  $i$ -того компонента смеси углеводородов  $H$  приобретает вид

$$\Delta H = 0, \quad (3.27)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа (в рассматриваемом одномерном случае – вторая производная по  $x$ ),

$$H = \int \left( \frac{k_{\Gamma} \rho_{\Gamma} g_i}{\mu_{\Gamma}} + \frac{k_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} l_i}{\mu_{\text{ж}}} \right) dp + C. \quad (3.28)$$

Иными словами, решение задачи установившегося движения многокомпонентной системы сводится к интегрированию уравнения Лапласа.

### Вопросы для самопроверки:

1. Как выглядит обобщённый закон Дарси для трёхфазной фильтрации?
2. Как строятся треугольные диаграммы ОФП?
3. Какие уравнения нужно добавить к закону Дарси для замыкания системы?
4. Каковы основные допущения модели Маскета-Миреса?
5. Как записывается закон Генри?
6. Что такое объёмные коэффициенты нефти и воды?
7. В каком виде газ содержится в пласте в модели Маскета-Миреса?
8. Чему равна плотность растворённого газа?

9. Из каких соображений получено дифференциальное уравнение фильтрации для газообразной фазы в модели Маскета-Миреса?
10. Что такое функция Христиановича?
11. Как найти жидкой фазы дебит газированной жидкости, зная функцию Христиановича?
12. Что такое нода?
13. Как найти состав газовой фазы из фазовой диаграммы?
14. Каковы основные виды равновесий при ограниченной растворимости углеводородов в воде?
15. Чему равна сумма долей всех компонентов в жидкой фазе?
16. От чего зависит вязкость газа и жидкости в рассматриваемой модели?
17. Чему равна доля некоторого компонента в общем газожидкостном потоке?
18. Как найти функцию Христиановича в рассматриваемой модели?

### 3.5. Практические задачи

**Пример 3.1.** Известны водонасыщенность 40%, насыщенность газом 0,3. Фазовые проницаемости зависят от насыщенностей так:  $k_e = S_e^2$ ,  $k_n = S_n^2$ ,  $k_g = 1$  ( типовые квадратичные корреляции), вязкость нефти составляет 10 сП, вязкость воды 1 сП, вязкость газа 0,01 сП. Фильтрация идёт плоскопараллельно. Перепад давления на расстоянии 10 м составляет 10 атм, площадь фильтрации 100 м<sup>2</sup>, проницаемость 100 мД. Найти расход каждой из трёх фаз.

**Решение.** Насыщенность нефтью:  $S_n = 1 - S_e - S_g = 1 - 0,4 - 0,3 = 0,3$ .

Следует рассчитать ОФП:  $k_e = S_e^2 = 0,4^2 = 0,16$ ;  $k_n = S_n^2 = 0,3^2 = 0,09$ .

Расход  $i$ -той фазы ( $i = n, g, e$ , где « $n$ », « $g$ », « $e$ » означают нефть, газ и воду соответственно) при плоскопараллельной фильтрации

вычисляется по формуле (с учётом неотрицательности физических величин в (3.1)):

$$Q_i = v_i F = \frac{k k_i \Delta p}{\mu_i L} F,$$

где  $F$  – площадь фильтрации.

Тогда расход нефти

$$Q_n = \frac{0,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \cdot 0,09 \cdot 10^6 \text{ Па}}{10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}} \cdot \frac{10^6 \text{ Па}}{10 \text{ м}} 100 \text{ м}^2 = 0,09 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

расходы воды и газа соответственно

$$Q_b = \frac{0,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \cdot 0,16 \cdot 10^6 \text{ Па}}{10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}} \cdot \frac{10^6 \text{ Па}}{10 \text{ м}} 100 \text{ м}^2 = 1,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

$$Q_g = \frac{0,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \cdot 1 \cdot 10^6 \text{ Па}}{10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}} \cdot \frac{10^6 \text{ Па}}{10 \text{ м}} 100 \text{ м}^2 = 0,1 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

Ответ:  $Q_n = 9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ ;  $Q_b = 1,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ ;  $Q_g \approx 0,1 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ .

**Пример 3.2.** Для рассматриваемого участка пласта длиной 100 м, проницаемостью 0,5 Д нефтенасыщенность составляет 70%, фазовые проницаемости зависят от насыщенных так:  $k_n = S_n^2$ ,  $k_e = 1$ , плотность газа составляет 40 кг/м<sup>3</sup>, объёмный коэффициент нефти 1,1, фильтрация является плоскопараллельной, перепад давления на этом участке пласта составляет 55 атм, вязкость газа 0,01 сП, вязкость нефти 10 мПа·с, объёмный коэффициент растворимости 0,75. Чему равна суммарная массовая скорость фильтрации газа на рассматриваемом участке пласта?

**Решение.** ОФП нефти  $k_n = S_n^2 = 0,7^2 = 0,49$ .

Для расчёта необходимо использовать формулу (3.11), но в ней неизвестны скорости.

Из (3.1) при плоскопараллельной фильтрации с учётом неотрицательности физических величин искомые скорости:

$$v_g = \frac{k k_g \Delta p}{\mu_g L}; \quad v_n = \frac{k k_n \Delta p}{\mu_n L}.$$



При их подстановке в (3.11) получается итоговая расчётная формула:

$$(\rho_r v_r)_\Sigma = \rho_r k \frac{\Delta p}{L} \left( \frac{k_r}{\mu_r} + \frac{k_H \alpha}{\mu_H B_H} \right),$$

$$(\rho_r v_r)_\Sigma = 40 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \cdot \frac{55 \cdot 10^5 \text{ Па}}{100 \text{ м}} \left( \frac{1}{10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}} + \frac{0,49 \cdot 0,75}{10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot 1,1} \right),$$

$$(\rho_r v_r)_\Sigma \approx 0,11 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Ответ:  $(\rho_r v_r)_\Sigma \approx 0,11 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$

**Пример 3.3.** ОФП некоторой жидкости зависит от давления следующим образом:

$$k_{\text{ж}} = \frac{p^2}{p_o^2},$$

где  $p_o$  – константа, причём  $p_o \geq p$ . Найти функцию Христиановича этой жидкости.

**Решение.** Используем формулу (3.17). Тогда

$$H = \int \frac{p^2}{p_o^2} dp + C = \frac{p^3}{3p_o^2} + C.$$

Ответ:  $H = \frac{p^3}{3p_o^2} + C.$

**Пример 3.4.** В пласте проницаемостью 10 мД и мощностью 15 м находится газированная жидкость – вода с вязкостью 1 сП. Если радиус контура питания равен 100 м, радиус скважины 10 см, функции Христиановича без учёта констант на контуре питания и забое равны соответственно 10 МПа и 3 МПа, чему будет равен дебит этой жидкости?

**Решение.** Для нахождения дебита газированной жидкости следует использовать формулу (3.18). Поскольку в ней содержится разность функций Христиановича, то в константах нет необходимости, и можно получить:

$$Q_{ж} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2 \cdot 15 \text{ м} \cdot (10 - 3) \cdot 10^6 \text{ Па}}{10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot \ln \frac{100 \text{ м}}{0,1 \text{ м}}} \approx 9,55 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

Ответ:  $Q_{ж} \approx 9,55 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ .

**Пример 3.5.** Известны корреляции ОФП  $k_e=1$ ,  $k_{ж}=S_{ж}^2$ , плотности газа  $10 \text{ кг/м}^3$ , жидкости  $1000 \text{ кг/м}^3$  (вода), насыщенность порового пространства жидкостью  $0,3$ , вязкости газа  $0,05 \text{ сП}$ , жидкости  $1 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ , доля рассматриваемого компонента в общей массе газовой фазы  $0,2$ , а в общей массе жидкой фазы  $0,3$ . Чему равна доля этого компонента в общем газожидкостном потоке?

**Решение.** ОФП жидкости с использованием данной по условию корреляции в рассматриваемом случае равна  $k_{ж}=0,3^2=0,09$ . Обозначим рассматриваемый компонент за  $i$ -тый. Тогда для расчёта искомой доли этого компонента в общем газожидкостном потоке можно использовать формулы (3.25) и (3.26). Подставим числовые значения:

$$f = \frac{1 \cdot 10 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}}{0,09 \cdot 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 0,05 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}} \approx 2,22,$$

$$\Gamma_i = \frac{2,22 \cdot 0,2 + 0,3}{2,22 + 1} \approx 0,231.$$

Ответ:  $\Gamma_i \approx 0,231$ .

### Задачи:

3.1. Известны газонасыщенность  $14\%$ , нефтенасыщенность  $0,7$ . Фазовые проницаемости зависят от насыщенностей так:  $k_e=S_e^2$ ,  $k_n=S_n^2$ ,  $k_e=1$  ( типовые квадратичные корреляции), вязкость нефти составляет  $2 \text{ сП}$ , вязкость воды  $1 \text{ сП}$ , вязкость газа  $0,05 \text{ сП}$ . Фильтрация идёт плоскопараллельно. Градиент давления составляет  $0,5 \text{ атм/м}$ , площадь фильтрации  $19 \text{ м}^2$ , проницаемость  $0,5 \text{ Д}$ . Найти расход каждой из трёх фаз в  $\text{м}^3/\text{сут}$ .

Ответ:  $Q_n \approx 10,1 \text{ м}^3/\text{сут}$ .,  $Q_e \approx 1,05 \text{ м}^3/\text{сут}$ .,  $Q_g \approx 821 \text{ м}^3/\text{сут}$ .

3.2. Для рассматриваемого участка пласта проницаемостью 1 Д давление зависит от координаты  $x$  так:  $p = \frac{2p_0}{L^2} x^2$ , где постоянные  $p_0=16$  атм,  $L=50$  м, водонасыщенность составляет 20%, газонасыщенность 30%, фазовые проницаемости зависят от насыщенностей так:  $k_H=S_H^2$ ,  $k_e=1$ , плотность газа составляет 35 кг/м<sup>3</sup>, объёмный коэффициент нефти 1,09, вязкость газа 0,05 сП, вязкость нефти 2 сП, объёмный коэффициент растворимости 0,5. Чему равна суммарная массовая скорость фильтрации газа при  $x=2$  м?

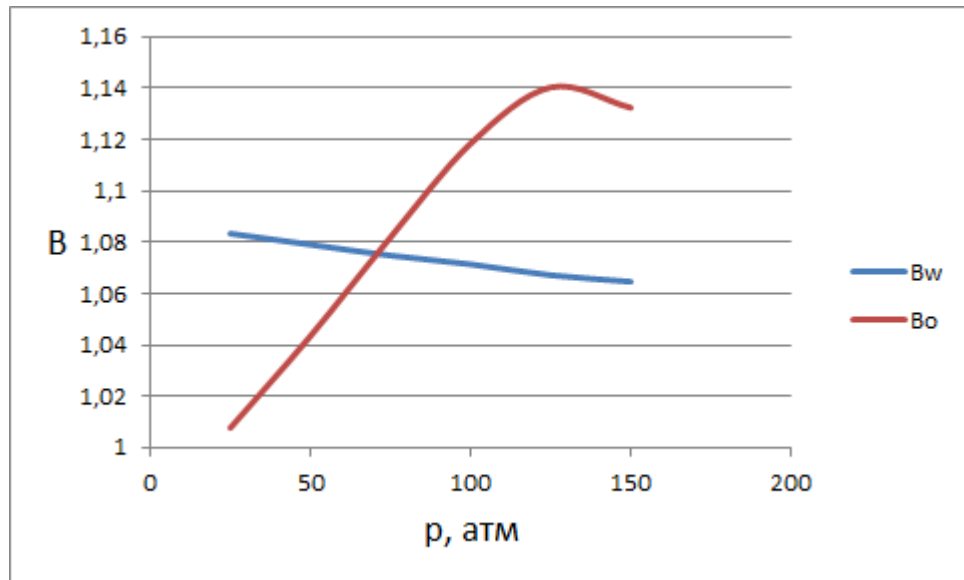
Ответ:  $(\rho_T v_T)_\Sigma \approx 3,59 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ .

3.3. Объём нефти в стандартных условиях составляет 15000 м<sup>3</sup>, а объём воды при тех же условиях равен 12000 м<sup>3</sup>. Известна зависимость объёмов нефти и воды в пластовых условиях от пластового давления (см. таблицу 3.1).

Таблица 3.1. Данные для задачи 3.3.

$p$ , атм	$V_H$ , м <sup>3</sup>	$V_B$ , м <sup>3</sup>
25	15110	13000
50	15650	12950
75	16230	12900
100	16780	12860
125	17110	12810
150	16990	12780

По этим точкам построить зависимости объёмных коэффициентов нефти и воды от давления.



Ответ:

- 3.4. Известно, что насыщенность нефтью 0,25, водой 32,5%, вязкость воды 1 мПа·с, дебит воды 500 м<sup>3</sup>/сут., массовый расход нефти 43,2 т/сут., плотность нефти 800 кг/м<sup>3</sup>. Используя типовые квадратичные корреляции ОФП  $k_e = S_e^2$ ,  $k_H = S_H^2$ , найти вязкость нефти.

Ответ:  $\mu_H \approx 5,48$  мПа·с.

- 3.5. Найти плотность растворённого метана с молярной массой 16 г/моль при давлении 1,2 МПа, температуре 320 К, если объёмный коэффициент растворимости 0,7, объёмы нефти в стандартных условиях 15050 м<sup>3</sup>, в пластовых 16320 м<sup>3</sup>. Газ считать идеальным. Универсальная газовая постоянная  $8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ .

Ответ:  $\rho_{ep} \approx 4,66$  кг/м<sup>3</sup>.

- 3.6. Найти полную массу газообразной среды в единице объёма пористой среды, если газ – метан с молярной массой 16 г/моль при давлении 3 МПа, температуре 80°С, объёмный коэффициент растворимости 0,55, объёмный коэффициент 1,15, пористость 30%, нефтенасыщенность 0,8, водонасыщенность 0,15. Газ считать идеальным. Универсальная газовая постоянная  $8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ .

Ответ:  $(m\rho_g S_g)_\Sigma \approx 0,363 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

3.7. Имеется некоторая газированная жидкость. Известно, что  $p_o$  – константа. Найти функцию Христиановича рассматриваемой системы, если ОФП жидкости

А)

$$k_{\text{ж}} = \frac{\frac{p^2}{p_o^2} + \frac{p}{p_o}}{2}, p_o \geq p;$$

Б)

$$k_{\text{ж}} = 1 + \ln \frac{p}{p_o}, 0,4 \leq \frac{p}{p_o} \leq 1.$$

Ответы: А)  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{p^3}{3p_o^2} + \frac{p^2}{2p_o} \right) + C$ ; Б)  $H = p \ln \frac{p}{p_o} + C$ .

3.8. Имеется некоторая газированная жидкость, насыщенность которой зависит от давления следующим образом:  $S_{\text{ж}} = \frac{p}{p_o} - 1, 1 \leq \frac{p}{p_o} \leq 2, p_o$  – константа. Используя типовые квадратичные корреляции ОФП  $k_{\text{ж}} = S_{\text{ж}}^2$ , найти функцию Христиановича рассматриваемой системы.

Ответ:

$$H = p_o \frac{\left( \frac{p}{p_o} - 1 \right)^3}{3} + C.$$

3.9. Относительная фазовая проницаемость некоторой газированной жидкости зависит от давления так:

$$k_{\text{ж}} = \sqrt{\frac{p}{p_k}}, p_k \geq p,$$

где  $p_k$  – постоянное давление на контуре питания, равное 5 МПа. Дебит этой газированной жидкости 100 м<sup>3</sup>/сут., её вязкость 1 сП, радиус скважины 0,1 м, давление на забое 2 МПа, радиус контура питания 50 м, мощность пласта 25 м. Чему равна проницаемость пласта?

Ответ:  $k \approx 18,4$  мД.

3.10. Функция Христиановича некоторой газированной жидкости определена так:

$$H = 1,5 \frac{p^2}{p_{пл}} + C, p_{пл} \geq 3p,$$

где  $p_{пл}$  – постоянное пластовое давление в невозмущённой зоне, равное 20 атм.. Массовый дебит этой газированной жидкости 86,4 т/сут., её плотность 1000 кг/м<sup>3</sup> и вязкость 1 мПа·с, радиус скважины 10 см, давление на забое 10 атм, мощность пласта 30 м, проницаемость 20 мД. Чему равен радиус контура питания?

Ответ:  $R_k \approx 481$  м.

3.11. Относительная фазовая проницаемость газированной воды зависит от давления так:

$$k_{ж} = \left( \frac{p}{p_k} \right)^{0,7}, p_k \geq p,$$

где  $p_k$  – постоянное давление на контуре питания, равное 20 атм. Вязкость этой газированной воды 1 сП, её относительная вязкость к вязкости нефти 0,5, доля объёмного дебита газа в объёмном дебите газированной воды 0,2, радиус скважины 0,1 м, давление на забое 15 атм, радиус контура питания 100 м, мощность пласта 20 м, проницаемость 1 Д, чему равны объёмные дебиты газированной воды, нефти, а также обводнённость продукции?

Указание: обводнённость продукции считать как отношение объёмного дебита воды (без газа) к сумме объёмных дебитов нефти и газированной воды.

Ответ:  $Q_{ж} \approx 8,28 \cdot 10^{-3} \frac{м^3}{с}$ ;  $Q_{н} \approx 4,55 \cdot 10^{-3} \frac{м^3}{с}$ ; обводнённость 51,6%.

3.12. Известны корреляции ОФП  $k_e=1$ ,  $k_{ж}=S_{ж}^2$ , плотности газа 35 кг/м<sup>3</sup>, жидкости 1000 кг/м<sup>3</sup> (вода), насыщенность порового пространства 50%, вязкости газа 0,07 сП, жидкости 1 сП, доля рассматриваемого компонента в общей массе газовой фазы 0,3, а в общей массе

жидкой фазы 0,2. Чему равна доля этого компонента в общем газожидкостном потоке?

Ответ:  $\Gamma_i \approx 0,267$ .

3.13. Найти функцию Христиановича для  $i$ -того компонента смеси углеводородов, считая газ идеальным. Плотность газа зависит от давления, а все остальные величины считать постоянными.

Ответ:

$$H = \frac{k_{\Gamma} \rho_{\Gamma} g_i p}{2\mu_{\Gamma}} + \frac{k_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} l_i}{\mu_{\text{ж}}} p + C.$$

## ГЛАВА 4. МНОГОФАЗНАЯ СИСТЕМА В СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ

### 4.1. Равновесие многофазной системы

Находящаяся в пласте нефть (или любой другой флюид), как правило, является многокомпонентной и многофазной системой. Если рассматривать эту систему в состоянии равновесия, то можно определить компонентный и фазовый состав такой системы. Это используется на практике для получения необходимых фракций нефти и для правильного описания поведения флюидов.

В программных комплексах часто используются 2 модели:

1. Модель чёрной нефти, по которой считается, что нефть состоит из двух компонентов: нефть (или жидкий компонент) и газ, что было рассмотрено в предыдущей главе.
2. Композиционная модель нефти, учитывающая подробный состав рассматриваемой системы.

Для моделирования систем в состоянии равновесия необходимо ввести ряд параметров. Так как флюиды, как правило, бывают жидкие и газообразные, то можно рассматривать только наличие этих двух агрегатных состояний и двух соответствующих фаз, считая, что между жидкими компонентами между собой отсутствует граница раздела (то же верно и для газообразных), что реализуется для нефти. Примем это допущение.

Пусть  $x_i$  – мольная доля  $i$ -того компонента в жидкой фазе,  $y_i$  – мольная доля  $i$ -того компонента в газовой фазе. **Константа фазового равновесия (коэффициент распределения)  $K_i$**  для  $i$ -того компонента, равная 1 в состоянии равновесия, может быть определена следующим образом:

$$K_i = \frac{y_i}{x_i}, i = \overline{1, N}, \quad (4.1)$$



где  $N$  – общее число компонентов смеси.

Для растворов жидкостей и смесей газов вводится **парциальное давление**  $i$ -го компонента  $p_i$  – то давление компонента, если бы он занимал весь объём системы. Как известно из химии, **закон Рауля для растворов жидкостей** записывается в виде:

$$p_i = x_i p_{si}, \quad (4.2)$$

где  $p_{si}$  – давление насыщенных паров  $i$ -го компонента.

Из курса общей физики **для смесей газов** известен **закон Дальтона**:

$$p_i = y_i p, \quad (4.3)$$

где  $p$  – полное давление смеси.

С учётом (4.2) и (4.3) выражение для константы фазового равновесия (4.1) примет вид:

$$K_i = \frac{p_{si}}{p}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.4)$$

**Мольная доля вещества** – отношение числа молей вещества ( $i$ -того компонента) к общему числу молей всех веществ, находящихся в данной фазе или смеси, что указывается отдельно.

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = 1. \quad (4.6)$$

Если  $G$  – мольная доля всей газовой фазы, а  $L$  – мольная доля всей жидкой фазы, причём

$$G + L = 1, \quad (4.7)$$

то мольная доля  $i$ -того компонента в смеси может быть выражена так:

$$n_i = x_i L + y_i G, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.8)$$

Система уравнений (4.1), (4.5), (4.7), (4.8) замкнута относительно искомым переменных  $x_i, y_i, L, G$  (всего  $(2N+2)$  переменных и столько же уравнений) и является **системой уравнений материального баланса** для рассматриваемой системы.

Из (4.1)

$$y_i = K_i x_i. \quad (4.9)$$

Тогда из (4.8) с учётом (4.7) и (4.9)

$$x_i = \frac{n_i - y_i G}{L} = \frac{n_i - K_i x_i G}{1 - G} \quad (4.10)$$

или

$$x_i = \frac{n_i}{1 - G + GK_i} = \frac{n_i}{1 + G(K_i - 1)}. \quad (4.11)$$

С учётом (4.9) и (4.11) мольная доля  $i$ -того компонента в газовой фазе

$$y_i = \frac{n_i K_i}{1 + G(K_i - 1)}. \quad (4.12)$$

Если подставить (4.11) в (4.5), то можно получить итоговое уравнение для определения  $G$ , которое в случае многофазных многокомпонентных систем решается численно, а после определения  $G$  из (4.7) легко определить  $L$ .

Для примера можно рассмотреть трёхкомпонентную двухфазную систему ( $N=3$ ). Тогда при подстановке (4.11) в (4.5) получается уравнение

$$\frac{n_1}{1 + G(K_1 - 1)} + \frac{n_2}{1 + G(K_2 - 1)} + \frac{n_3}{1 + G(K_3 - 1)} = 1, \quad (4.13)$$

откуда

$$A_G G^3 + B_G G^2 + C_G G + D_G = 0, \quad (4.14)$$

где коэффициенты уравнения определяются по формулам:

$$A_G = -(K_1 - 1)(K_2 - 1)(K_3 - 1), \quad (4.15)$$

$$B_G = (n_1 - 1)(K_2 - 1)(K_3 - 1) + (n_2 - 1)(K_1 - 1)(K_3 - 1) + (n_3 - 1)(K_1 - 1)(K_2 - 1), \quad (4.16)$$

$$C_G = n_1(K_2 + K_3 - 2) + n_2(K_1 + K_3 - 2) + n_3(K_1 + K_2 - 2) - (K_1 + K_2 + K_3 - 3), \quad (4.17)$$

$$D_G = n_1 + n_2 + n_3 - 1 = 0, \quad (4.18)$$

где учтено, что сумма долей компонентов в смеси равна 1.

Подробный вывод уравнения (4.14) с учётом коэффициентов (4.15) – (4.18) предоставляется читателю в практической работе к данной главе.

Уравнение (4.14) может быть решено численными методами либо по формулам Кардано. Для простоты в практической работе к настоящей главе предлагается решить это уравнение **итерационным методом Ньютона (методом касательных)**. Пусть имеется уравнение вида  $f(x)=0$ . Можно построить график функции  $y=f(x)$  (рис. 4.1), пересекающий ось абсцисс в точке  $x_u$ , являющейся решением уравнения  $f(x)=0$ . Проведём в точке  $(x_1, f(x_1))$  касательную  $y_{кас}$  к этому графику (зададим начальное приближение). Она пересечёт ось абсцисс в некоторой точке  $x_2$ . Снова проведём в точке  $(x_2, f(x_2))$  касательную к графику  $y=f(x)$ , которая пересечёт ось абсцисс в точке  $x_3$ . Будем продолжать итерационную процедуру, пока касательная к графику  $y=f(x)$  в некоторой точке  $(x_n, f(x_n))$  не пересечёт ось абсцисс в точке  $x_{n+1}$ , которая попадёт в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_u$ , показанную на рис. 4.1 круглыми скобками. Заметим, что геометрический смысл производной функции  $f'(x_1)$  в точке  $x_1$  – тангенс угла наклона  $\alpha$  касательной к графику функции в этой точке. Из рис. 4.1 видно, что

$$f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}, \quad (4.19)$$

откуда

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (4.20)$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.21)$$

Формула (4.21) – **общий вид формулы итерационного метода Ньютона**, называемого иногда из своего геометрического смысла методом касательных. Вычисления прекращаются, когда  $x_{n+1} = x_n + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность.

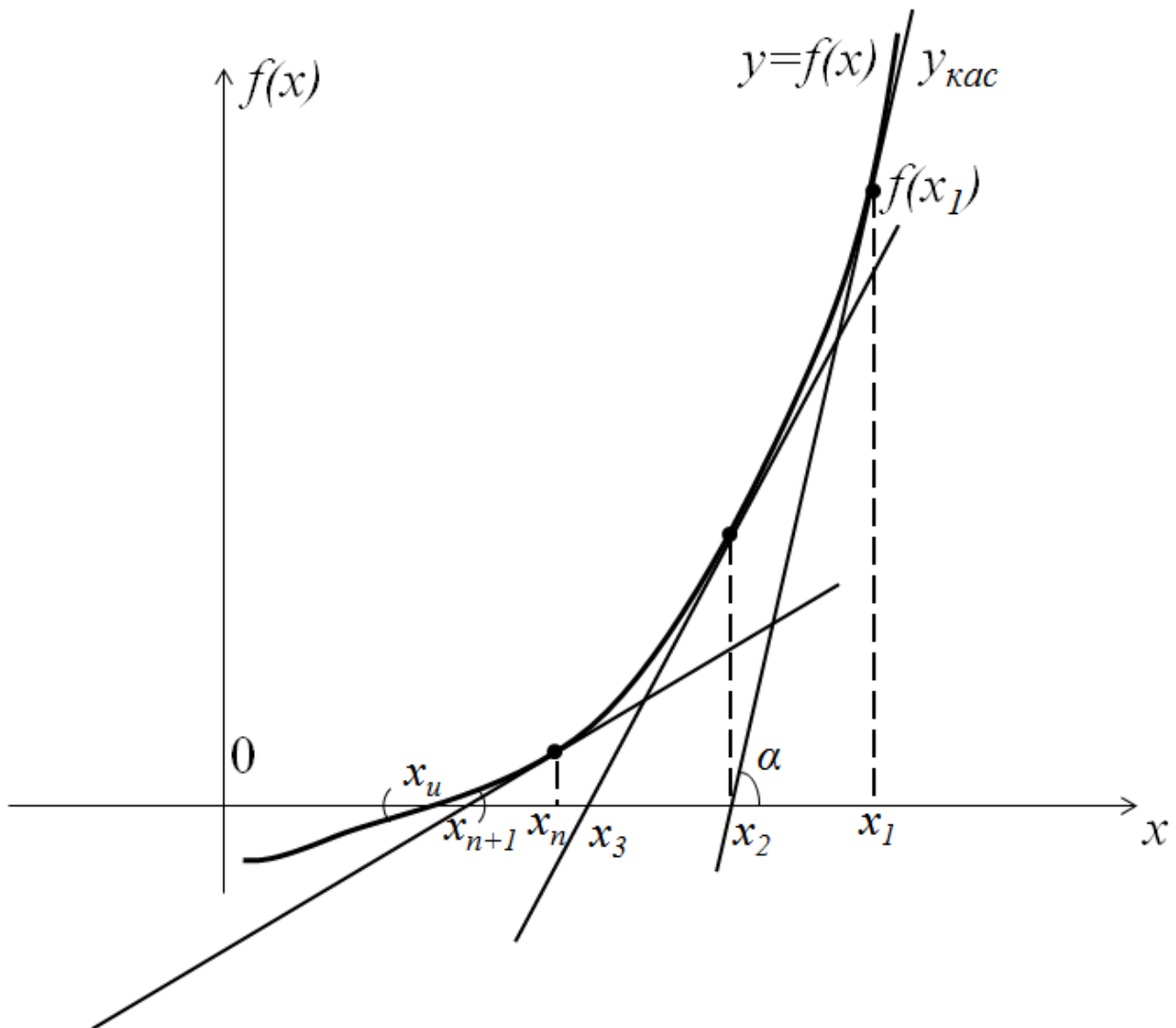


Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация итерационного метода Ньютона.

## 4.2. Различные уравнения состояния. Фугитивность.

### Коэффициент фугитивности

Прежде всего, следует отметить, что давление, температура и объём системы в целом и её компонентов в частности описываются уравнениями состояния. Простейшим из них является уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV_g = \frac{m}{M}RT, \quad (4.22)$$

где  $p$ ,  $V_g$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $T$  – давление, объём, масса, молярная масса и температура газа соответственно,  $R$  – универсальная газовая постоянная, равная  $8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ .

Это уравнение описывает поведение идеального газа, то есть такого газа, в котором нет взаимодействия между молекулами и их размеры пренебрежимо малы.

Для описания поведения реальных газов и систем существует более 150 уравнений состояния, из которых наиболее простым является уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (4.23)$$

где  $a$ ,  $b$  – коэффициенты (поправки, постоянные) Ван-дер-Ваальса, зависящие от рассматриваемого вещества,  $V$  – молярный объём, а наиболее точным – вириальное разложение:

$$pV = RT \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i(T)}{V^i}\right), \quad (4.24)$$

где  $B_i(T)$  – вириальные коэффициенты, причём первое слагаемое в (4.24) соответствует идеальному газу, второе слагаемое учитывает бинарные (парные) столкновения молекул газа, третье – столкновения трёх частиц и т. д.

Уравнение Ван-дер-Ваальса получено из (4.22) введением поправок. Из термодинамики и статистической физики известно, что поправка  $a$  в уравнении Ван-дер-Ваальса учитывает внутреннее давление (равное  $a/V^2$ ), обусловленное силами притяжения молекул, а поправка  $b$  – учетверённый собственный объём молекул (иногда называют поправкой на силы отталкивания, связанной с конечным, а не бесконечно малым размером молекул).

Часто для реальных газов используют понятие коэффициента сверхсжимаемости  $z$ , который показывает, насколько газ далёк от идеального, у которого  $z=1$ . Тогда уравнения состояния реального газа записываются в виде

$$pV = zRT, \quad (4.25)$$

откуда

$$z = \frac{pV}{RT}. \quad (4.26)$$

Из молекулярной физики и термодинамики известно, что существует критическая точка.

**Критическая температура** – точка на графике изотерм реального газа, где исчезает всякое различие между жидкостью и паром. Более подробно эта теория изложена в книге Савельева [9].

В критической точке можно найти параметры рассматриваемой системы, если она подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса. Если выразить из (4.23) давление, то можно получить

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \quad (4.24)$$

Поскольку критическая точка на изотерме является точкой перегиба в координатах  $(p, V)$  [9], то первая и вторая производные давления по объёму при постоянной температуре равны 0

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0, \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0. \quad (4.26)$$

Из системы уравнений (4.24)–(4.26) получается

$$V_{кр} = 3b, \quad (4.27)$$

$$p_{кр} = \frac{a}{27b^2}, \quad (4.28)$$

$$T_{кр} = \frac{8a}{27bR}, \quad (4.29)$$

где индекс «кр» означает параметр в критической точке. Вывод критических параметров предоставляется в практической работе к данной главе. Кроме того, с учётом (3.18) можно записать

$$z_{кр} = \frac{p_{кр} V_{кр}}{RT_{кр}}. \quad (4.30)$$

Нередко используется и понятие ацентрического фактора  $\omega$ , показывающего отклонение формы молекулы от сферической. Он связан с критическим коэффициентом сверхсжимаемости [8]:

$$z_{кр} = 0,291 - 0,08\omega. \quad (4.31)$$

Для давления насыщенных паров  $p_s$  Ширковский [11] рекомендует использовать такую формулу:

$$p_{si} = p \left( \frac{p_{кри}}{p} \cdot e^{5,372697(1+\omega_i)(1-T_{кри}/T)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.32)$$

где  $\omega_i$  – ацентрический фактор  $i$ -го компонента, рассчитываемый по формуле (4.31) через коэффициент сверхсжимаемости  $i$ -го компонента в критической точке, известный из (4.30) при критических параметрах этого же компонента.

Кубические уравнения состояния достаточно хорошо описывают поведение реальных систем. На практике для описания поведения углеводородных систем наиболее часто используются уравнения Редлиха-Квонга и Пенга-Робинсона, которые являются кубическими

относительно объёма уравнениями, как и уравнение Ван-дер-Ваальса, но являются эмпирическими, а не теоретическими.

Уравнение Редлиха-Квонга (для 1 моля смеси) имеет вид [1]:

$$p = \frac{RT}{V - b_{RK0}} - \frac{a_{RK0}}{\sqrt{TV}(V + b_{RK0})}, \quad (4.33)$$

где коэффициенты Редлиха-Квонга для смеси  $a_{RK0}$  и  $b_{RK0}$  определяются из правил смешения, например, таких [3]:

$$a_{RK0} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_i d_j \sqrt{a_{RKi} a_{RKj}} (1 - c_{ij}), \quad (4.34)$$

$$b_{RK0} = \sum_{i=1}^N d_i b_{RKi}, \quad (4.35)$$

где  $i, j$  – индексы, соответствующие номеру компонента,  $d_i$  – мольная доля  $i$ -го компонента в смеси,  $c_{ij}$  – коэффициент бинарного взаимодействия между  $i$ -ым и  $j$ -ым компонентами, определяемый экспериментально (характеризует взаимное влияние компонентов), значение которого смотрят в специальных таблицах и справочниках для соответствующих веществ, например, в [3], постоянные Редлиха-Квонга  $i$ -го компонента определяются так [3]:

$$a_{RKi} = 0,42747 \frac{R^2 T_{кpi}^{2,5}}{p_{кpi}}, \quad (4.36)$$

$$b_{RKi} = 0,08664 \frac{RT_{кpi}}{p_{кpi}}, \quad (4.37)$$

где  $T_{кpi}$  и  $p_{кpi}$  – критические температура и давление  $i$ -го компонента.

Уравнение Пенга-Робинсона (для 1 моля смеси) имеет вид [3]:

$$p = \frac{RT}{V - b_{PR0}} - \frac{a_{PR0}}{V^2 + 2b_{PR0}V - b_{PR0}^2}, \quad (4.38)$$

где коэффициенты Пенга-Робинсона для смеси  $a_{PR0}$  и  $b_{PR0}$  определяются из правил смешения, например, таких [3]:



$$a_{PR0} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_i d_j \sqrt{a_{PRi} a_{PRj}} (1 - c_{ij}), \quad (4.39)$$

$$b_{PR0} = \sum_{i=1}^N d_i b_{PRi}, \quad (4.40)$$

где коэффициенты Пенга-Робинсона  $i$ -го компонента определяются так [3]:

$$a_{PRkpi} = 0,457235 \frac{R^2 T_{kpi}^2}{p_{kpi}}, \quad (4.41)$$

$$a_{PRi}(T) = a_{PRkpi} \alpha(T_{ri}, \omega_i), \quad (4.42)$$

$$\alpha(T_{ri}, \omega_i) = (1 + m_{\omega_i} (1 - T_{ri}^{0,5}))^2, \quad (4.43)$$

$$m_{\omega_i} = 0,37464 + 1,54226 \omega_i - 0,26992 \omega_i^2, \quad (4.44)$$

$$T_{ri} = \frac{T}{T_{kpi}}, \quad (4.45)$$

$$b_{PRi} = 0,077796 \frac{RT_{kpi}}{p_{kpi}}. \quad (4.46)$$

Нередко объём в кубический уравнениях состояния заменяют на коэффициент сверхсжимаемости, получая вид уравнения через  $z$ . Для уравнения Редлиха-Квонга (4.33) с учётом (4.26):

$$z^3 - z^2 + (A_{RK} - B_{RK} - B_{RK}^2)z - A_{RK}B_{RK} = 0, \quad (4.47)$$

где введены обозначения

$$A_{RK} = \frac{a_{RK0} p}{R^2 T^{2,5}}, \quad (4.48)$$

$$B_{RK} = \frac{b_{RK0} p}{RT}. \quad (4.49)$$

Для (4.38) с учётом (4.26) получается вид через коэффициент сверхсжимаемости:

$$z^3 - (1 - B_{PR})z^2 + (A_{PR} - 2B_{PR} - 3B_{PR}^2)z - (A_{PR}B_{PR} - B_{PR}^2 - B_{PR}^3) = 0, \quad (4.50)$$

где введены обозначения

$$A_{PR} = \frac{a_{PR0} p}{R^2 T^2}, \quad (4.51)$$

$$B_{PR} = \frac{b_{PR0}p}{RT}. \quad (4.52)$$

Приведение уравнений (4.33) и (4.38) к виду через коэффициент сверхсжимаемости предоставляется читателю в практической работе к данной главе.

Однако при моделировании обычно отдельно рассматриваются жидкое и газовое агрегатные состояния смеси (жидкая и газовая фазы (группы фаз) смеси). Название фазы справедливо, поскольку обычно граница раздела в углеводородных смесях проходит только между разными агрегатными состояниями. Поэтому рассматриваются мольные доли  $i$ -го компонента в жидкой  $x_i$  и газовой  $y_i$  фазах. Тогда уравнение Редлиха-Квонга (4.47) примет вид:

$$z_k^3 - z_k^2 + (A_{Rkk} - B_{Rkk} - B_{Rkk}^2)z_k - A_{Rkk}B_{Rkk} = 0, \quad (4.53)$$

где индекс  $k=g,l$ ,  $g$  означает газовую фазу,  $l$  – жидкую,  $z_k$  – коэффициент сверхсжимаемости  $k$ -ой фазы смеси, а также введены обозначения

$$A_{Rkk} = \frac{a_{Rk0k}p}{R^2T^{2,5}}, \quad (4.54)$$

$$B_{Rkk} = \frac{b_{Rk0k}p}{RT}, \quad (4.55)$$

где  $a_{Rk0k}$  и  $b_{Rk0k}$  – коэффициенты Редлиха-Квонга для  $k$ -ой фазы смеси, рассчитываемые по правилам смешения (4.34) и (4.35) при подстановке вместо  $d_i$  мольной доли  $x_i$  для жидкой фазы и  $y_i$  для газовой (при индексе  $j$  аналогично).

Уравнение Пенга-Робинсона (4.50) аналогично примет вид:

$$z_k^3 - (1 - B_{PRk})z_k^2 + (A_{PRk} - 2B_{PRk} - 3B_{PRk}^2)z_k - (A_{PRk}B_{PRk} - B_{PRk}^2 - B_{PRk}^3) = 0, \quad (4.56)$$

где введены обозначения

$$A_{PRk} = \frac{a_{PR0k}p}{R^2T^2}, \quad (4.57)$$

$$B_{PRk} = \frac{b_{PR0k}p}{RT}, \quad (4.58)$$

в которых  $a_{PR0k}$  и  $b_{PR0k}$  – коэффициенты Пенга-Робинсона для  $k$ -ой фазы смеси, рассчитываемые по правилам смешения (4.34) и (4.35) при подстановке вместо  $d_i$  мольной доли  $x_i$  для жидкой фазы и  $y_i$  для газовой (при индексе  $j$  аналогично).

Важным понятием является фугитивность (летучесть).

**Фугитивность (летучесть)**  $k$ -ого агрегатного состояния (фазы)  $f_{ik}$  – возможность вещества перейти из текущего агрегатного состояния в это  $k$ -ое состояние, чем она выше, тем выше вероятность перехода в данное агрегатное состояние (или его сохранение в этом состоянии, если вещество уже в нём находится),  $k=g,l$ .

Для характеристики фугитивности вводится понятие коэффициента фугитивности (летучести)  $i$ -того компонента в  $k$ -ом агрегатном состоянии (фазе)  $\varphi_{ik}$ :

$$\varphi_{ik} = \frac{f_{ik}}{d_i p}, \quad (4.59)$$

где вместо  $d_i$  подставляется мольная доля  $x_i$  для жидкой фазы и  $y_i$  для газовой.

Этот коэффициент определяется с помощью специальных корреляций, например, из книги Гиматудинова и Ширковского [4]:

$$\varphi_{ik} = \exp\left(\frac{b_{PRi}}{b_{PR0k}}(z_k - 1) - \ln(z_k - B_{PRk}) - F_k \ln \frac{z_k + 2,414B_{PRk}}{z_k - 0,414B_{PRk}}\right), \quad (4.60)$$

где  $b_{PRi}$  и  $b_{PR0k}$  – соответствующие коэффициенты Пенга-Робинсона для  $i$ -го компонента и  $k$ -ой фазы смеси,  $B_{PRk}$  – коэффициент, рассчитываемый по формуле (4.58) при подстановке коэффициента Пенга-Робинсона для  $k$ -ой фазы смеси  $b_{PR0k}$ ,  $z_k$  – коэффициент сверхсжимаемости  $k$ -ой фазы смеси, рассчитываемый по выбранному уравнению состояния (4.53) или (4.56), кроме того, введено обозначение

$$F_k = \frac{A_{PRk}}{2\sqrt{2}B_{PRk}} \left( \frac{2}{a_{PR0k}} \sum_{i=1}^N d_i a_{PRi} - \frac{b_{PRi}}{b_{PR0k}} \right), \quad (4.61)$$

где  $A_{PRk}$  – коэффициент, рассчитываемый по формуле (4.57) при подстановке коэффициента Пенга-Робинсона для  $k$ -ой фазы смеси  $a_{PR0k}$ ,  $a_{PRi}$  – соответствующий коэффициент Пенга-Робинсона для  $i$ -го компонента,  $d_i$  – соответствующая мольная доля  $i$ -того компонента (вместо неё подставляются  $x_i$  для жидкой и  $y_i$  для газовой фаз соответственно),  $N$  – число компонентов в смеси.

Тогда константа равновесия  $i$ -того компонента может быть пересчитана следующим образом:

$$K_i = \frac{f_{ig}}{f_{il}}. \quad (4.62)$$

В состоянии термодинамического равновесия эта константа должна быть равна 1.

Далее следует рассмотреть **классический алгоритм расчёта фазового равновесия многокомпонентной углеводородной системы**:

1. Задаются мольные доли компонентов в смеси  $n_i$ , точность расчётов  $\varepsilon$ , пластовые давление  $p$  и температура  $T$ , критические параметры компонентов, например, из [8].
2. Задаются из справочников [8] или рассчитываются ацентрические факторы каждого компонента  $\omega_i$ , например, с использованием эмпирической корреляции (4.31):

$$z_{кри} = 0,291 - 0,08\omega_i,$$

где  $z_{кри}$  – критический коэффициент сверхсжимаемости  $i$ -го компонента, рассчитываемый по формуле (4.26) при подстановке в неё критических параметров этого компонента (критического давления  $p_{кри}$ , критического объёма  $V_{кри}$ , критической температуры  $T_{кри}$ ):

$$z_{kpi} = \frac{p_{kpi} V_{kpi}}{RT_{kpi}}$$

То есть

$$\omega_i = \frac{0,291 - \frac{P_{kpi} v_{kpi}}{RT_{kpi}}}{0,08}$$

3. Рассчитываются давления насыщенных паров всех компонентов с использованием эмпирических корреляций, например, (4.32).
4. Считаются константы фазового равновесия всех компонентов из выражения (4.4).
5. Из решения уравнения для  $G$ , получаемого при подстановке (4.11) в (4.5) (из (4.14) в случае трёх компонентов), определяется мольная доля всей газовой фазы  $G$ , после чего из (4.7) можно рассчитать мольную долю всей жидкой фазы  $L$ .
6. Рассчитываются мольные доли каждого компонента в жидкой  $x_i$  и газовой  $y_i$  фазах из (4.11) и (4.12).
7. Считаются коэффициенты компонентов для выбранного уравнения состояния (Редлиха-Квонга или Пенга-Робинсона), а затем по правилам смешения – коэффициенты смеси для жидкой ( $k=l$ ) и газовой ( $k=g$ ) фаз. Коэффициенты бинарного взаимодействия берутся из специальных таблиц, например [3].
8. Считаются коэффициенты сверхсжимаемости для жидкой  $z_l$  и газовой  $z_g$  фаз смеси из выбранного уравнения состояния (4.53) или (4.56). Желательно расчёт вести тем же методом, что и нахождение  $G$  (для большей возможности повышения точности расчётов). В предлагаемой работе к настоящей главе следует использовать итерационный метод Ньютона.
9. Рассчитываются коэффициенты фугитивности каждого компонента в жидкой и газовой фазах из (4.60), причём при использовании уравнения Редлиха-Квонга необходимо для

(4.60) ещё рассчитать коэффициенты уравнения Пенга-Робинсона, используемые в этой формуле.

10. Рассчитываются фугитивности каждого компонента в жидкой и газовой фазах из (4.59):

$$f_{ik} = \varphi_{ik} d_i p.$$

11. Пересчитываются константы фазового равновесия из (4.62).

12. Если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^N (1 - K_i) \leq \varepsilon,$$

то выводятся на экран значения мольных долей  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $G$ ,  $L$  (компонентный состав системы) и расчёт заканчивается, причём в качестве проверки правильности расчётов следует убедиться в выполнении замыкающих соотношений (4.5) – (4.7), иначе идёт возврат в пункт 5.

### **Вопросы для самопроверки:**

1. Какие модели нефти чаще всего используются в программных комплексах?
2. Что такое мольная доля вещества?
3. Как найти константу фазового равновесия для рассматриваемого компонента?
4. Как записать систему уравнений материального баланса для многокомпонентной многофазной системы через мольные доли?
5. Чем отличается уравнение Ван-дер-Ваальса от уравнения Менделеева-Клапейрона?
6. Что такое коэффициент сверхсжимаемости газа?
7. Что такое критическая температура?
8. Зачем применяются правила смешения?
9. Что такое фугитивность?

### 4.3. Практическая работа

#### Расчёт фазового поведения многокомпонентной углеводородной системы

Необходимо рассчитать компонентный состав и смоделировать фазовое поведение трёхкомпонентной углеводородной системы. Для этого следует использовать приведённый в разделе 4.2 классический алгоритм. Задать можно 3 любых компонента из предельных углеводородов в любых соотношениях мольных долей компонентов в смеси  $n_i$  (с учётом суммы долей, равной 1), пластовое давление и температуру также можно выбирать студенту, однако отлаживать программу рекомендуется на системе, состоящей из метана, пропана и н-бутана с соответствующими долями 0,4; 0,5; 0,1, при пластовом давлении 9 МПа и пластовой температуре 370 К. Критические параметры задаются по таблицам, например, из [8]. Рекомендуемая точность  $\varepsilon=0,01$ . Для расчётов выбрать одно из двух уравнений состояния (Редлиха-Квонга или Пенга-Робинсона) на усмотрение студента или преподавателя, решать это уравнение и уравнение (4.14) необходимо итерационным методом Ньютона. Также необходимо получить уравнение (4.14) и привести оба уравнения состояния (Редлиха-Квонга и Пенга-Робинсона) к виду через коэффициент сверхсжимаемости, получить критические параметры. Большую часть работы студенту предлагается выполнить самостоятельно. Точность расчётов всюду в одной программе следует использовать одну и ту же. В качестве результатов получить компонентный состав системы, провести анализ результатов, сделать соответствующие выводы и написать отчёт.

## ГЛАВА 5. НЕРАВНОВЕСНАЯ ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

### 5.1. Неравновесность распределения фаз в пористой среде. Неравновесная двухфазная фильтрация

В основе теории двухфазной фильтрации лежит представление, что распределение фаз полностью известно в любой точке пространства, если задано локальное значение насыщенности  $S$  (водонасыщенности, а нефтенасыщенность может быть легко найдена с учётом (2)). Физический смысл такого распределения в том, что из всех возможных распределений реализуется термодинамически наиболее выгодное (равновесное), которое при наличии неоднородностей устанавливается через определённое, нередко длительное время. В наиболее простом случае при двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей (воды и нефти) термодинамическое равновесие определяется капиллярным равновесием. Тогда из капиллярной теории [1] время установления равновесия  $\tau$  (время релаксации) может быть эмпирически оценено из соотношения:

$$\tau \approx \frac{\mu L^2}{k \Delta p_c}, \quad (5.1)$$

где  $\mu$  – вязкость наиболее вязкой из двух жидкостей,  $L$  – характерный размер элемента неоднородности среды,  $k$  – его проницаемость,  $\Delta p_c$  – разность капиллярных давлений двух фаз.

Однако для времени релаксации иногда применяют и другие оценочные соотношения, но (5.1) – самое часто используемое, дающее при применении в неравновесной теории фильтрации для расчёта ряда других величин результаты, близкие к реальным.

При выбранном масштабе осреднения  $L$  при описании двухфазного течения можно задать и масштаб времени, которое отделяет процессы, описываемые классической теорией вытеснения, от процессов, для которых существенно влияние неравновесных эффектов. Обычно на



практике в качестве масштаба осреднения выбирают расстояние, сопоставимое с расстоянием между скважинами, т. е. составляет единицы и десятки метров, что приводит к годовым временам установления равновесия из (5.1). Поэтому при разработке месторождений учитывают неравновесные эффекты, которые могут существенно влиять на течение флюидов.

Теоретическое обоснование появления неравновесных эффектов заключается в том, что в классической теории в потоке имеются фронты вытеснения – области резкого изменения насыщенности, причём их линейный размер уменьшается с ростом скорости вытеснения, а скорость изменения насыщенности вблизи фронта увеличивается. Это означает, что с увеличением скорости вытеснения при достижении некоторого значения наступает момент, когда характерное время изменения насыщенности станет сопоставимо с временем установления равновесия, связанным с капиллярными эффектами. Таким образом, при больших скоростях вытеснения необходимо применять не классическую, а неравновесную теорию фильтрации.

Рассмотрим процесс, когда смачивающая жидкость вытесняет несмачивающую из гидрофильной пористой среды. По более узким каналам в среде будет перемещаться смачивающая фаза, по более широким – несмачивающая. По мере возрастания насыщенности смачивающей фазой ей предстоит вытеснить несмачивающую из части занятых ею каналов (наиболее узких). Это происходит не мгновенно, и на промежуточном этапе часть вытесняемой фазы задерживается в узких каналах, а часть вытесняющей временно движется по более широким, чем в стационарном потоке, каналам. Поэтому фазовая проницаемость для вытесняющей фазы временно выше, а для вытесняемой — временно ниже, чем в стационарном потоке при той же насыщенности. Это приводит к скачкам ОФП. Поэтому полагается, что

при нестационарной фильтрации несмешивающихся жидкостей неравновесные ОФП при водонасыщенности  $S$  равны ОФП при некоторой эффективной водонасыщенности  $\tilde{S}$ , одинаковой для обеих ОФП (и большей исходной водонасыщенности, чтобы ОФП вытесняемой фазы было ниже (рис. 5)). Тогда уравнения движения с учётом (8) и (9):

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0, \quad (5.2)$$

$$-m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0, \quad (5.3)$$

$$\vec{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} k_i(\tilde{S}) \vec{\nabla} p_i, i = 1, 2. \quad (5.4)$$

Следует напомнить, что индекс «1» означает воду, индекс «2» – нефть.

Для замыкания этой системы (5.2)–(5.4) необходима связь эффективной насыщенности с истинной. За время установления равновесия  $\tau$  водонасыщенность изменится от эффективной до текущей, причём это изменение, отнесённое ко времени установления равновесия, равно производной насыщенности по времени:

$$\frac{\tilde{S} - S}{\tau} = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (5.5)$$

тогда [1]:

$$\tilde{S} - S = \tau \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (5.6)$$

причём время установления равновесия  $\tau$  считается постоянным.

Необходимо посмотреть, как изменятся уравнения из теории Баклея-Левретта (капиллярными эффектами можно пренебречь в силу их малости, поэтому задача Рапопорта-Лиса не рассматривается). Учитывая, что теперь все функции насыщенности (водонасыщенности) зависят от эффективной насыщенности (аналогично (5.4)), можем переписать (1.31) следующим образом:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \vec{u} F(\tilde{S}) \right) = 0, \quad (5.7)$$

где  $u$  – суммарная скорость фильтрации, для которой выполняется условие, аналогичное (1.7):

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (5.8)$$

причём

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2. \quad (5.9)$$

Если выразить из (5.6) эффективную насыщенность и подставить её в (5.7), то можно получить уравнение Баклея-Левверетта для неравновесной теории

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \vec{u} F \left( S + \tau \frac{\partial S}{\partial t} \right) \right) = 0. \quad (5.10)$$

Таким образом, для определения насыщенности  $S$  и полной (суммарной) скорости фильтрации  $u$  имеется система уравнений (5.8), (5.10), но уравнение (5.10) не разрешено относительно производной по времени, поэтому его решение существенно усложняется и проводится обычно численными методами.

## 5.2. Стабилизированная зона при неравновесной фильтрации

Для дальнейших вычислений необходимо обезразмерить уравнения (5.8) и (5.10) в одномерном случае (фильтрация идёт вдоль оси  $x$ ). Для этого вводятся безразмерные время  $T$ , координата  $X$  и скорость  $V$  так:

$$T = \frac{t}{t_1}, X = \frac{x}{L}, V = \frac{u}{u_1}, \quad (5.11)$$

где некоторые постоянные характерные время  $t_1$  и скорость  $u_1$  (на границе фронта вытеснения) определяются выражениями (из соображений размерности)

$$t_1 = \frac{\mu_1 L^2}{k \Delta p}, u_1 = \frac{k \Delta p}{\mu_1 L}, \quad (5.12)$$

где  $\Delta p$  – характерный перепад давления на границе фронта вытеснения. При небольших значениях перепада давления на границе фронта по сравнению с разностью капиллярных давлений (хотя это выполняется не всегда) характерное время из (5.12) значительно больше времени установления равновесия  $\tau$  из (5.1) и можно ввести параметр малости

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau}{t_1}. \quad (5.13)$$

Тогда (5.8) с учётом (5.11) и определения дивергенции переписывается в виде

$$u_1 \frac{\partial V}{\partial X} = 0; u_1 \neq 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad (5.15)$$

а (5.10), после выражения новых переменных из (5.11) с учётом (5.12) и (5.13) – в виде

$$\frac{m}{t_1} \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial X} \left( V u_1 F \left( S + \frac{\tau}{t_1} \frac{\partial S}{\partial T} \right) \right) = 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{m}{t_1} \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{\frac{k \Delta p}{\mu_1 L}}{L} \frac{\partial}{\partial X} \left( V F \left( S + \varepsilon_1 \frac{\partial S}{\partial T} \right) \right) = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{m}{t_1} \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{1}{t_1} \frac{\partial}{\partial X} \left( V F \left( S + \varepsilon_1 \frac{\partial S}{\partial T} \right) \right) = 0; t_1 \neq 0, \quad (5.18)$$

$$m \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left( V F \left( S + \varepsilon_1 \frac{\partial S}{\partial T} \right) \right) = 0. \quad (5.19)$$

Также необходимо ввести характерное безразмерное время быстроты процесса  $\theta$  (показывающее наличие неравновесных эффектов), которое определяется выражением

$$\theta = \frac{T}{\varepsilon_1}. \quad (5.20)$$

Подобным образом следует ввести и новую безразмерную координата с учётом (5.11) и малого параметра

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon_1 L} = \frac{X}{\varepsilon_1}. \quad (5.21)$$

Тогда (5.15) и (5.19) с учётом (5.20) и (5.21) перепишутся в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{m}{\varepsilon_1} \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( VF \left( S + \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \right) = 0, \quad (5.23)$$

$$m \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( VF \left( S + \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \right) = 0. \quad (5.24)$$

Из (5.22), поскольку  $V=V(\xi)$ ,  $V=const$ , определяемой внешними условиями либо из традиционного решения Баклея-Левверетта.

Будем искать решение (5.24) в виде бегущей волны:  $S=S(X)$ ,  $X=\xi - c\theta$ , где  $c$  – безразмерная скорость распространения волны. Тогда по правилу вычисления производных с учётом вида решения

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -cS. \quad (5.25)$$

Проинтегрируем уравнение (5.24) по координате с учётом (5.25) и  $V=const$ :

$$-mcS + VF(S - cS) = const. \quad (5.26)$$

Для нахождения постоянной необходимо использовать граничные условия:

$$X = \pm\infty: S(-\infty) = S_2, S(\infty) = S_1, \quad (5.27)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – некоторые граничные значения насыщенности, которые берутся из нулевого приближения внешнего решения, т.е. из традиционного решения Баклея-Левверетта в одномерном случае, а поскольку при  $\xi = \pm\infty$  должно выполняться для существования решения

и из физики процесса  $S=0$ , т. е.  $cS=0$ , то (5.26) с учётом (5.27) и этого условия будет записано так на  $-\infty$ :

$$-mcS_2 + VF(S_2) = const. \quad (5.28)$$

Поскольку постоянную можно было бы определить и из условия на  $\infty$ , то, приравнявая это аналогичное условие к (5.28) в силу равенства константы, имеем

$$-mcS_2 + VF(S_2) = -mcS_1 + VF(S_1), \quad (5.29)$$

откуда

$$c = \frac{V}{m} \cdot \frac{F(S_2) - F(S_1)}{S_2 - S_1}. \quad (5.30)$$

Тогда с учётом (5.28) и (5.30) итоговое решение из (5.26) будет выглядеть так:

$$-V \cdot \frac{F(S_2) - F(S_1)}{S_2 - S_1} S + VF(S - cS) = -V \cdot \frac{F(S_2) - F(S_1)}{S_2 - S_1} S_2 + VF(S_2), \quad (5.31)$$

$$F(S - cS) = F(S_2) + (S - S_2) \frac{F(S_2) - F(S_1)}{S_2 - S_1}. \quad (5.32)$$

Более подробно неравновесная теория фильтрации изложена в книге Баренблатта, Ентова и Рыжика [1].

### **Вопросы для самопроверки:**

1. Какое представление лежит в основе теории неравновесной двухфазной фильтрации?
2. Как определить время релаксации при неравновесной фильтрации?
3. Что происходит с ОФП фаз при неравновесной фильтрации?
4. Как вводится параметр малости для неравновесной фильтрации?
5. Как записывается уравнение Баклея-Левверетта для неравновесной теории фильтрации?

### 5.3. Практические задачи

**Пример 5.1.** Известно, что при граничных значениях насыщенности 0,37 и 0,45 функция Баклея-Левверетта равна соответственно 0,02 и 0,1. При насыщенности  $S=0,4$  найти значение функции Баклея-Левверетта в точке  $S-cS$ .

**Решение.** По формуле (5.32) можно найти значение функции Баклея-Левверетта в точке  $S-cS$

$$F(S - cS) = F(S_2) + (S - S_2) \frac{F(S_2) - F(S_1)}{S_2 - S_1},$$

$$F(S - cS) = 0,1 + (0,4 - 0,45) \frac{0,1 - 0,02}{0,45 - 0,37} = 0,05.$$

Ответ:  $F(S - cS) = 0,05$ .

#### Задачи:

5.1. Найти время установления равновесия, если вязкость наиболее вязкой жидкости в пласте 1 мПа·с, проницаемость пласта 1 мД, разность капиллярных давлений 12 атм, характерный размер элемента неоднородности 20 м.

Ответ:  $\tau \approx 3,33 \cdot 10^8$  с

5.2. Имеется пласт с проницаемостью 1 Д, перепад давления 2 МПа, вязкость воды 1 сП, фильтрация идёт с характерным линейным размером 125 м, время этого процесса 1 сут. Чему равно безразмерное время процесса?

Ответ:  $T \approx 0,0111$ .

5.3. Известно, что при граничных значениях насыщенности 0,5 и 0,6 функция Баклея-Левверетта равна соответственно 0,03 и 0,18. При насыщенности  $S=0,56$  найти значение функции Баклея-Левверетта в точке  $S-cS$ .

Ответ:  $F(S - cS) = 0,12$ .

## ГЛАВА 6. МОДЕЛИ ФИЛЬТРУЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

### 6.1. Реологические модели фильтрующихся жидкостей

Фильтрация жидкости может иметь ряд особенностей, если эта жидкость является неньютоновской. Даже простейший бытовой пример – медленное вытекание кетчупа из бутылки – показывает существенное отличие неньютоновской жидкости (кетчупа) от ньютоновской (воды).

Для начала следует напомнить основные определения.

**Ньютоновской (линейно-вязкой)** называется вязкая жидкость, подчиняющаяся в своём течении закону вязкого трения Ньютона, т.е. если у неё касательное напряжение и градиент скорости зависимы друг от друга линейно.

Жидкость, не подчиняющаяся закону вязкого трения Ньютона, называется **неньютоновской**. Данная группа жидкостей делится ещё на несколько типов в зависимости от характера изменения касательного напряжения при изменении градиента скорости. Эти типы будут рассмотрены ниже. Следует отметить, что, как правило, неньютоновские жидкости имеют большую вязкость, чем ньютоновские, но этот факт не должен являться основой для классификации жидкостей, необходимо пользоваться именно вышеприведёнными определениями.

Пусть скорость жидкости  $u$  меняется вдоль вертикальной оси  $y$ , градиент скорости  $du/dy$ . Вязкость рассматриваемой жидкости  $\mu$ . Если касательное напряжение  $\tau$  линейно зависит от  $du/dy$  с коэффициентом пропорциональности  $\mu$  (выполняется закон вязкого трения Ньютона, известный из классической механики)

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (6.1)$$

то жидкость является **НЬЮТОНОВСКОЙ**.

При отклонении от (6.1) (т. е. для неньютоновской жидкости) возможны следующие общие случаи:



1. Касательное напряжение  $\tau$  нелинейно зависит от  $du/dy$ , но не зависит ни от каких других величин

$$\tau = f\left(\frac{du}{dy}\right). \quad (6.2)$$

Тогда жидкость называется **стационарно-реологической**.

2. Касательное напряжение  $\tau$  нелинейно зависит от  $du/dy$ , а также зависит от времени  $t$

$$\tau = f\left(\frac{du}{dy}, t\right). \quad (6.3)$$

Тогда жидкость называется **нестационарно-реологической**.

3. Касательное напряжение  $\tau$  нелинейно зависит от  $du/dy$ , а также зависит от своей производной по времени

$$\tau = f\left(\frac{du}{dy}, \frac{d\tau}{dt}\right). \quad (6.4)$$

Тогда жидкость называется **вязкоупругой**. Вязкоупругие жидкости (среды) имеют свойства как жидкости, так и твёрдого тела, и способны частично восстанавливать форму после снятия напряжений.

Стационарно-реологические жидкости, в свою очередь, делятся на:

1. **Дилатантные**, для которых выполняется

$$\tau = C_1 \left(\frac{du}{dy}\right)^n, n > 1, \quad (6.5)$$

где  $C_1$  – коэффициент,  $n$  – показатель степени, зависящие от вида жидкости.

К дилатантным жидкостям, например, относятся суспензии с высоким содержанием твёрдой фазы.

2. **Псевдопластичные**, для которых выполняется

$$\tau = C_1 \left(\frac{du}{dy}\right)^n, n < 1. \quad (6.6)$$

К псевдопластичным жидкостям, например, относятся растворы и расплавы полимеров.

3. **Вязкопластичные**, для которых выполняется

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}(\tau - \tau_o), \tau > \tau_o; \frac{du}{dy} = 0, \tau \leq \tau_o, \quad (6.7)$$

где  $\tau_o$  – предельное (начальное) напряжение сдвига.

Следует отметить, что вязкопластичная жидкость не течёт даже при приложении к ней некоторого внешнего напряжения сдвига, не превышающего предельного.

Для всех трёх подвидов стационарно-реологических жидкостей можно ввести понятие кажущейся вязкости. Для дилатантных и псевдопластичных оно вводится следующим образом (из сравнения (6.5) и (6.6) с (6.1)):

$$\mu_* = C_1 \left( \frac{du}{dy} \right)^{n-1}, \quad (6.8)$$

а для вязкопластичных – так:

$$\mu_* = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}}. \quad (6.9)$$

На рис. 6.1 показаны зависимости касательного напряжения от градиента скорости для рассмотренных подвидов стационарно-реологических жидкостей, приведено их сравнение с ньютоновской жидкостью.

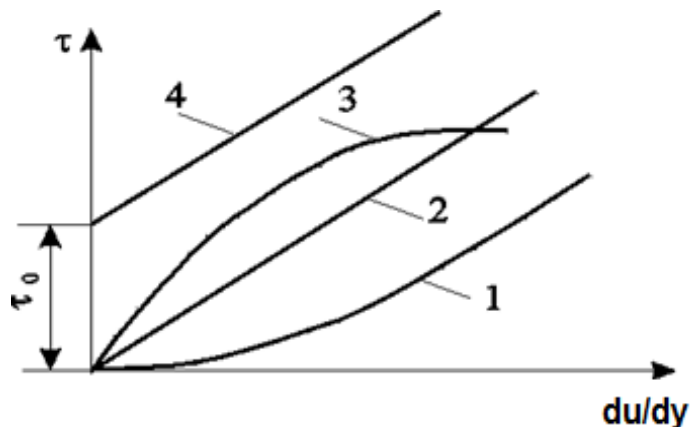


Рис. 6.1. Зависимости касательного напряжения от градиента скорости для различных типов жидкостей. 1 – дилатантная, 2 – ньютоновская, 3 – псевдопластичная, 4 – вязкопластичная [5].

## 6.2. Уравнение пьезопроводности

Распределение давления  $p$  в пласте для любой жидкости в зависимости от координаты и времени может быть получено из **уравнения пьезопроводности**, известного из теории фильтрации:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \Delta p, \quad (6.10)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\varkappa$  – коэффициент пьезопроводности, рассчитываемый по формуле

$$\varkappa = \frac{k}{\mu \beta^*}, \quad (6.11)$$

где  $\beta^*$  – изотермическая сжимаемость пласта (жидкости и скелета породы) или коэффициент упругоёмкости пласта. Поскольку жидкость сжимаема, она называется упругой.

Некоторые особенности распределения давления удобно рассматривать при простейшей записи уравнения пьезопроводности, имеющей место для прямолинейно-параллельного одномерного (вдоль оси  $x$ ) потока упругой жидкости:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (6.12)$$

Таким образом, вводятся два допущения:

1. Течение прямолинейно-параллельное (плоскопараллельное).
2. Течение одномерное.

Для решения дифференциального уравнения (6.12) необходимо одно начальное и два граничных условия. В начальный момент времени, то есть до запуска скважины, давление должно быть равно невозмущённому давлению пласта, которое равно давлению на контуре питания  $p_k$ :

$$t = 0: p = p_k, x > 0, \quad (6.13)$$

как и давление на правой границе (при горизонтальной координате, равной длине пласта  $L$ ), в то время как на левой границе находится галерея скважин:

$$\begin{cases} x = 0: p = p_\Gamma, t \geq 0, \\ x = L: p = p_k, t \geq 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

где  $p_e$  – давление на галерее скважин.

Удобно ввести безразмерное давление

$$P = \frac{p - p_\Gamma}{p_k - p_\Gamma}. \quad (6.15)$$

Тогда уравнение (6.12) примет вид, если умножить обе его части после подстановки (6.15) на  $(p_k - p_e)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (6.16)$$

Решение уравнения (6.15) можно искать с помощью метода автомодельной переменной, которая для этого уравнения вводится следующим образом:

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}. \quad (6.17)$$

Тогда первая производная по  $t$  и вторая по  $x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{\alpha t}^{3/2}} \frac{dP}{d\xi}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dP}{d\xi} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha \epsilon t}} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{2\sqrt{\alpha \epsilon t}} \frac{dP}{d\xi} \right) = \frac{1}{4\alpha \epsilon t} \frac{d^2 P}{d\xi^2}. \quad (6.19)$$

При подстановке (6.18) и (6.19) в уравнение (6.16) можно получить

$$-\frac{x}{4\sqrt{\alpha \epsilon t^3}} \frac{dP}{d\xi} = \frac{1}{4t} \frac{d^2 P}{d\xi^2}, \quad (6.20)$$

откуда, с учётом (6.17), можно получить

$$\frac{d^2 P}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dP}{d\xi} = 0. \quad (6.21)$$

В этом случае начальное (6.13) и граничные (6.14) условия меняются при учёте (6.15) и (6.17) на условия:

$$u = 0: P = 0; \quad u \rightarrow \infty: P = 1. \quad (6.22)$$

Первое условие получено из  $x=0$ , второе – из  $t=0$ .

Для решения (6.21) следует сделать замену

$$\frac{dP}{d\xi} = Z. \quad (6.23)$$

Тогда уравнение (6.21) примет вид

$$\frac{dZ}{d\xi} + 2\xi Z = 0, \quad (6.24)$$

откуда

$$\frac{dZ}{Z} = -2\xi d\xi, \quad (6.25)$$

$$Z = C_1 e^{-\xi^2}. \quad (6.26)$$

После обратной замены из (6.23) уравнение (6.26) примет вид

$$\frac{dP}{d\xi} = C_1 e^{-\xi^2}, \quad (6.27)$$

откуда, с учётом первого условия из (6.22) и соответствующих пределов интегрирования с текущим давлением при текущей координате в текущий момент времени

$$P - 0 = C_1 \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi = C_1 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha \epsilon t}}} e^{-\xi^2} d\xi, \quad (6.28)$$

$$P = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right), \quad (6.29)$$

где введена **функция ошибок** (error function) аргумента  $A$

$$\operatorname{erf}(A) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^A e^{-\xi^2} d\xi. \quad (6.30)$$

Очевидно,  $\operatorname{erf}(0)=0$ ,  $\operatorname{erf}(A \rightarrow \infty)=1$  как интеграл Эйлера-Пуассона.

Из второго условия в (6.22)

$$1 = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (6.31)$$

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \quad (6.32)$$

В итоге, решение **уравнения пьезопроводности для плоскопараллельного одномерного течения**

$$P = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (6.33)$$

или, в размерном виде, с учётом (6.15):

$$p = p_r + (p_k - p_r) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right). \quad (6.34)$$

Функция ошибок является табулированной функцией, её значения содержатся в таблице Excel как: «ФОШ(нижний предел интегрирования; верхний предел интегрирования)».

### 6.3. Метод Монте-Карло для решения уравнения пьезопроводности

Не всегда оказывается возможным и удобным использовать табличные значения специальных функций, либо в ряде случаев они могут вообще отсутствовать. Тогда уместно для вычисления не берущихся интегралов использовать **метод Монте-Карло**.

Название метода происходит от района Монте-Карло, известного своими игорными заведениями (поскольку метод связан со случайными

процессами). Метод предложен С. Уламом и Н. Метрополисом в 1949 г. в США и основан на представлении функции  $f(x)$  в качестве случайной величины ( $x$  – переменная).

Пусть требуется вычислить

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где  $a, b$  – пределы интегрирования.

Рассмотрим случайную величину  $U$ , равномерно распределённую на отрезке  $[a, b]$ . Тогда  $f(U)$  – тоже случайная величина, а её математическое ожидание

$$M(f(U)) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx, \quad (6.35)$$

где  $\varphi(x)$  – плотность распределения случайной величины  $U$ , равная  $1/(b-a)$  на отрезке  $[a, b]$ . Тогда из (6.35)

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)M(f(U)). \quad (6.36)$$

Возьмём  $N$  точек, равномерно распределённых на отрезке  $[a, b]$ , для каждой точки  $U_i$  вычислим значение функции  $f(U_i)$ . Среднее по данной выборке (выборочное среднее):

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(U_i).$$

Согласно теории вероятности и математической статистике, математическое ожидание приблизительно равно выборочному среднему, поэтому:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(U_i). \quad (6.37)$$

Выражение (6.37) – **формула метода Монте-Карло**. Чем больше число  $N$  точек, тем точнее расчёт (для непрерывной функции было бы необходимо стремление числа точек к бесконечности). Очевидно, что в качестве функции  $f(x)$  может быть выбрана функция  $e^{-x^2}$ , входящая в подынтегральное выражение функции ошибок. Применение метода Монте-Карло по описанному алгоритму оставляется читателю в практической работе, относящейся к настоящей главе.

#### **6.4. Законы фильтрации неньютоновских жидкостей.**

##### **Одномерные задачи фильтрации вязкопластичной жидкости**

Неньютоновские эффекты могут вносить существенный вклад в процесс фильтрации жидкости в пласте. В таком случае закон Дарси уже использовать не получается, и необходимо учитывать некоторые поправки. Выражая из закона Дарси (без учёта ОФП, рассматривая однофазное течение) градиент давления и вводя поправку  $\gamma$  – предельный (начальный) градиент давления для успешной фильтрации, можем получить закон фильтрации вязкопластичной жидкости в пористой среде

$$\text{grad}p = -\frac{\mu}{k}\vec{u} - \gamma \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, |\vec{u}| > 0; \text{grad}p \leq \gamma, |\vec{u}| = 0, \quad (6.38)$$

причём

$$\gamma = \frac{\tau_o}{\sqrt{k}}. \quad (6.39)$$

Эти соотношения были эмпирически предложены А. Х. Мирзаджанзаде. Стоит отметить, что для ньютоновской жидкости выполняется закон Дарси, поэтому индикаторная линия (зависимость скорости от модуля градиента давления) будет линейна, а реальное (эмпирическое) течение неньютоновских жидкостей отличается от



линеаризованного описания (6.38) и хорошо согласуется лишь при высоких значениях градиента давления (рис. 6.2).

Как правило, неньютоновские эффекты вносят существенный вклад именно при малых скоростях фильтрации (для высоковязкой нефти в силу её малой подвижности это актуально), причём в средах с небольшим размером пор (следовательно, невысокой проницаемостью). Если для пропластков одновременно достигается предельный градиент давления, то они могут включаться в процесс фильтрации постепенно, и это необходимо учитывать на практике.

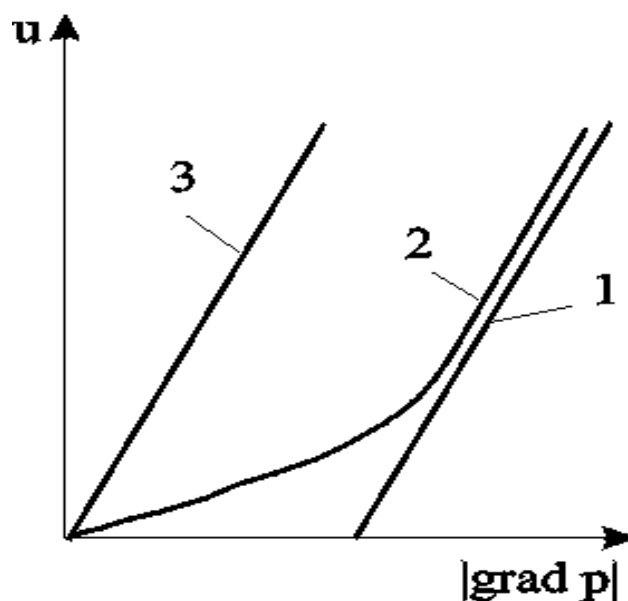


Рис. 6.2. Индикаторные линии. 1 – неньютоновская жидкость с линеаризованным течением, 2 – реальное течение неньютоновской жидкости, 3 – ньютоновская жидкость [5].

Для псевдопластичных жидкостей можно применять эмпирический степенной закон фильтрации следующего вида:

$$\vec{u} = -C |\text{grad} p|^n \text{grad} p, 0 < n < 1, \quad (6.40)$$

где  $C$  – экспериментальный коэффициент.

Этот закон хорошо описывает фильтрацию полимеров в пористой среде, поэтому он часто применяется в методах повышения

нефтеотдачи с применением подобных жидкостей, например, при расчётах полимерного заводнения.

Перейдём к рассмотрению одномерных случаев установившегося течения вязкопластичной жидкости в пласте, что нередко встречается на практике.

При плоскорадиальном потоке вдоль оси  $r$  из (6.38) следует, что

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k}u + \gamma \quad (u > 0); \quad \frac{dp}{dr} \leq \gamma \quad (u = 0). \quad (6.41)$$

Тогда скорость фильтрации (если  $F$  – площадь фильтрации)

$$u = \frac{Q}{F} = \frac{Q}{2\pi rh} = \frac{k}{\mu} \left( \frac{dp}{dr} - \gamma \right), \quad (6.42)$$

что называется формулой притока для вязкопластичной жидкости при плоскорадиальной установившейся фильтрации.

Из (6.42) можно найти распределение давления в пласте. Для этого нужно выразить градиент давления:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{Q\mu}{2\pi krh} + \gamma. \quad (6.43)$$

Поскольку при радиусе скважины  $r_c$  давление будет равно забойному давлению  $p_c$ , а при некотором  $r$  – давлению  $p$ , то, разделяя переменные в (6.43) и интегрируя, получаем

$$\int_{p_c}^p dp = \int_{r_c}^r \frac{Q\mu}{2\pi krh} dr + \int_{r_c}^r \gamma dr, \quad (6.44)$$

тогда распределение давления в пласте

$$p(r) = p_c + \gamma(r - r_c) + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c}, \quad r_c \leq r \leq R_k, \quad (6.45)$$

где  $R_k$  – радиус контура питания, при котором давление будет равно давлению на контуре питания  $p_k$ .

Следует обозначить перепад давления в пласте  $\Delta p_c = p_k - p_c$ . Учитывая, что радиус контура питания значительно превосходит радиус

скважины (пренебрегая  $r_c$ ), из (6.45) (на контуре питания) можем выразить дебит

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} (\Delta p_c - \gamma R_k), \Delta p_c > \gamma R_k; Q = 0, \Delta p_c \leq \gamma R_k, \quad (6.46)$$

где второе выражение следует из неотрицательности дебита и физики процесса. Тогда индикаторная диаграмма (зависимость дебита от перепада давления) будет линейна, но часть разности давлений будет уходить на преодоление начального градиента сдвига (рис. 6.3). Предельный градиент давления приводит к снижению дебита по сравнению с формулой Дюпюи.

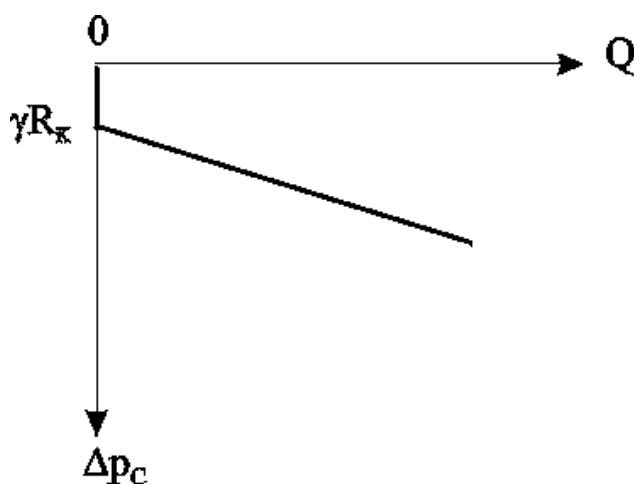


Рис. 6.3. Индикаторная диаграмма вязкопластичной жидкости [5].

При нулевом дебите давление не постоянно (в отличие от классической теории фильтрации), а изменяется линейно с изменением  $r$ .

В слоистом пласте индикаторная диаграмма будет ломанной линией, отрезки которой соответствуют постепенному включению пропластков в фильтрацию при достижении соответствующего предельного градиента давления, что вызывает излом линии на диаграмме (рис. 6.4).

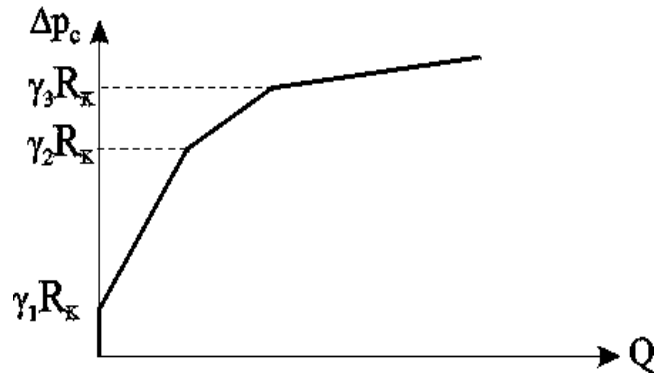


Рис. 6.4. Индикаторная диаграмма для слоистого пласта.  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – предельные напряжения сдвига для первого, второго и третьего пропластков соответственно [5].

При переходе к рассмотрению неустановившейся фильтрации вязкопластичной жидкости необходимо рассмотреть уравнение пьезопроводности, известное из теории фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \operatorname{div} \left( \left( 1 - \frac{\gamma}{|\operatorname{grad} p|} \right) \operatorname{grad} p \right). \quad (6.47)$$

При использовании модели фильтрации с предельным градиентом для решения нестационарных задач в пласте образуется переменная область фильтрации, которая движется, и пока она не достигнет края пласта, на её границе модуль градиента давления должен равняться предельному градиенту, а давление – давлению на контуре питания (начальному пластовому).

Решение уравнения пьезопроводности (6.47) производится методами математической физики, известно из теории фильтрации и при пуске скважины с постоянным дебитом для зависимости забойного давления от времени имеет вид [2]:

$$p_c = p_k - \frac{Q\mu}{6\pi kh} \ln \frac{Q\mu\alpha t}{\pi kh\gamma r_c^3} - \gamma \left( \frac{3Q\mu\alpha t}{\pi kh\gamma} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{Q\mu}{2\pi kh}. \quad (6.48)$$

Второе слагаемое вносит основной вклад при небольших значениях времени и соответствует преобладанию упругих сил, а третье – при больших.

Из-за наличия предельного градиента давления при фильтрации могут возникать застойные зоны, где нефть неподвижна в силу недостигнутого предельного градиента давления (рис. 6.5).  $q$  – скважина с удельным дебитом.

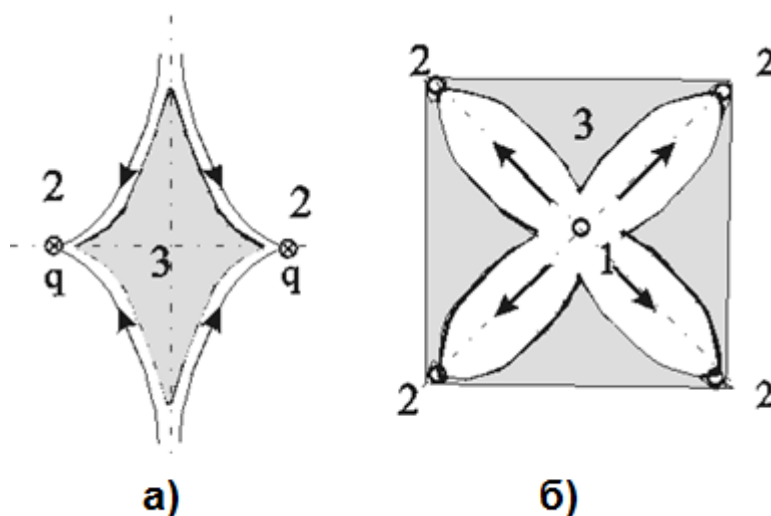


Рис. 6.5. Схема образования застойных зон: а) между добывающими скважинами; б) в пятиточечной системе; 1 – нагнетательная скважина, 2 – добывающая, 3 – застойная зона [5].

В таком случае площадной коэффициент охвата пласта заводнением – отношение области, где произошла фильтрация и вытеснение нефти водой, ко всей площади элемента разработки. Этот коэффициент, а, следовательно, и величина застойной зоны, зависят от эмпирического характеристического параметра охвата  $\lambda$ , имеющего размерность расстояния:

$$\lambda = \frac{Q\mu}{k\gamma L}, \quad (6.49)$$

где  $L$  – характерное расстояние, равное, как правило, половине расстояния между скважинами.

Более подробно теория фильтрации неньютоновских жидкостей приведена в книге Басниева, Кочиной, Максимова [2].

### 6.5. Двухфазное течение неньютоновской жидкости

Можно распространить теорию многофазного течения на неньютоновские жидкости. Пусть рассматривается двухфазная система, причём хотя бы одна из фаз обладает неньютоновскими свойствами. Распределение фаз в порах происходит под действием капиллярных сил, поскольку гидродинамические силы малы и ими можно пренебречь. Также для введения ОФП следует считать, что каждая из фаз движется в своей части порового пространства, при этом другая фаза считается скелетом породы. Тогда градиент давления, вообще говоря, будет зависеть от скорости фильтрации и некоторой эмпирической функции, однако для вязкопластичных жидкостей с учётом (6.42) можно записать:

$$\vec{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} k_i(S) \vec{\nabla} p_i \left( 1 - \frac{G_i}{|\vec{\nabla} p_i|} \right), |\vec{\nabla} p_i| > G_i, i = 1, 2, \quad (6.50)$$

$$\vec{u}_i = 0, |\vec{\nabla} p_i| \leq G_i, i = 1, 2, \quad (6.51)$$

где  $G_i$  – предельный начальный градиент давления для успешной фильтрации  $i$ -той фазы.

В силу того, что неньютоновская жидкость (нефть) может мешать своему вытеснению ньютоновской жидкостью (водой), предельный начальный градиент давления может быть отличен от нуля для обеих фаз даже в том случае, если только одна из жидкостей неньютоновская.

При отсутствии остаточных насыщенных ОФП могут быть нормированы так:  $k_1(0) = 0; k_1(1) = 1; k_2(0) = 1; k_2(1) = 0$ , где в качестве насыщенности выбрана насыщенность более подвижной фазы – воды. В силу преобладания капиллярных сил ОФП в случае

фильтрации с предельным градиентом совпадают с ОФП в случае классической двухфазной фильтрации. При этом у каждой фазы свой закон фильтрации и свой предельный градиент давления. Вообще говоря, предельный градиент с изменением насыщенностей фаз может изменяться, поскольку изменяется средний размер пор  $d_i$ , занятых  $i$ -той фазой, и этот градиент может быть оценён из эмпирического выражения

$$G_i(S) \approx \frac{\tau_{oi}}{d_i(S)}, \quad (6.52)$$

где  $\tau_{oi}$  – предельное напряжение сдвига  $i$ -той фазы. Поскольку при росте насыщенности, очевидно, средний размер пор, занятых рассматриваемой фазой, увеличится, то предельный градиент давления для этой фазы из (6.52) снижается. Однако зачастую этим изменением пренебрегают и берут некоторые средние оценки величины предельного градиента давления.

Немногочисленные экспериментальные данные по двухфазной фильтрации неньютоновских жидкостей согласуются с теоретическими предположениями.

## 6.6. Фронтальное вытеснение неньютоновской жидкости

При вытеснении вязкопластичной неньютоновской жидкости процессы на фронте будут несколько отличаться от классической теории Баклея-Левретта. Для их описания в одномерном случае сначала необходимо записать уравнение неразрывности, суммарную скорость фильтрации и законы Дарси для каждой фазы (6.50), (6.51):

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad (6.53)$$

$$u_1 + u_2 = u, \quad (6.54)$$

$$u_i = \frac{k}{\mu_i} k_i(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_i \right), \frac{\partial p}{\partial x} > G_i; u_i = 0, \frac{\partial p}{\partial x} \leq G_i; i = 1, 2, \quad (6.55)$$

причём фазы вытесняются при одинаковом давлении  $p$  вдоль оси  $x$ .

Чтобы свести (6.53) к уравнению Баклея-Левверетта или его аналогу, необходимо найти отношение скорости фильтрации более подвижной фазы (воды) к суммарной скорости фильтрации с учётом (6.54), (6.55) при превышении предельного градиента давления (иначе вытеснения не будет):

$$\frac{u_1}{u} = \frac{\frac{k}{\mu_1} k_1(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right)}{\frac{k}{\mu_1} k_1(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right) + \frac{k}{\mu_2} k_2(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_2 \right)}, \quad (6.56)$$

$$\frac{u_1}{u} = \frac{k_1(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right)}{k_1(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right) + \mu^* k_2(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_2 \right)}, \quad (6.57)$$

где относительная вязкость

$$\mu^* = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (6.58)$$

Из классической теории для ньютоновских жидкостей функция Баклея-Левверетта

$$F(S) = \frac{k_1(S)}{k_1(S) + \mu^* k_2(S)}, \quad (6.59)$$

откуда

$$k_1(S) = \frac{F(S) \mu^* k_2(S)}{1 - F(S)}. \quad (6.60)$$

Если подставить (6.60) в (6.57), то можно получить

$$\frac{u_1}{u} = \frac{F(S) \mu^* k_2(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right)}{F(S) \mu^* k_2(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right) + \mu^* k_2(S) (1 - F(S)) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_2 \right)}, \quad (6.61)$$

$$\frac{u_1}{u} = \frac{F(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right)}{F(S) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_1 \right) + (1 - F(S)) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - G_2 \right)}. \quad (6.62)$$



Из (6.54), (6.55) суммарная скорость фильтрации

$$u = \left( \frac{k}{\mu_1} k_1(S) + \frac{k}{\mu_2} k_2(S) \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu_1} k_1(S) G_1 - \frac{k}{\mu_2} k_2(S) G_2, \quad (6.63)$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{u + \frac{k}{\mu_1} k_1(S) G_1 + \frac{k}{\mu_2} k_2(S) G_2}{\frac{k}{\mu_1} k_1(S) + \frac{k}{\mu_2} k_2(S)}, \quad (6.64)$$

или, после деления на проницаемость пласта,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\frac{u}{k} + \frac{k_1(S)}{\mu_1} G_1 + \frac{k_2(S)}{\mu_2} G_2}{\frac{k_1(S)}{\mu_1} + \frac{k_2(S)}{\mu_2}}. \quad (6.65)$$

Если подставить (6.65) в (6.62), то можно получить

$$\frac{u_1}{u} = F(S) \frac{A(S)}{F(S)A(S) + (1 - F(S))B(S)}, \quad (6.66)$$

где для удобства введены обозначения

$$A(S) = \frac{u}{k} + \frac{k_1(S)}{\mu_1} G_1 + \frac{k_2(S)}{\mu_2} G_2 - G_1 \frac{k_1(S)}{\mu_1} - G_1 \frac{k_2(S)}{\mu_2}, \quad (6.67)$$

$$B(S) = \frac{u}{k} + \frac{k_1(S)}{\mu_1} G_1 + \frac{k_2(S)}{\mu_2} G_2 - G_2 \frac{k_1(S)}{\mu_1} - G_2 \frac{k_2(S)}{\mu_2}. \quad (6.68)$$

Приводя подобные слагаемые в (6.66) с учётом (6.67) и (6.68), получим

$$\frac{u_1}{u} = \frac{F(S) \left( \frac{u}{k} + \frac{k_2(S)}{\mu_2} (G_2 - G_1) \right)}{F(S) \left( \frac{u}{k} + \frac{k_2(S)}{\mu_2} (G_2 - G_1) \right) + (1 - F(S)) \left( \frac{u}{k} + \frac{k_1(S)}{\mu_1} (G_1 - G_2) \right)}, \quad (6.69)$$

или, по аналогии с классической теорией Баклея-Левретта

$$\frac{u_1}{u} = F^*(S, u), \quad (6.70)$$

где функция распределения потоков (уже не функция Баклея-Левретта)

$$F^* = \frac{F(S) \left( \frac{u}{k} + \frac{k_2(S)}{\mu_2} (G_2 - G_1) \right)}{F(S) \left( \frac{u}{k} + \frac{k_2(S)}{\mu_2} (G_2 - G_1) \right) + (1 - F(S)) \left( \frac{u}{k} + \frac{k_1(S)}{\mu_1} (G_1 - G_2) \right)}, \quad (6.71)$$

причём видно, что эта функция зависит не только от насыщенности (учитывая дополнительно, что предельные градиенты сдвига тоже могут зависеть от насыщенности из (6.52)), как это было для функции Балкея-Левретта, но и от суммарной скорости фильтрации, если она меняется с течением времени (по координате она не меняется из (1.8)).

С учётом (1.8), (6.70), (6.71) при делении на пористость уравнение неразрывности (6.53) окончательно запишется в виде, аналогичном уравнению Баклея-Левретта, но уже учитывающем не-newтоновские эффекты

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{u}{m} \frac{\partial F^*}{\partial x} = 0. \quad (6.72)$$

В силу аналогичности этой задачи с рассмотренной задачей Баклея-Левретта, график функции распределения потоков будет аналогичен графику  $F(S)$  (рис. 6.6).

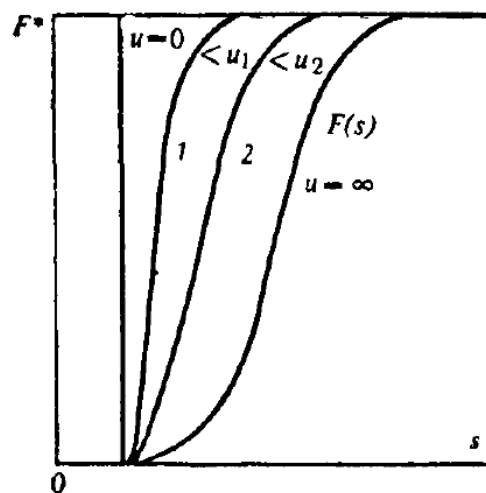


Рис. 6.6. График функции распределения потоков в зависимости от водонасыщенности для различных значений суммарной скорости фильтрации. 1 — при  $u=u_1 > 0$ , 2 — при  $u=u_2 > u_1$  [1].

Очевидно, что с увеличением суммарной скорости фильтрации технологические показатели вытеснения будут улучшаться.

## **6.7. Предельная нефтеотдача. Целики остаточной нефти**

### **6.7.1. Формы существования остаточной нефти в пласте**

При разработке эксплуатационных объектов нефтяных месторождений на естественных режимах или с воздействием на пласт, в коллекторах остаются зоны, в которых остаются остаточные подвижные запасы нефти. Извлечение таких запасов из разрабатываемых пластов является необходимым условием увеличения нефтеотдачи, способствует достижению проектных показателей разработки [6].

Природа остаточной нефти разнообразна. Выделяются два основных класса остаточных нефтей (ОН): ОН макроуровня и ОН микроуровня. ОН макроуровня – это **целики**, различного рода непромытые пропластки, застойные зоны, линзы. Остаточная нефть, содержащаяся в них, сохраняет свои исходные свойства. ОН микроуровня – это пленочная нефть, адсорбированная на поверхности пористой среды, и капиллярно-защемленная ОН, находящаяся в пористой среде в виде капель и глобул, которые отделены от скелета пористой среды пленкой воды [7].

По данным экспертных оценок остаточные запасы нефти (100%) количественно распределены следующим образом:

1. Нефть, оставшаяся в низкопроницаемых пропластках (прослоях), и участках, не охваченных водой – 27%.
2. Нефть в застойных зонах однородных пластов – 19%.
3. Нефть, оставшаяся в линзах и у непроницаемых экранов, не вскрытых скважинами – 24%.

#### 4. Капиллярно-удерживаемая и плёночная нефть – 30%.

Остаточная нефть 1)–3), которая не охвачена процессом заводнения вследствие высокой макронеоднородности разрабатываемых пластов и застойных зон, образуемых потоками жидкости в пластах, составляет 70% всех остаточных запасов. Она представляет основной резерв для увеличения нефтеотдачи. Повысить нефтеотдачу пласта за счёт этой остаточной части нефти можно в результате совершенствования существующих систем и технологий разработки, а также за счёт применения гидродинамических методов увеличения нефтеотдачи пластов. Остальная часть 4) остается в обводненных коллекторах вследствие их микронеоднородности и может извлекаться в результате воздействия на неё различных физических и физико-химических методов [6].

На основании анализа разработки и обобщения опыта промысловых работ по нефтеотдаче в работах выделены следующие типы скопления остаточной нефти.

1. Рассеянная нефть в виде отдельных капель в порах и пленок на зернах скелета породы. Эта нефть полностью окружена вытесняющей фазой (водой, газом и др.). Насыщение этой нефтью таково, что фазовая проницаемость при этом насыщении равна нулю. Насыщение этой нефтью невелико – 15-20%.
2. Скопления остаточной нефти, обусловленные концевыми эффектами, возникающими в неоднородных по проницаемости пластах. Характерные размеры скоплений такой нефти составляют единицы и десятки сантиметров.
3. Целики невыработанной нефти в малопроницаемых включениях или блоках трещиновато-пористой среды. Эти

целики характеризуются различными размерами и насыщениями.

4. Целики остаточной нефти, образовавшиеся в результате неполного охвата заводнением сравнительно однородных пластов из-за влияния вязкостной и гравитационной неустойчивости. Характерные размеры скоплений такой нефти составляют десятки метров.
5. Целики остаточной нефти, обладающей вязкопластичными свойствами. Их характерные размеры зависят от геологической неоднородности и технологии разработки.

В соответствии с ранее рассмотренным распределением остаточной нефти в разрабатываемых пластах можно выделить следующие основные виды остаточной нефтенасыщенности (ОНН): капиллярно-защемленное, адсорбированное, плёночное, ОНН тупиковых пор и микронеоднородностей, практическое, обусловленное неустойчивостью вытеснения на микро- и макроуровне.

В реальных разрабатываемых пластах присутствует, как правило, несколько видов остаточной нефти, которые в совокупности формируют ОНН разрабатываемых пластов [7].

### **6.7.2. Силы, удерживающие остаточную нефть.**

#### **Причины существования остаточной нефти в пласте**

Наличие остаточных запасов нефти ввиду макронеоднородности пластов обусловлено малой скоростью фильтрации нефти в низкопроницаемых зонах, слоях, пропластках и линзах, причем это в большей степени вызвано загрязнением, кольматацией призабойных зон пласта при бурении и нагнетании воды.

Силы, действующие в пласте, насыщенном двумя или более подвижными фазами, подразделяются на силы вязкости (вязкостные),

поверхностные, гравитационные и упругие силы. Поверхностные или капиллярные силы создают на границе раздела жидких фаз давление порядка 0,01–0,3 МПа. Величина поверхностных сил определяется смачиваемостью породы и микронеоднородностью пористой среды, размером поровых каналов. Вязкостные силы (гидродинамическое сопротивление) пропорциональны вязкости нефти. При больших коэффициентах динамической вязкости в коллекторах возникают критические градиенты давления или начальный градиент давления, препятствующие фильтрации нефти.

Гравитационные силы создают постоянно действующий градиент давления, пропорциональный разности плотностей нефти, газа и воды. Величина этого градиента может составлять 0,1–10 МПа/м. В результате происходит всплытие в воде нефти или газа в нефти. Упругие силы возникают в результате изменения напряженно-деформируемого состояния пласта вследствие снижения пластового давления, вызывают закупорку поровых каналов, уменьшение микротрещин и, следовательно, способствуют появлению остаточной нефтенасыщенности [6].

При наличии в пористой среде несмешивающихся жидкостей (нефти и воды) процесс их движения непрерывно контролируется капиллярным давлением (разность давлений в несмачивающей (нефти) и в смачивающей (воде) фазах, разделенных в поре мениском), которое зависит от межфазного натяжения на границах раздела нефти и воды, смачиваемости коллектора и размеров пор:

$$p_k = \frac{2\sigma \cos\theta}{r}, \quad (6.73)$$

где  $p_k$  – капиллярное давление в поровом канале;  $\sigma$  – поверхностное натяжение между нефтью и водой, стремящееся уменьшить поверхность их контакта;  $\theta$  – контактный угол смачивания

поверхности пор смачивающей жидкостью (водой);  $r$  – средний радиус порового канала.

Для вытеснения капли нефти из канала переменного сечения, заполненного водой, необходимо преодолеть капиллярное давление

$$p_k = 2\sigma \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (6.74)$$

где  $r_1$ ,  $r_2$  – большой и малый радиусы порового канала соответственно.

При устранении действия капиллярных сил в результате снижения межфазного натяжения с 25-35 мН/м до 0,01-0,001 мН/м достигается почти полное вытеснение нефти (на 95-98%). В этом случае смачиваемость пласта не оказывает существенного влияния на эффективность вытеснения нефти. В преимущественно гидрофильных пластах капиллярные силы могут удерживать до 20-25% остаточной нефти в однородном пласте, которая оказывается в крупных порах, блокированных водой (рис. 6.7.2.1), где  $p_{k1}$  и  $p_{k2}$  – капиллярные давления при  $r_1$  и  $r_2$  соответственно.

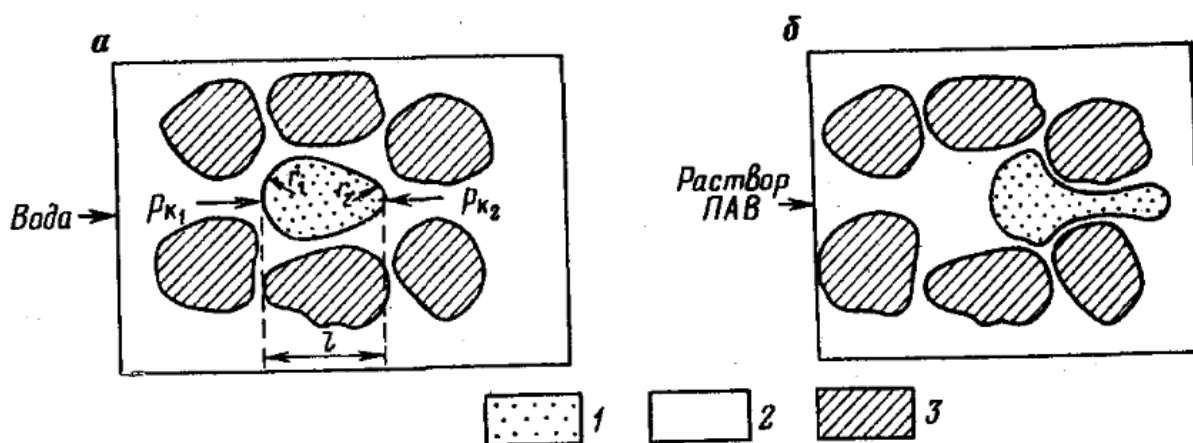


Рис. 6.7.2.1. Схема вытеснения рассеянной остаточной нефти из заводненной части пласта водой (а) и раствором ПАВ (б). 1 – нефть; 2 – вода (раствор ПАВ); 3 – порода.

При вытеснении нефти водой (рис. 6.7.2.1, а) межфазное натяжение  $\sigma=25-30$  мН/м, разность капиллярных давлений больше гидродинамического градиента давления. Капля нефти при этом неподвижна. В случае вытеснения нефти раствором ПАВ (рис. 6.7.2.1,б) межфазное натяжение  $\sigma<0,001$  мН/м, разность капиллярных давлений стремится к нулю и меньше гидродинамического перепада давления. Капля нефти свободно деформируется и движется через сужения пор.

Эффективность извлечения нефти из пластов при использовании естественной пластовой энергии всех видов определяется следующими основными факторами:

1. Ресурсами (запасом) и видом пластовой энергии.
2. Неоднородностью коллекторов по проницаемости и пористости.
3. Вязкостью нефти.
4. Капиллярными и гравитационными силами [10].

Таким образом, главная причина невозможности достижения полного вытеснения нефти водой из пластов при их заводнении заключается в несмешиваемости нефти и воды, в результате чего образуется поверхность раздела между этими жидкостями и происходит удержание нефти в пористой среде капиллярными силами. Неполное вытеснение в охваченных заводнением областях пласта обусловлено гидрофобизацией пород-коллекторов вследствие адсорбции тяжелых компонентов нефти на поверхности зерен пород; различием вязкостей вытесняющей и вытесняемой жидкостей, что приводит к гидродинамической неустойчивости контакта нефть-вода; за фронтом вытеснения остаются капли или глобулы нефти, скопления нефти.

Нефть остается в пористой среде в виде пленок на зернах породы и глобул, находящихся в тупиковых порах или в местах пористой среды, обойденных водой (рис. 6.7.2.2).



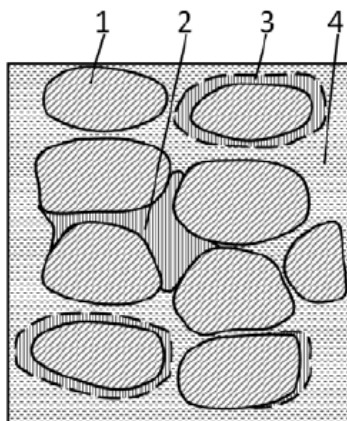


Рис. 6.7.2.2. Остаточная нефть в пористой среде. 1 – зерна твердой породы; 2 – остаточная нефть в тупиковых порах; 3 – пленочная нефть; 4 – вода.

### 6.7.3. Механизм вытеснения нефти водой

Процесс вытеснения нефти водой из микронеоднородных гидрофильных пористых сред в разных зонах протекает по-разному и под действием различных сил. В чисто нефтяной зоне пористой среды перед фронтом внедрения воды движение нефти в поровых каналах непрерывной фазой определяется гидродинамическими силами. Скорость движения нефти в каналах пропорциональна средним размерам пор, соединенных в единый канал линий тока. По крупным поровым каналам нефть движется быстрее, чем по мелким.

На фронте внедрения воды в пористую среду, масштабе отдельных пор движение воды и нефти полностью определяется капиллярными силами, так как они превосходят гидродинамические силы на малых отрезках пути. Вода, находясь в каких-либо порах, соединенных с нефтенасыщенными разными по размеру порами, под действием капиллярных сил устремляется с опережением преимущественно в мелкие поры, вытесняет из них нефть в смежные крупные поры до тех пор, пока разобщенные крупные поры не окажутся со всех сторон блокированными водой. Если в пористой среде крупные

поры преобладают или составляют большую долю и из них возможно построение непрерывных каналов, то вода по ним будет двигаться с опережением. Тем не менее оставшаяся нефть из мелких пор под действием капиллярных сил также переместится в крупные поры и останется в них в глобулах, так как система может устойчивой только при минимальной свободной поверхностной энергии. Таким образом, мелкие поры оказываются заводненными, а крупные остаются нефтенасыщенными.

В масштабе большой зоны пористой среды, между передним фронтом внедряющейся воды и задним фронтом подвижной нефти, водонасыщенность пласта возрастает от некоторой фронтальной водонасыщенности до предельной водонасыщенности при подвижной нефти. В этой зоне идет совместная фильтрация воды и нефти. Вода в зоне с остаточной нефтенасыщенностью движется, как в пористой среде, в которой нефть выступает в качестве дополнительной твердой части породы [10].

#### **6.7.4. Распределение остаточной нефти в пласте**

Для применения методов увеличения нефтеотдачи пластов принципиально важно знать насыщенность пластов, как распределена в них остаточная нефть и в каком состоянии она находится в порах. Неполное вытеснение нефти водой из пластов обуславливается микро- и макронеоднородностью пластов, смачиваемостью пористой среды, межфазным натяжением, вязкостью нефти и условиями извлечения.

Если пористая среда обладает частичной гидрофобностью, что характерно практически для всех нефтеносных пластов, то остаточная нефть может оставаться в порах в виде пленки. У гидрофобной поверхности крупных пор пленка нефти затем сливается с глобулой нефти, пришедшей из мелких пор. Глобулы нефти, заблокированные

водой в крупных порах (капиллярными силами) – основная причина снижения общей проницаемости для нефти и воды в заводненных пластах. Но нефть в глобулах не теряет способности двигаться при устранении капиллярных сил (рис. 6.7.4.1).

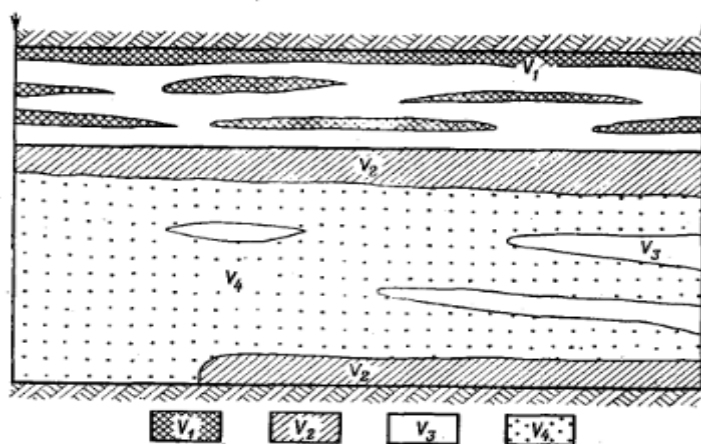


Рис. 6.7.4.1. Схема распределения остаточной нефти в заводненных пластах.  $V_1$  – нефть в линзах и пропластках, не охваченных дренированием, 30-40% и более;  $V_2$ ,  $V_3$  – нефть в монолитном пласте, что обусловлено его неоднородностью (2) и вязкостной неустойчивостью (3) вытеснения водой, 10-30%;  $V_4$  – нефть, рассеянная в заводненной части пласта, 20-40%.

В гидрофобных коллекторах, которые на практике встречаются редко, первоначальная связанная вода распределена прерывисто и занимает наиболее крупные поры. Вторгшаяся в пласт при заводнении вода смешивается со связанной водой, оставаясь в наиболее крупных порах. Остаточная же нефть остается в порах меньшего размера и также не теряет способности двигаться при устранении капиллярных сил.

Коэффициент вытеснения нефти водой из пористой среды зависит от ее проницаемости, распределения размеров пор, а также от вязкости нефти и характера смачиваемости. В гидрофильных

высокопроницаемых пористых средах при малой вязкости нефти коэффициент вытеснения  $\beta_k$  может достигать 0,8-0,9 (рис. 6.7.4.2). В слабопроницаемых частично гидрофобных средах при повышенной вязкости нефти он составляет 0,5-0,65, а в гидрофобных пластах – не более 0,25-0,4. Вместе с тем, при смешивающемся вытеснении нефти газом и мицеллярным раствором коэффициент вытеснения достигает 0,95-0,98.

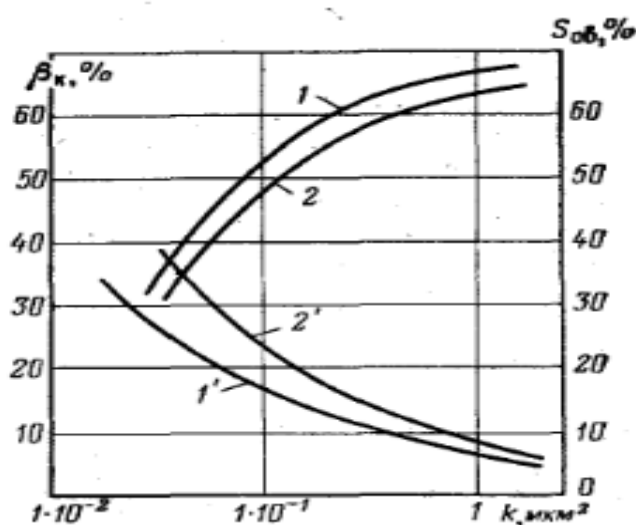


Рис. 6.7.4.2. Зависимость коэффициента вытеснения (1,2) и остаточной водонасыщенности  $S_{ов}$  (1',2') от проницаемости терригенных (1,1') и карбонатных (2,2') пластов.

Процесс неполного охвата пластов заводнением и вытеснением (дренированием) усугубляется неблагоприятным соотношением вязкостей нефти и воды. С повышением вязкости нефти и уменьшением вязкости воды охват пластов заводнением и дренированием резко уменьшается и служит основной причиной неудовлетворительной конечной нефтеотдачи пластов.

Если пласт разрабатывается при режиме растворенного газа, то остаточная нефтенасыщенность, в отличие от заводнения, практически не зависит от проницаемости, а определяется газовым фактором,

вязкостью нефти и снижением пластового давления. Вытеснение нефти газом, выходящим из раствора в свободное состояние при снижении пластового давления, происходит равномерно из всего объема пласта до критической газонасыщенности (12-18%), когда газ остается еще неподвижным. Затем начинается движение свободного газа по пласту, предпочтительно по высокопроницаемым слоям (трещинам). Нефтенасыщенность становится неравномерной: в слабопроницаемых слоях и зонах выше, а в высокопроницаемых – ниже. При длительном процессе разработки это распределение нефтегазонасыщенности в неоднородном пласте за счет гравитационных сил может измениться. Газ будет стремиться занять верхние части пласта, а нефть – нижние.

Для успешного применения новых методов увеличения нефтеотдачи пластов необходимо детальное изучение проявления всех естественных сил в процессе разработки и особенностей состояния и распределения остаточной нефтенасыщенности, чтобы воздействовать на нее активными дорогими агентами [10].

#### **6.7.5. Условия эффективного применения методов увеличения нефтеотдачи**

Важным условием эффективного применения методов увеличения нефтеотдачи пластов является правильный выбор объекта для метода или, наоборот, метода – для объекта.

Критерии применимости методов определяют диапазон благоприятных физических свойств флюидов и пласта, при которых возможно эффективное применение метода или получение наилучших технико-экономических показателей разработки. Эти критерии определены на основе обобщения опыта его применения в различных геолого-физических условиях, а также использования широких

теоретических и лабораторных исследований, анализа технико-экономических показателей применения метода.

Обычно выделяются три категории критериев применимости методов:

1. Геолого-физические: свойства пластовых жидкостей, глубина и условия залегания нефтенасыщенного пласта, ФЕС и особенностей нефтесодержащего коллектора, насыщенность порового пространства пластовыми жидкостями.
2. Технологические: размер оторочки заводнения, концентрация агентов в растворе, размещение скважин, давление нагнетания, выбор режима эксплуатации добывающих скважин.
3. Материально-технические: обеспеченность оборудованием, химическими реагентами, их свойства.

Критерии первой категории являются определяющими, наиболее значимыми и независимыми.

### **6.7.6. Целики остаточной нефти**

При наличии неньютоновских эффектов в силу большой вязкости нефти и значительного предельного градиента давления могут появиться достаточно крупные области, в которых останется невытесненная нефть – **целики остаточной нефти**. Провести подробные оценки количества и размеров всех целиков в пласте сложно, поэтому используют упрощённый подход, рассматривая предельно-равновесные целики, т. е. настолько большие целики, что неравновесных эффектов ещё не наблюдается. Здесь же необходимо отметить, что, как и во многих процессах, по прошествии длительного момента времени вытеснение станет стационарным, тогда весь пласт можно разделить на область, занятую неподвижной нефтью, и область, в которой вода вытеснила нефть по закону Дарси до предельных

значений нефтенасыщенности. На границе между областями выполняется **условие предельного равновесия**, т. е. равенство по модулю градиента давления предельному градиенту для нефти в данной точке.

Если предельный градиент давления для нефти равен  $G$ , то для проницаемости воды в промытой зоне  $k$  выполняется эмпирическое условие [1]:

$$kG^2 = const. \quad (6.75)$$

Если рассматривать слоисто-неоднородный пласт с меняющейся проницаемостью  $k(z)$  вдоль вертикальной оси  $z$ , то в пласте будут промытая полностью область, где локальная мощность промытого слоя  $h$  равна мощности пласта  $H$ , область, где целик занимает всю мощность пласта, в которой  $h=0$ , и область, где целик занимает лишь часть мощности пласта, причём для неё выполняется  $0 < h < H$ .

Для решения задачи используется **приближение Буссинеска**, когда пренебрегается различие в плотностях нефти и воды, а распределение давления по мощности пласта считается гидростатическим и характеризуется давлением на подошве пласта  $p(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  – горизонтальные координаты. Предельный градиент давления, вообще говоря, может зависеть от локальной мощности промытого слоя, но, в силу условия предельного равновесия

$$G(h(x, y)) = |\vec{\nabla}p(x, y)|, \quad (6.76)$$

откуда можно определить мощность промытого слоя  $h(|\vec{\nabla}p|)$ . Тогда фильтрация характеризуется эффективной скоростью  $w$  и эффективной проницаемостью  $K(|\vec{\nabla}p|)$ , для которых, очевидно, справедливы уравнения

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0, \quad (6.77)$$

$$\vec{w} = -\frac{K}{\mu} \vec{\nabla}p, \quad (6.78)$$

$$\vec{w}(x, y) = \frac{1}{H} \int_0^{h(|\vec{\nabla}p|)} \vec{u}(x, y, z) dz, \quad (6.79)$$

$$K(x, y) = \frac{1}{H} \int_0^{h(|\vec{\nabla}p|)} k(z) dz. \quad (6.80)$$

Вообще говоря, система уравнений (6.75)–(6.78) эквивалента уравнениям нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости, решение которой сложно и на практике проводится численными методами. Но при больших скоростях фильтрации пласт полностью промывается водой, закон фильтрации является линейным, из (6.76) можно выразить градиент давления

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K} \vec{w}. \quad (6.81)$$

### 6.8. Целики в однородном пласте

В случае однородного пласта с целиками нефти его проницаемость  $k=const$ , предельный градиент давления  $G$  тоже является постоянной величиной, а для мощности промытого слоя и эффективной проницаемости выполняются условия:

$$h(|\vec{\nabla}p|) = 0, K(|\vec{\nabla}p|) = 0, |\vec{\nabla}p| < G; h(|\vec{\nabla}p|) = H, K(|\vec{\nabla}p|) = k, |\vec{\nabla}p| > G. \quad (6.82)$$

Т. е. при достижении предельного градиента давления мощность промытой части пласта скачком становится равной мощности пласта с нулевых значений (скачкообразно начинается полностью промытая часть пласта после непромытой). Поскольку очевидно, что в реальности такой скачок наблюдать сложно, используется **подход М. Г. Алишаева**, когда условие предельного равновесия считается выполненным не на линейной границе, а в некоторой пограничной области  $D_2$ , в которой будет частично иметься целик остаточной нефти. Если обозначить за  $D_1$  и  $D_3$  соответственно области полностью промытого пласта и



непромытого пласта (где целик занимает весь объём этой части пласта), то имеется полуэмпирическая система уравнений

$$\Delta p(x, y) = 0, h(x, y) = H, (x, y) \in D_1, \quad (6.83)$$

$$|\vec{\nabla} p(x, y)| = G, \vec{\nabla} \left( \frac{h(x, y) \vec{\nabla} p}{G} \right) = 0, (x, y) \in D_2, \quad (6.84)$$

$$w(x, y) = 0, h(x, y) = 0, (x, y) \in D_3, \quad (6.85)$$

решаемая, как правило, численно, причём здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Различные конфигурации скважин и различные параметры пласта приводят к изменению конфигураций целиков нефти. Приведены результаты моделирования В. Н. Панкова и С. В. Панько для кругового пласта (рис. 6.8) и Баренблатта, Ентова, Рыжика для двухслойного пласта (рис. 6.9), где  $H_1$  и  $H_2$  – мощности первого и второго слоя пласта соответственно,  $k_1$  и  $k_2$  – проницаемости первого и второго слоя пласта соответственно,  $a$  – параметр обезразмеривания по длине.

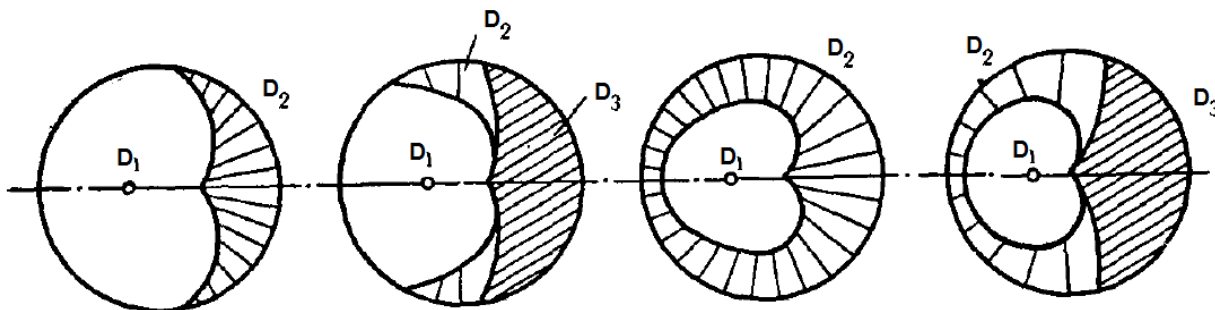


Рис. 6.8. Возможные конфигурации целиков остаточной нефти при разработке кругового пласта эксцентрично расположенной скважиной по результатам расчётов В. Н. Панкова и С. В. Панько [1].

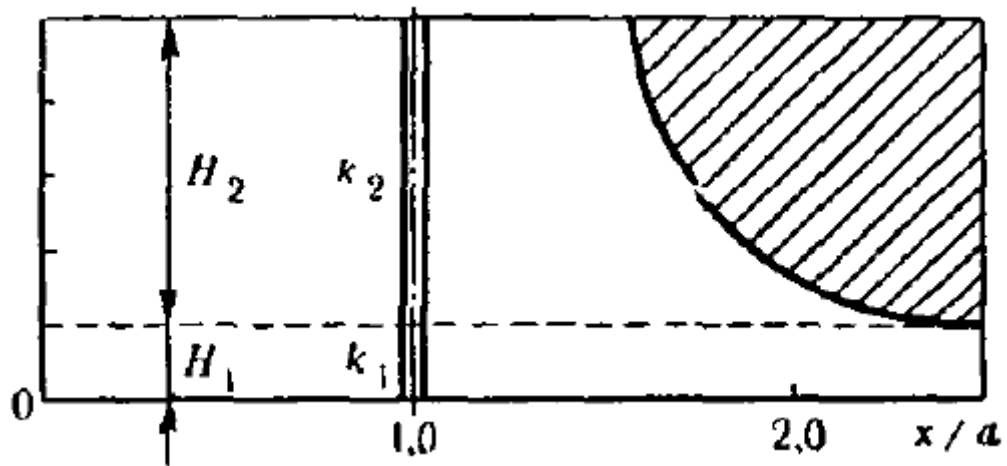


Рис. 6.9. Расположение целиков (заштрихованная область) в двухслойном пласте по расчётам Баренблатта, Ентова, Рыжика [1].

Более подробно теория вытеснения неньютоновской жидкости изложена в книгах Басниева, Кочиной, Максимова [2] и Баренблатта, Ентова, Рыжика [1].

#### Вопросы для самопроверки:

1. Чем отличается ньютоновская жидкость от неньютоновской?
2. Какова классификация неньютоновских жидкостей?
3. Каковы характерные зависимости для различных типов жидкостей?
4. Что такое кажущаяся вязкость?
5. Как записывается уравнение пьезопроводности?
6. Что такое коэффициент пьезопроводности?
7. Как записать закон фильтрации вязкопластичной жидкости в пористой среде?
8. Каково распределение давления в пласте для вязкопластичной жидкости при плоскорадиальной одномерной фильтрации?
9. Как определить дебит вязкопластичной жидкости при плоскорадиальной одномерной фильтрации?
10. Как можно оценить предельный градиент давления?

11. Как изменяется предельный градиент давления для некоторой фазы с ростом насыщенности ею?
12. Как вводится функция распределения потоков при фронтальном вытеснении неньютоновской жидкости?
13. Как меняется график функции распределения потоков в зависимости от водонасыщенности при изменении суммарной скорости фильтрации?
14. Что такое целики остаточной нефти?
15. Что такое эффективная скорость и эффективная проницаемость?
16. В чём заключается подход М. Г. Алишаева к описанию однородного пласта с целиками?

## **6.9. Практическая работа**

### **Решение уравнения пьезопроводности методом Монте-Карло**

Решить уравнение пьезопроводности с помощью задания функции ошибок в Excel и методом Монте-Карло, взять  $N=1000$  точек, в момент времени  $t=1$  сут., коэффициент пьезопроводности  $0,1 \text{ м}^2/\text{с}$ , длина пласта  $300 \text{ м}$ , шаг по координате для построения распределения давления  $1 \text{ м}$ , давление на галерее скважин  $8 \text{ МПа}$ , давление на контуре питания  $10 \text{ МПа}$ . На усмотрение преподавателя возможно решение в безразмерном виде с самостоятельным обезразмериванием. Сделать выводы и написать отчёт.

# ГЛАВА 7. ЯВНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ

## 7.1. Явная конечно-разностная схема для решения уравнения пьезопроводности

Удобно использовать уравнение пьезопроводности (6.12) в безразмерном виде. Для этого вводятся безразмерная координата  $X$  и безразмерное время  $T$ :

$$X = \frac{X}{L}, T = \frac{t}{t_0}, \quad (7.1)$$

где характерное время

$$t_0 = \frac{L^2}{\alpha}. \quad (7.2)$$

Безразмерное давление вводится как (6.15). Тогда уравнение пьезопроводности (6.12) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}. \quad (7.3)$$

Условия (6.13) и (6.14) примут вид:

$$T = 0: P = 1, X > 0, \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} X = 0: P = 0, T \geq 0, \\ X = 1: P = 1, T \geq 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

Аналитическое решение будет выглядеть так:

$$P = \operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{T}}\right). \quad (7.6)$$

Проведение обезразмеривания и получение аналитического решения предлагается читателю в практической работе к данной главе, если это не было сделано в предыдущей.

Не во всех случаях возможно найти решение уравнений в частных производных (или поиск решения затруднителен), например, если не удастся подобрать автомодельную переменную. В этом случае следует использовать численные методы их решения, которые позволяют

достаточно быстро и без особого труда получить искомые зависимости. Наиболее простым численным методом решения уравнений в частных производных является **явная конечно-разностная схема** (с аппроксимацией производных в виде конечных разностей по методу Эйлера). Метод носит такое название, поскольку искомая переменная может быть выражена в явном виде (напрямую из выражения для численной схемы).

Следует отметить, что  $P$  – функция двух переменных  $X$  и  $T$ , где  $X$  – координата,  $T$  – время. Далее вводится двумерная численная сетка с равномерным разбиением по каждой из осей с шагами  $\Delta X$  и  $\Delta T$  соответственно, причём  $P_i^n$  – значение безразмерного давления на  $i$ -том слое по  $X$  и  $n$ -ом временном слое. Тогда для частной производной по  $T$  следует менять только индекс, отвечающий за временные слои, а индекс по координате оставлять постоянным, поэтому (с учётом соответствующего шага сетки) аппроксимация производной в виде конечной разности выглядит так:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta T}. \quad (7.7)$$

Здесь значения на  $n$ -ом слое известны из начальных и граничных условий или предшествующих расчётов, искомой является значение функции на  $(n+1)$ -ом слое.

Производная по координате должна быть расписана в известный момент времени для получения явной схемы (если расписать на неизвестном  $(n+1)$ -ом слое, получится неявная схема) при изменении только индекса по координатной оси:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{\Delta X}. \quad (7.8)$$

Для второй производной по  $X$ :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{\Delta X} \right). \quad (7.9)$$

Далее необходимо расписать каждое из значений функции под производной аналогично (7.8) как разность значений функции на текущем шаге по координате и на предыдущем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{\Delta X} \right) = \frac{\frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{\Delta X} - \frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{\Delta X}}{\Delta X} = \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{\Delta X^2}. \quad (7.10)$$

Таким образом, согласно (7.7) и (7.9) для безразмерного уравнения пьезопроводности (7.3) имеем:

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta T} = \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{\Delta X^2}. \quad (7.11)$$

Выражение (7.11) – **явная конечно-разностная схема для уравнения пьезопроводности** (явная схема). Отсюда напрямую можно выразить неизвестное значение безразмерного давления на новом временном слое:

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \frac{\Delta T}{\Delta X^2} (P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n). \quad (7.12)$$

Начальное условие (7.4) с учётом (7.5) тогда примет вид:

$$P_1^1 = 0; P_i^1 = 1, i = \overline{2, N}, \quad (7.13)$$

где  $N$  – число шагов по  $X$ .

Левое граничное условие из (7.5) (при  $X=0$ ):

$$P_1^n = 0, \quad (7.14)$$

где  $n$  – любой временной слой.

Вместо условия на бесконечности для правой границы  $X=1$  следует взять условие отсутствия потока давления (поскольку дальнейшая область нас не интересует), то есть его нулевой градиент:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0. \quad (7.15)$$

При использовании (7.8) получим:

$$P_{i+1}^n = P_i^n, i = N - 1. \quad (7.16)$$

Далее необходимо рассмотреть порядок расчёта по явной схеме. Возьмём для примера первый временной слой  $n=1$  численной сетки

(рис. 7.1). На этом слое значения безразмерного давления известны из начального условия (7.13). Тогда значение на новом временном слое  $n=2$  в некотором узле, например,  $i=2$ , может быть рассчитано по формуле (7.12) (на рис. 7.1 рассчитываемый узел отмечен крестиком на точке, необходимые для расчёта значения – точками). Так на данном временном слое может быть посчитана любая  $i$ -ая точка, кроме лежащих на левой и правой границах, как видно из (7.12). В свою очередь, они известны из граничных условий (7.14) и (7.16).

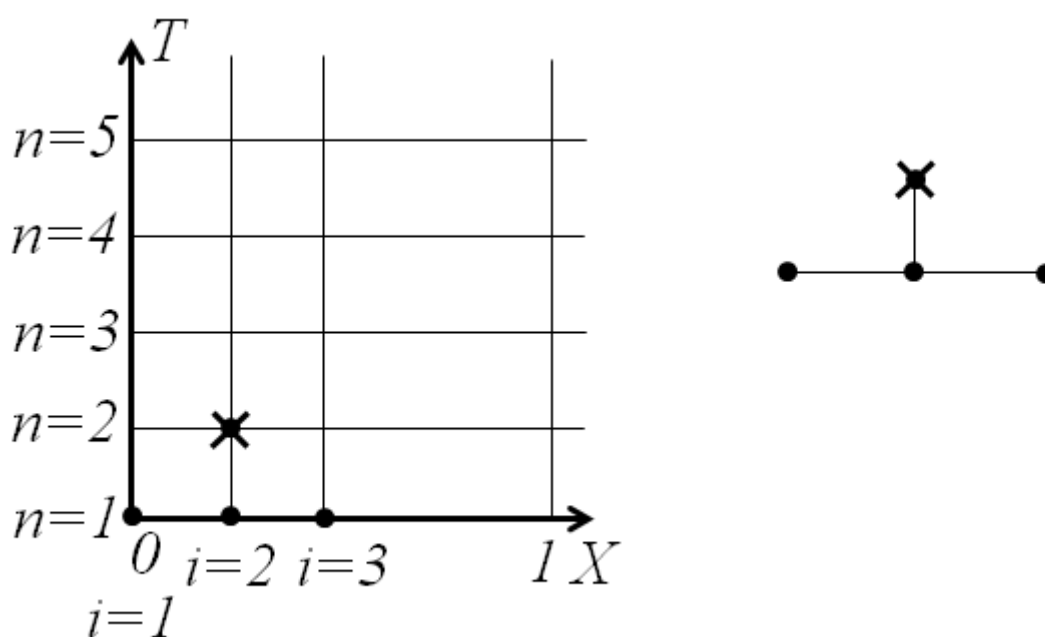


Рис. 7.1. Явная конечно-разностная схема и её криптографическое изображение.

Описанная процедура может быть продолжена на следующем временном слое  $n=3$ , поскольку теперь значения на втором временном слое заменят начальные для третьего слоя. Значит, таким образом можно рассчитать значения для всех моментов времени (на всех временных слоях, которых на рис. 7.1 показано 5). Разбиение на узлы по  $X$  следует вести от 0 до 1.

Из левой части рис. 7.1 (численной сетки) видна характерная конструкция расчёта узлов явной конечно-разностной схемы, эквивалентная формуле (7.12) – криптографическое изображение явной конечно-разностной схемы, показанное на рис. 7.1 справа.

## 7.2. Порядок аппроксимации, устойчивость и сходимость явной схемы для уравнения пьезопроводности

Далее следует проверить порядок аппроксимации явной конечно-разностной схемы для производной по времени и второй производной по координате (который будет зависеть только от самого метода и порядка производных в силу разного применения метода к ним и не зависеть от вида конкретных уравнений). Начнём с (первой) производной по времени.

Разложим значение функции на новом временном слое в ряд Тейлора в окрестности точки  $n$ :

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \frac{\partial P}{\partial T} \Delta T + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \Delta T^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial T^3} \Delta T^3 + \dots$$

Получим в левой части выражение, аналогичное (7.7):

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta T} = \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \Delta T + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial T^3} \Delta T^2 + \dots$$

В силу малости шага  $\Delta T^2 \ll \Delta T$ , поэтому третьим и всеми последующими членами ряда можно пренебречь, что приводит к выражению

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta T} = \frac{\partial P}{\partial T} + o(\Delta T), \quad (7.17)$$

что означает первый порядок аппроксимации производной по времени.

Для производной по координате следует разложить значения функции в соседних к текущему узлах в окрестности этого узла  $i$ :



$$P_{i+1}^n = P_i^n + \frac{\partial P}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \Delta X^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial X^3} \Delta X^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 P}{\partial X^4} \Delta X^4 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 P}{\partial X^5} \Delta X^5 +$$

$$+ \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 P}{\partial X^6} \Delta X^6 + \dots,$$

$$P_{i-1}^n = P_i^n - \frac{\partial P}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \Delta X^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 P}{\partial X^3} \Delta X^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 P}{\partial X^4} \Delta X^4 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 P}{\partial X^5} \Delta X^5 +$$

$$+ \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 P}{\partial X^6} \Delta X^6 - \dots,$$

после чего, при сложении этих выражений и переносе  $P_i^n$  в левую часть, а также при делении на  $\Delta X^2$ , получим выражение в левой части, аналогичное формуле (7.10):

$$\frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta X)^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 P}{\partial X^4} \Delta X^2 + \frac{1}{360} \frac{\partial^6 P}{\partial X^6} \Delta X^4 + \dots$$

В силу малости шага  $\Delta X^4 \ll \Delta X^2$ , поэтому третьим и всеми последующими членами ряда можно пренебречь, что приводит к выражению

$$\frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{\Delta X^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + o(\Delta X^2), \quad (7.18)$$

что означает второй порядок аппроксимации второй производной по координате.

Устойчивость явной схемы можно проверить **методом Неймана с помощью разложения в ряд Фурье** (или просто **метод Неймана**, поскольку именно в этой модификации его рекомендовал фон Нейман).

С учётом выражений для давления, аналогичных (1.70) – (1.72):

$$P_j^n = P_j(T^n) e^{ikX_j}, \quad (7.19)$$

$$P_{j\pm 1}^n = P_j(T^n) e^{ikX_{j\pm 1}}, \quad (7.20)$$

$$P_j^{n+1} = P_j(T^{n+1}) e^{ikX_j}, \quad (7.21)$$

получим (координатный индекс заменили на  $j$ , чтобы не путать с мнимой единицей  $i$ ):

$$P_j(T^{n+1}) e^{ikX_j} = P_j(T^n) e^{ikX_j} + \frac{\Delta T}{\Delta X^2} P_j(T^n) (e^{ikX_{j+1}} - 2e^{ikX_j} + e^{ikX_{j-1}}), \quad (7.22)$$

$$P_j(T^{n+1}) = P_j(T^n) \left( 1 + \frac{2\Delta T}{\Delta X^2} \left( -1 + \frac{e^{ik\Delta X} + e^{-ik\Delta X}}{2} \right) \right), \quad (7.23)$$

где учтён шаг по координате (равномерный):

$$\Delta X = X_{j+1} - X_j = X_j - X_{j-1}. \quad (7.24)$$

Из теории функции комплексного переменного известно, что

$$\frac{e^{ik\Delta X} + e^{-ik\Delta X}}{2} = \text{ch}(ik\Delta X) = \cos(k\Delta X), \quad (7.25)$$

но из тригонометрии по формулам понижения степени:

$$\sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right) = \frac{1 - \cos(k\Delta X)}{2}, \quad (7.26)$$

$$\cos(k\Delta X) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right), \quad (7.27)$$

поэтому:

$$P_j(T^{n+1}) = P_j(T^n) \left( 1 - \frac{2\Delta T}{\Delta X^2} \left( 1 - \left( 1 - 2 \sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right) \right) \right) \right), \quad (7.28)$$

$$P_j(T^{n+1}) = P_j(T^n) \left( 1 - \frac{4\Delta T}{\Delta X^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right) \right). \quad (7.29)$$

По определению синуса его модуль (и квадрат) не превосходят единицы:

$$\sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right) \leq 1, \quad (7.30)$$

$$P_j(T^{n+1}) = P_j(T^n) \left( 1 - \frac{4\Delta T}{\Delta X^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta X}{2}\right) \right) \leq C_j(T^n) \left( 1 - \frac{4\Delta T}{\Delta X^2} \right). \quad (7.31)$$

Чтобы ошибка не накапливалась, коэффициент перехода  $G$  должен не превосходить единицу по модулю:

$$G = \left( 1 - \frac{4\Delta T}{\Delta X^2} \right), \quad (7.32)$$

$$\left| 1 - \frac{4\Delta T}{\Delta X^2} \right| \leq 1, \quad (7.33)$$

$$-1 \leq 1 - \frac{4\Delta T}{\Delta X^2} \leq 1. \quad (7.34)$$

Из правого неравенства имеем  $\Delta T \geq 0$ , что выполняется всегда (шаг положителен), из левого:

$$-2 \leq -\frac{4\Delta T}{\Delta X^2}, \quad (7.35)$$

откуда получается условие устойчивости

$$\Delta T \leq \frac{\Delta X^2}{2}. \quad (7.36)$$

Условие (7.36) называют **условием Неймана (Куранта)** в честь исследователей, которые его впервые получили.

Сходимость метода проверяется путём уменьшения шага по времени и сравнения численного решения с аналитическим.

Допущения для задачи совпадают с допущениями, принятыми в разделе 6.2 для уравнения пьезопроводности.

#### **Вопросы для самопроверки:**

1. Как аппроксимируется первая производная по времени в явной конечно-разностной схеме?
2. Как аппроксимируется вторая производная по координате в явной конечно-разностной схеме?
3. Как записывается явная схема для уравнения пьезопроводности?
4. Каково криптографическое изображение явной схемы?
5. Каков порядок аппроксимации производных при использовании явной схемы?
6. Как получить условие устойчивости для явной схемы?
7. Что такое условие Неймана (Куранта)?

### 7.3. Практическая работа

#### Решение уравнения пьезопроводности явной конечно-разностной схемой

Решить уравнение пьезопроводности с помощью явной конечно-разностной схемы, взять  $N=100$  точек по координате, решение получать в момент времени  $t=1$  сут. Давление на галерее скважин 8 МПа, давление на контуре питания 10 МПа. Коэффициент пьезопроводности  $0,1 \text{ м}^2/\text{с}$ , длина пласта 300 м, шаг по безразмерной координате 0,01, шаг по безразмерному времени  $10^{-5}$ , проверить сходимость численного решения к аналитическому, для этого использовать дополнительно численное решение при шаге по безразмерному времени  $10^{-6}$ . Сделать выводы и написать отчёт.

## ГЛАВА 8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПЛАСТЕ

### 8.1. Уравнение теплопроводности. Распределение температуры в пласте в зависимости от расстояния до нагнетательной скважины

Фонтанный способ добычи нефти на практике встречается достаточно редко, особенно с учётом истощения традиционных (легко добываемых) запасов и увеличения доли тяжёлой (высоковязкой, малоподвижной) нефти. Поэтому необходимо пробурить ещё одну скважину в пару к **добывающей** (по которой извлекается нефть) – **нагнетательную**, через которую закачивается **вытесняющий агент** – то вещество (смесь), которое поможет двигаться нефти к добывающей скважине, если её подвижность в силу свойств недостаточна для фонтанного способа добычи. За счёт высокой подвижности и своих свойств (зависящих от вида) этот агент способствует движению нефти к добывающей скважине, при этом необходимо условие создания меньшего давления на забое скважины. Поскольку среди нетрадиционных запасов значительную долю занимают высоковязкие (тяжёлые) нефти, то в качестве нагнетаемого в пласт вещества будем рассматривать пар. Исследователями установлено [4], что динамическая вязкость  $\mu$  таких нефтей существенно снижается с увеличением температуры  $T$  (рис. 8.1). Пусть при начальной температуре пласта  $T_n$  нефть имела вязкость  $\mu_0$ , которая была слишком большой, чтобы эта нефть была подвижной. При нагреве нефти (и пласта) до некоторой критической температуры  $T_{cr}$  вязкость нефти упадёт до значения  $\mu_1$ , при котором нефть станет подвижной. Таким образом, важно проведение расчёта распределения температуры в пласте при его разогреве для оценки области подвижной нефти (которая будет располагаться в тех местах пласта, где температура сравнялась с критической или превзошла её).

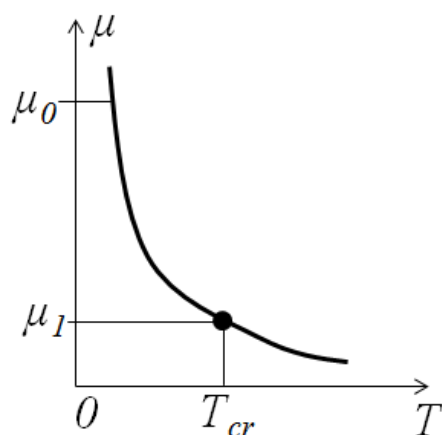


Рис. 8.1. Типичная зависимость вязкости тяжёлой нефти от температуры.

Рассмотрим объект исследования – пласт, в котором пробурена нагнетательная скважина. Понятно, что в каждую из сторон от нагнетательной скважины распределение температуры будет одинаковым. Разогрев пласта будет идти по горизонтали от нагнетательной скважины. Пусть в пласте имеются две нагнетательные скважины (рис. 8.2). Тогда граница области, относящейся к влиянию одной нагнетательной скважины, пройдёт посередине между этими скважинами (добывающие скважины на температуру не влияют, поэтому их рассматривать не будем). Обозначим размер области пласта, относящейся к выбранной нагнетательной скважине, как  $L$ .

Перед решением задачи необходимо введение некоторых допущений:

1. Пласт изотропный (его свойства всюду одинаковы).
2. Большая скорость закачки пара, что приводит к постоянной температуре во всём стволе скважины  $T_c$  (по всей глубине).
3. Задача одномерна (разогрев идёт по горизонтали).

4. Температуропроводность  $a$ , характеризующая способность пласта разогреваться, постоянна.
5. Начальная температура пласта всюду равна  $T_n$ .

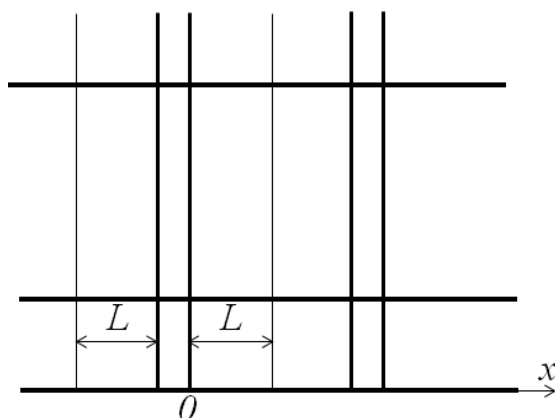


Рис. 8.2. Пласт с двумя нагнетательными скважинами.

Поскольку задача одномерна, выберем декартову одномерную систему координат, ось  $x$  направим по горизонтали, начало отсчёта поставим на границу скважины, откуда начинается отсчёт размеров области  $L$ . Значит,  $L$  – половина расстояния между соседними нагнетательными скважинами.

Для решения этой задачи необходимо использовать **уравнение теплопроводности**, подробный вывод которого даётся в курсе теплофизики:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (8.1)$$

Видно, что это уравнение в частных производных параболического типа. Единица измерения температуропроводности –  $\text{м}^2/\text{с}$ .

С помощью уравнения (8.1) можно получить распределение температуры в пласте, чтобы оценить область подвижной нефти. Для простоты решения обезразмерим аргументы температуры, введя безразмерную координату

$$X = \frac{x}{L}, \quad (8.2)$$

и безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_0}. \quad (8.3)$$

Тогда уравнение теплопроводности (8.1) примет вид:

$$\frac{1}{t_0} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{a}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}. \quad (8.4)$$

Проверим размерность комплекса постоянных величин:

$$\left[ \frac{L^2}{a} \right] = \left[ \frac{\text{м}^2}{\frac{\text{м}^2}{\text{с}}} \right] = [\text{с}].$$

Тогда введём характерное время  $t_0$  именно так:

$$t_0 = \frac{L^2}{a}. \quad (8.5)$$

С учётом (8.5) **уравнение теплопроводности с безразмерными координатой и временем** из выражения (8.4):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}. \quad (8.6)$$

Далее необходимо задать начальные и граничные условия. Для уравнения (8.6) начальное условие должно быть одно, граничных – два. Начальное условие – температура в стволе скважины  $T_c$  (где расположено начало отсчёта, согласно рис. 8.2), и пластовая температура  $T_n$  в остальном пространстве (процесс ещё не начался):

$$t = 0, \tau = 0: T = \begin{cases} T_c, & x = 0, X = 0, \\ T_n, & x > 0, X > 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

Отсюда же следует первое граничное условие (при  $X=0$ ), а второе – пластовая температура на бесконечном удалении от нагревателя (нагнетательной скважины) (считаем, что было бы, если бы пласт по горизонтали был бесконечным):

$$x = 0, X = 0: T = T_c; \quad x \rightarrow \infty, X \rightarrow \infty: T \rightarrow T_n. \quad (8.8)$$



Аналитическое решение уравнения (8.6) при начальном и граничных условиях (8.7), (8.8) методом автомодельной переменной предоставляется читателю в практической работе к данной главе аналогично тому, как это было сделано для уравнения пьезопроводности в главе 6. Решение имеет вид:

$$T = (T_n - T_c) \operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau}}\right) + T_c. \quad (8.9)$$

Время прогрева  $\tau_{гр}$  определяется как время, при котором температура достигает своего критического значения на границе  $x=L$ .

## 8.2. Явная конечно-разностная схема для решения уравнения теплопроводности

Наиболее простым численным методом решения уравнения теплопроводности является явная конечно-разностная схема.

Пусть  $\Delta\tau$  – шаг численной сетки по времени,  $\Delta X$  – шаг численной сетки по координате. Аналогично (7.7)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta\tau}. \quad (8.10)$$

Аналогично (7.10):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta X} \right) = \frac{\frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta X} - \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta X}}{\Delta X} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta X^2}. \quad (8.11)$$

Таким образом, согласно (8.10) и (8.11), для уравнения теплопроводности (8.6) имеем:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta\tau} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta X^2}. \quad (8.12)$$

Выражение (8.12) – **явная конечно-разностная схема для уравнения теплопроводности** (явная схема). Отсюда напрямую можно выразить неизвестное значение температуры на новом временном слое:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n). \quad (8.13)$$

Начальное условие (8.7) тогда примет вид:

$$T_1^1 = T_c; T_i^1 = T_n, i = \overline{2, N}, \quad (8.14)$$

где  $N$  – число шагов по  $X$ .

Левое граничное условие из (8.8) (при  $X=0$ ):

$$T_1^n = T_c, \quad (8.15)$$

где  $n$  – любой временной слой.

Вместо условия на бесконечности для правой границы  $X=1$  следует взять условие отсутствия потока давления (поскольку дальнейшая область нас не интересует), то есть его нулевой градиент:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0. \quad (8.16)$$

При использовании конечной разности получим:

$$T_{i+1}^n = T_i^n, i = N - 1. \quad (8.17)$$

Аналогично материалу главы 7 для явной конечно-разностной схемы можно показать, что первая производная температуры по времени имеет первый порядок аппроксимации, вторая производная температуры по координате – второй. Доказательство этих рассуждений предоставляется читателю в практической работе к настоящей главе.

Кроме того, аналогично условию устойчивости явной схемы для уравнения пьезопроводности (см. главу 7) можно показать, что явная схема для уравнения теплопроводности имеет условие устойчивости:

$$\Delta\tau \leq \frac{\Delta X^2}{2}. \quad (8.18)$$

Вывод этого условия предоставлен читателю в настоящей главе.

Сходимость численного решения к аналитическому проверяется уменьшением шага по времени, когда численное решение должно стремиться к аналитическому.

### 8.3. Неявная конечно-разностная схема для решения уравнения теплопроводности

Другой метод решения – неявная конечно-разностная схема (неявная схема). Её преимущество состоит в большей устойчивости. Однако её реализация сложнее, чем реализация явной схемы.

Необходимость использования неявной схемы вызвана тем, что для некоторых уравнений (которые называются **жёсткими**) явная схема не применима. Метод носит такое название, поскольку искомая переменная не может быть выражена в явном виде (напрямую из выражения для численной схемы). При этом аппроксимация производной по времени аналогична явной схеме, но при замене производных по координате конечными разностями значения функции вычисляются на новом,  $(n+1)$ -ом, слое, что и приводит к невозможности выражения неизвестных значений (находящихся на  $(n+1)$ -ом слое). Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta X}, \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta X} \right) = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta X^2}. \quad (8.20)$$

Эти рассуждения могут быть продолжены и на производные высших порядков.

Таким образом, согласно (8.10) и (8.20) для уравнения теплопроводности (8.6) имеем:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta \tau} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta X^2}. \quad (8.21)$$

Выражение (8.21) – **неявная конечно-разностная схема для уравнения теплопроводности** (неявная схема).

Видно, что схема содержит значения температуры на новом (неизвестном) временном слое в разных узлах, поэтому они не могут

быть выражены в явном виде. Начальное условие остаётся (8.14), левое граничное условие примет вид:

$$T_1^{n+1} = T_c. \quad (8.22)$$

Правое граничное условие (5.10) примет вид:

$$T_{i+1}^{n+1} = T_i^{n+1}, i = N - 1. \quad (8.23)$$

Рассмотрим применение неявной схемы для расчётов. Возьмём для примера первый временной слой  $n=1$  численной сетки (рис. 8.3). На этом слое значения температуры известны из начального условия (8.14). Значение на новом временном слое  $n=2$  в некотором узле, например,  $i=2$ , зависит по формуле (8.21) не только от значения функции в том же узле в предыдущий момент времени, но и от соседних точек в новый момент времени (на рис. 8.3 рассчитываемый узел отмечен крестиком на точке, необходимые для расчёта значения – точками). Разбиение на узлы по  $X$  следует вести от 0 до 1, как уже отмечалось ранее.

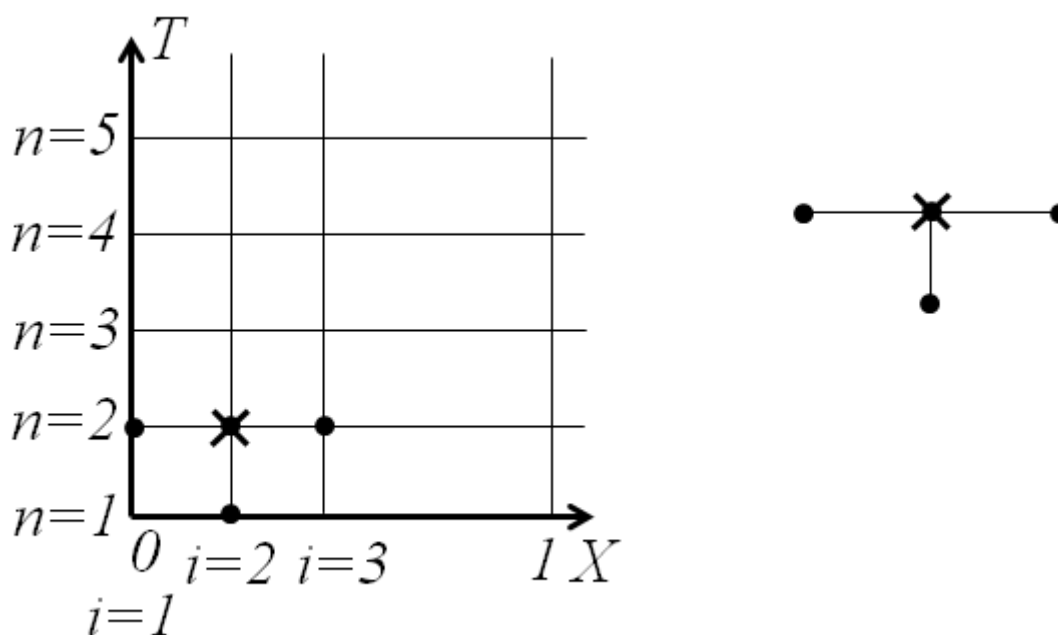


Рис. 8.3. Неявная конечно-разностная схема и её криптографическое изображение.

Крайние точки известны из граничных условий, однако остальные значения неизвестны, поэтому следует применять специальный метод для решения неявной схемы. Эти рассуждения оказываются справедливыми и для следующего временного слоя  $n=3$ , поскольку теперь значения на втором временном слое заменят начальные для третьего слоя. Значит, можно рассчитать значения для всех моментов времени (на всех временных слоях, которых на рис. 8.3 показано 5), если рассчитать каким-либо образом значения на новом временном слое.

Из левой части рис. 8.3 (численной сетки) видна характерная конструкция расчёта узлов неявной конечно-разностной схемы, эквивалентная формуле (8.21) – криптографическое изображение неявной конечно-разностной схемы, показанное на рис. 8.3 справа.

Для нахождения значения функции на новом временном слое из неявной схемы существует **метод прогонки**. Он заключается в представлении значений функции на новом временном слое через её значения в соседних расчётных узлах на этом же неизвестном слое в виде линейной функции. При этом вводятся **прогоночные коэффициенты**. Эти коэффициенты уже могут быть рассчитаны из вида схемы и введённых соотношений (традиционно с возрастанием индекса  $i$ , то есть слева направо – **прямая прогонка**). С помощью этих коэффициентов из записанных линейных функций и правого граничного условия (8.23) уже можно рассчитать значения функции в расчётных узлах (справа налево, то есть **обратная прогонка**). Запишем две линейные функции, связывающие значения на неизвестном слое:

$$T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + \beta_{i-1}, \quad (8.24)$$

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \quad (8.25)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – прогоночные коэффициенты.

Из (8.21) следует:

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}), \quad (8.26)$$

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} T_{i+1}^{n+1} - \left( \frac{2\Delta\tau}{\Delta X^2} + 1 \right) T_i^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} T_{i-1}^{n+1} = -T_i^n, \quad (8.27)$$

$$-\Delta\tau T_{i+1}^{n+1} + (2\Delta\tau + \Delta X^2) T_i^{n+1} - \Delta\tau T_{i-1}^{n+1} = \Delta X^2 T_i^n. \quad (8.28)$$

Введём некоторые обозначения для удобства:

$$F_i^n = \Delta X^2 T_i^n; D = A = -\Delta\tau; B = 2\Delta\tau + \Delta X^2. \quad (8.29)$$

С использованием (8.28) и (8.29) можно получить:

$$AT_{i+1}^{n+1} + BT_i^{n+1} + D\alpha_{i-1}T_i^{n+1} + D\beta_{i-1} = F_i^n, \quad (8.30)$$

$$T_i^{n+1} = \frac{-AT_{i+1}^{n+1} + F_i^n - D\beta_{i-1}}{B + D\alpha_{i-1}}. \quad (8.31)$$

При сравнении (8.31) и (8.25) получаются итоговые выражения для прогоночных коэффициентов для уравнения теплопроводности:

$$\alpha_i = -\frac{A}{B + D\alpha_{i-1}}, \quad (8.32)$$

$$\beta_i = \frac{F_i^n - D\beta_{i-1}}{B + D\alpha_{i-1}}, \quad (8.33)$$

откуда видно, что прогоночные коэффициенты зависят только от известных величин ( $F_i^n$  – на предыдущем временном слое, поэтому известна) и прогоночных коэффициентов в предыдущих узлах на данном временном слое при расчёте слева направо (крайнее левое значение известно из граничного условия, остальные считаются из (8.32) и (8.33) последовательно). Рассчитать их не составит труда, в этом и заключается прямая прогонка.

Далее из правого граничного условия (8.23) с учётом (8.25):

$$T_{i+1}^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, i = N - 1, \quad (8.34)$$

$$T_{i+1}^{n+1} = \frac{\beta_i}{1 - \alpha_i}, i = N - 1. \quad (8.35)$$

Формула (8.35) – правое граничное условие для уравнения диффузии через прогоночные коэффициенты.

Начальное условие (8.14) позволяет определить  $F_i^n$ , необходимое в (8.33). Из сравнения левого граничного условия (8.22) и соотношения (8.25):

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = T_c. \quad (8.36)$$

Соотношения (8.36) определяют левое граничное условие для уравнения теплопроводности через прогоночные коэффициенты.

Из (8.35) может быть посчитано значение искомой функции на правой границе на новом временном слое, далее из (8.25) становится возможным произвести расчёт значений функции в соседних узлах справа налево (обратная прогонка) на всём временном слое (вплоть до левой границы, где значение известно из соответствующего условия (8.36), эквивалентного (8.22)).

#### **8.4. Порядок аппроксимации, устойчивость и сходимость неявной схемы для уравнения теплопроводности**

Следует проверить порядок аппроксимации неявной конечно-разностной схемы для производной по времени и второй производной по координате. Порядок аппроксимации производной по времени для неявной схемы будет аналогичен порядку аппроксимации для явной схемы в силу одинаковости их аппроксимации, поэтому имеется первый порядок аппроксимации производной по времени. Аналогично для второй производной по координате будет иметься второй порядок аппроксимации. Доказательство этих утверждений предоставляется читателю в практической работе к настоящей главе.

Рассмотрим устойчивость неявной схемы для уравнения теплопроводности методом Неймана с помощью разложения в ряд Фурье.

С учётом выражений для температуры, аналогичных (7.19) – (7.21):

$$T_j^n = T_j(\tau^n)e^{ikX_j}, \quad (8.37)$$

$$T_{j\pm 1}^{n+1} = T_j(\tau^{n+1})e^{ikX_{j\pm 1}}, \quad (8.38)$$

$$T_j^{n+1} = T_j(\tau^{n+1})e^{ikX_j}, \quad (8.39)$$

получим (координатный индекс заменили на  $j$ , чтобы не путать с мнимой единицей):

$$T_j(\tau^{n+1})e^{ikX_j} = T_j(\tau^n)e^{ikX_j} + \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} T_j(\tau^{n+1})(e^{ikX_{j+1}} - 2e^{ikX_j} + e^{ikX_{j-1}}), \quad (8.40)$$

$$T_j(\tau^n) = T_j(\tau^{n+1}) \left( 1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta X^2} \left( 1 - \frac{e^{ik\Delta X} + e^{-ik\Delta X}}{2} \right) \right), \quad (8.41)$$

где учтён шаг по координате (равномерный) (7.24). Из теории функции комплексного переменного известно выражение (7.25), но из тригонометрии по формулам понижения степени можно получить (7.26) и (7.27), поэтому:

$$T_j(\tau^n) = T_j(\tau^{n+1}) \left( 1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta X^2} \left( 1 - \left( 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{k\Delta X}{2} \right) \right) \right) \right), \quad (8.42)$$

$$T_j(\tau^n) = T_j(\tau^{n+1}) \left( 1 + \frac{4\Delta\tau}{\Delta X^2} \sin^2 \left( \frac{k\Delta X}{2} \right) \right). \quad (8.43)$$

Чтобы ошибка не накапливалась, коэффициент перехода от слоя  $(n+1)$  к  $n$  должен не превосходить единицу по модулю:

$$G = \frac{1}{\left( 1 + \frac{4\Delta\tau}{\Delta X^2} \sin^2 \left( \frac{k\Delta X}{2} \right) \right)}, \quad (8.44)$$

$$\left| \frac{1}{\left( 1 + \frac{4\Delta\tau}{\Delta X^2} \sin^2 \left( \frac{k\Delta X}{2} \right) \right)} \right| \leq 1. \quad (8.45)$$

Поскольку квадрат синуса неотрицателен, шаги положительны, то условие (8.45) выполняется всегда. Неявная схема абсолютно устойчива.

Сходимость численного решения к аналитическому проверяется уменьшением шага по времени, когда численное решение должно стремиться к аналитическому.



### Вопросы для самопроверки:

1. Какова зависимость вязкости тяжёлой нефти от температуры?
2. Какова размерность температуропроводности?
3. Как ввести безразмерные время и координату для уравнения теплопроводности?
4. Как аппроксимируется первая производная по времени в неявной конечно-разностной схеме?
5. Как аппроксимируется вторая производная по координате в неявной конечно-разностной схеме?
6. Как записывается явная схема для уравнения теплопроводности?
7. Как записывается неявная схема для уравнения теплопроводности?
8. Каково криптографическое изображение неявной схемы?
9. Каков порядок аппроксимации производных при использовании неявной схемы?
10. Как получить условие устойчивости для неявной схемы?

## 8.5. Практическая работа

### Оценка размеров области подвижной нефти

Определить область подвижной нефти в пласте, то есть ту часть пласта, где температура уже достигла критического значения  $T_{cr}$ , при котором нефть считается подвижной. С помощью решения уравнения теплопроводности явной и неявной конечно-разностными схемами следует построить графики  $T=T(\tau)$  при  $X=1$  (на границе области  $x=L$ , относящейся к одной нагнетательной скважине) и  $T=T(X)$ . Определить время прогрева. Шаг по времени  $10^{-5}$ , по координате 0,01, число шагов по координате 101. Расчёт по времени следует прекратить, когда температура превысит критическое значение. Найти размерное время

прогрева. Построить распределение температуры вдоль координаты для 5 различных моментов времени, выбранных на собственное усмотрение. Проверить сходимость численного решения для обеих схем для распределения температуры вдоль координаты. Сопоставить численные решения с аналитическим, которое необходимо получить. Рассчитать порядок аппроксимации производных по обеим схемам, проверить их устойчивость.

Для расчётов необходимы следующие данные (выбрать из диапазона):

$$T_{п} = (300 \div 350) \text{ К}, T_c = (373 \div 400) \text{ К}, T_{cr} = (320 \div 330) \text{ К},$$

$$L = (20 \div 30) \text{ м}, a = 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Также необходимо сделать выводы и написать отчёт.

## ГЛАВА 9. ПРОЦЕССЫ В ПЛАСТЕ ПРИ НАЛИЧИИ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ

### 9.1. Процессы массопереноса в пористой среде при наличии активной примеси

Пусть жидкость в пласте содержит некоторую примесь с концентрацией  $c$ , а часть этой активной примеси растворена в скелете породы с объёмной долей  $a$  в результате поглощения (сорбции). Плотность раствора  $\rho$  является функцией концентрации примеси  $c$ , температуры  $T$  и давления  $p$ :

$$\rho = \rho(c, T, p). \quad (9.1)$$

Примесь называется **активной**, если она влияет на гидродинамику потоков.

При этом в единице объёма пористой среды содержится  $mc+a$  примеси, остальную долю занимает растворитель. Кроме того, при фильтрации происходит перенос растворённого вещества в результате диффузии, плотность конвективного потока массы

$$\vec{q}_k = c\vec{w}, \quad (9.2)$$

где  $w$  – скорость фильтрации растворителя и примеси.

Также необходимо учесть диффузионный поток по первому закону Фика с плотностью потока массы:

$$\vec{q}_d = -D\vec{\nabla}c, \quad (9.3)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии.

Коэффициент диффузии в простейшем однородном изотропном случае является величиной, одинаковой во всех частях пласта, однако это допущение не всегда верно, и коэффициент диффузии, вообще говоря, может являться тензором. Следует рассмотреть эффекты диффузии подробнее. Для начала необходимо учесть, что в порах может находиться газ (например, воздух), коэффициент диффузии

которого  $D_r \approx c_p \lambda$ , где  $c_p$  – скорость пульсации, имеющая порядок скорости звука около  $10^2 \dots 10^3$  м/с,  $\lambda$  – длина свободного пробега, имеющая порядок около  $10^{-9} \dots 10^{-10}$  м, поэтому  $D_r$  имеет порядок не больше  $10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, в то время как обычно коэффициент диффузии имеет порядок около  $10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с и даже больше, поэтому диффузией в газе часто можно пренебречь.

Следует отметить, что в анизотропном пласте возможны флуктуации скорости не только по направлению движения, но и в направлениях, перпендикулярных к нему. Тогда в общем случае тензор коэффициента конвективной диффузии в главных осях  $D'$  будет иметь следующий вид, зависящий от модуля скорости фильтрации  $w$  [1]:

$$D' = \begin{pmatrix} l_{\parallel} w & 0 & 0 \\ 0 & l_{\perp} w & 0 \\ 0 & 0 & l_{\perp} w \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

где  $l_{\parallel}$  и  $l_{\perp}$  – характерные коэффициенты для диффузии вдоль потока и перпендикулярно ему соответственно, имеющие размерность длины.

Из экспериментов известно [1], что на самом деле коэффициент диффузии может зависеть от скорости фильтрации нелинейно, а по степенному закону:

$$D' \sim w^n, n \approx 1,1 \dots 1,2. \quad (9.5)$$

С учётом (9.2) и (9.3), а также возможной неоднородности (или анизотропии) пласта, общий диффузионный поток будет иметь плотность потока массы, рассчитываемую следующим образом:

$$\vec{q} = c\vec{w} - D\vec{\nabla}c, \quad (9.6)$$

$$q_i = cw_i - D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j}, \quad (9.7)$$

$$D_{ij} = D_r \delta_{ij} + D'_{ij}, \quad (9.8)$$

где  $q_i$  и  $w_i$  –  $i$ -тая компонента вектора плотности потока массы и скорости фильтрации соответственно,  $D_{ij}$  и  $D'_{ij}$  – компоненты тензора

коэффициента диффузии и тензора коэффициента конвективной диффузии в главных осях соответственно с номерами  $i$  и  $j$ ,  $x_j = x, y, z$  (декартовы оси) соответственно,  $\delta_{ij}$  – символ (тензор) Кронекера, в (9.7) подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу  $j$  по правилу Эйнштейна.

Тогда уравнение баланса примеси аналогично второму закону Фика

$$\frac{\partial(mc + a)}{\partial t} + \text{div}\vec{q} = 0, \quad (9.9)$$

что можно переписать с учётом (9.6) так:

$$\frac{\partial(mc + a)}{\partial t} + \vec{\nabla}(c\vec{w}) = \vec{\nabla}(D\vec{\nabla}c). \quad (9.10)$$

## 9.2. Процессы теплопереноса в пористой среде при наличии активной примеси

При наличии активной примеси уравнение теплопереноса (баланса тепла, теплопроводности) будет иметь следующий вид [1]:

$$\frac{\partial(CT + m\rho H)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho H\vec{u}) = \vec{\nabla}(\lambda\vec{\nabla}T) + Q, \quad (9.11)$$

где  $C$  – удельная объёмная теплоёмкость скелета породы (измеряется в  $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$ ),  $T$  – температура в кельвинах,  $u$  – скорость частиц жидкости,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности (измеряется в  $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  и общем случае может являться тензором, в частном – числом),  $Q$  – интенсивность тепловыделения (измеряется в  $\text{Вт}/\text{м}^3$ ),  $H$  – удельная энтальпия жидкости (измеряется в  $\text{Дж}/\text{кг}$ ), дифференциал которой равен

$$dH = C_p dT, \quad (9.12)$$

где  $C_p$  – удельная теплоёмкость жидкости при постоянном давлении (измеряется в  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ).

С учётом (9.12) уравнение (9.11) в отсутствие фазовых переходов и тепловыделения примет вид

$$\frac{\partial (CT + m\rho C_p T)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho C_p T \vec{u}) = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T). \quad (9.13)$$

Если все величины, кроме температуры, являются постоянными, то (9.13) примет вид уравнения конвективной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \vec{u} \vec{\nabla} T = \chi \Delta T, \quad (9.14)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа, а также введены обозначения постоянных

$$\gamma = \frac{\rho C_p}{C + m\rho C_p}, \quad (9.15)$$

$$\chi = \frac{\lambda}{C + m\rho C_p}. \quad (9.16)$$

### 9.3. Уравнение баланса активной примеси в многофазном случае

Ранее были рассмотрены лишь простейшие однофазные случаи, при учёте многофазных эффектов (а в пласте имеются, как правило, именно многофазные системы) записанные выше уравнения необходимо изменить.

Стоит отметить, что понятие активной примеси особенно важно при использовании химических методов увеличения нефтеотдачи.

Пусть в пласте имеется многофазная система с примесью. Вводится следующее допущение: концентрацию примеси следует считать малой и не меняющей удельных объёмов фаз. Фильтруются две фазы – вода и нефть. Примесь может находиться в трёх состояниях: растворённая в воде с концентрацией  $c_1$ , растворённая в нефти с концентрацией  $c_2$  и сорбированная скелетом породы с долей  $a$ . Если, как и ранее, обозначить за  $S$  насыщенность наиболее подвижной фазы –

воды, то, воспользовавшись тем, что сумма насыщенностей воды и нефти равна 1 из условия (2), можем получить, что полное количество примеси в единице объёма пористой среды будет равно  $(mSc_1 + m(1 - S)c_2 + a)$ , а полный поток примеси  $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \vec{q}$ , где  $u_i$  – скорость фильтрации  $i$ -той фазы (1 – вода, 2 – нефть),  $q$  – плотность диффузионного потока. Тогда, вводя скорость генерации примеси  $r$ , можем записать аналогично (9.9) уравнение баланса активной примеси в многофазном случае:

$$\frac{\partial(mSc_1 + m(1 - S)c_2 + a)}{\partial t} + \text{div}(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \vec{q}) = r. \quad (9.17)$$

В одномерном случае при отсутствии генерации примесей вводятся следующие обозначения

$$c_1 = c, c_2 = \varphi(c), a = a(c, S), F = F(c, S), \quad (9.18)$$

где  $\varphi(c)$  – некоторая функция концентрации,  $F$  – функция распределения потоков, аналогичная функции Баклея-Левретта (1.16), тогда (9.17) с учётом смысла функции распределения потоков аналогично методу Баклея-Левретта, а также смысла концентраций и долей в потоке можно записать в виде (введя суммарную скорость фильтрации  $u$  (1.8))

$$\frac{\partial(mSc + m(1 - S)\varphi(c) + a(c, S))}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}(cF + \varphi(c)(1 - F)) = 0. \quad (9.19)$$

Отсюда следует, что можно описать процессы с активной примесью аналогично другим процессам с использованием функции распределения потоков.

#### **9.4. Фронтальное вытеснение нефти раствором активной примеси. Автомодельные решения**

Для дальнейшего анализа процессов в пласте при наличии растворённой активной примеси необходимо рассмотреть фронтальное одномерное вытеснение нефти из полубесконечного пласта, причём

примесь, как и ранее, может находиться в нефти, воде и скелете породы. Чтобы получить решение, необходимо совместно с (9.19) рассматривать уравнение, полностью аналогичное уравнению Баклея-Левретта

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial F(c, S)}{\partial x} = 0. \quad (9.20)$$

Начальные и граничные условия для системы уравнений (9.19)–(9.20) будут такими:

$$S(x, 0) = S_0, c(x, 0) = c_0, S(0, t) = S_{гр}, c(0, t) = c_{гр}, \quad (9.21)$$

где  $S_0$  и  $c_0$  – начальные значения водонасыщенности и концентрации примеси в воде соответственно,  $S_{гр}$  и  $c_{гр}$  – соответствующие значения водонасыщенности и концентрации примеси в воде на границе.

По теории размерностей несложно ввести автомодельную переменную

$$\xi = \frac{mx}{ut}, \quad (9.22)$$

которая, очевидно, является безразмерной.

Тогда  $S = S(\xi), c = c(\xi)$ , но необходимо с учётом (9.22) выполнить пересчёт производных для любой функции  $f$ , зависящей от автомодельной переменной (функция распределения потоков зависит от  $S$  и  $c$ , которые зависят от  $\xi$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{mx}{ut^2} \frac{df}{d\xi} = -\frac{\xi}{t} \frac{df}{d\xi}, \quad (9.23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{m}{ut} \frac{df}{d\xi}. \quad (9.24)$$

Тогда уравнение (9.20) с учётом (9.23)–(9.24) примет вид

$$-\frac{\xi}{t} m \frac{dS}{d\xi} + \frac{m}{t} \frac{dF}{d\xi} = 0, \quad (9.25)$$

$$\xi \frac{dS}{d\xi} = \frac{dF}{d\xi}, \quad (9.26)$$



а уравнение (9.19) – такой вид:

$$-\frac{\xi}{t} \frac{d(mSc + m(1-S)\varphi(c) + a)}{d\xi} + \frac{m}{t} \frac{d}{d\xi} (cF + \varphi(c)(1-F)) = 0, \quad (9.27)$$

$$\xi \frac{d\left(Sc + (1-S)\varphi(c) + \frac{a}{m}\right)}{d\xi} = \frac{d(cF + \varphi(c)(1-F))}{d\xi}. \quad (9.28)$$

С учётом (9.22) начальные и граничные условия (9.21) примут вид

$$S(\infty) = S_0, c(\infty) = c_0, S(0) = S_{\text{гп}}, c(0) = c_{\text{гп}}, \quad (9.29)$$

На скачках насыщенности при этом должны выполняться условия баланса, вытекающие из уравнений (9.19)–(9.20) с учётом определения скорости движения скачка  $v$  как производной от координаты по времени (аналогично методу характеристик):

$$mv(S_+ - S_-) = u(F(S_+, c_+) - F(S_-, c_-)), \quad (9.30)$$

$$\begin{aligned} mv \left( S_+ + \frac{\varphi(c_+) - \varphi(c_-) + \frac{a(c_+) - a(c_-)}{m}}{c_+ - c_- + \varphi(c_-) - \varphi(c_+)} \right) = \\ = u \left( F(S_+, c_+) + \frac{\varphi(c_+) - \varphi(c_-)}{c_+ - c_- + \varphi(c_-) - \varphi(c_+)} \right), \end{aligned} \quad (9.31)$$

где  $S_+$  и  $c_+$  – значения насыщенности и концентрации до скачка,  $S_-$  и  $c_-$  – значения насыщенности и концентрации за скачком. При получении выражения (9.31) произведено деление на коэффициент, стоящий перед насыщенностью и  $F$ , получившийся из-за приведения подобных слагаемых в (9.28).

Решение этой задачи проводится методом характеристик, которые вводятся у Баренблатта, Ентова, Рыжика [1] следующим образом:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{u}{m} \frac{\partial F(c, S)}{\partial S}, \quad (9.32)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{u}{m} \frac{F + \varphi'(c)(1-F)}{S + (1-S)\varphi'(c) + \frac{a'(c)}{m}}, \quad (9.33)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – координаты воды и нефти в пласте соответственно, штрихом обозначена производная по концентрации примеси в воде.

Однако, в силу сложности аналитического метода, как правило, подобные задачи решаются графически, о чём будет сказано ниже. Необходимо только отметить, что при этом возникают некоторая характерная точка для описания процесса – полюс с координатами  $(-S_p, -F_p)$ , где насыщенность и функция распределения потоков в полюсе рассчитываются по формулам [1]:

$$S_p = \frac{\Delta\varphi + \Delta A}{\Delta c - \Delta\varphi}, F_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta c - \Delta\varphi}, \Delta c > \Delta\varphi, A = \frac{a}{m}, \quad (9.34)$$

где  $A$  – некоторое обозначение,  $\Delta$  означает изменение величины на скачке насыщенности. Выражение для полюса (9.34) получено из вида (9.31) с учётом соответствующих дробей в скобках.

## **9.5. Графическая интерпретация процесса вытеснения нефти раствором активной примеси**

Процесс вытеснения нефти раствором активной примеси наиболее просто и наиболее часто интерпретируется с помощью графического метода Велджа с некоторыми изменениями. Следует рассмотреть его подробнее.

В этом методе необходимо рассмотреть график функции распределения потоков, который строится по ОФП при различных значениях концентрации примеси в воде – один при нулевой, другой – при граничной концентрации  $c_{гр}$ , который всегда будет расположен правее первого в координатах  $(S, F)$  (рис. 9.1). График при  $c_{гр}$  имеет значение единицы в точке  $A$ , график при нулевой концентрации – в точке  $B$ .

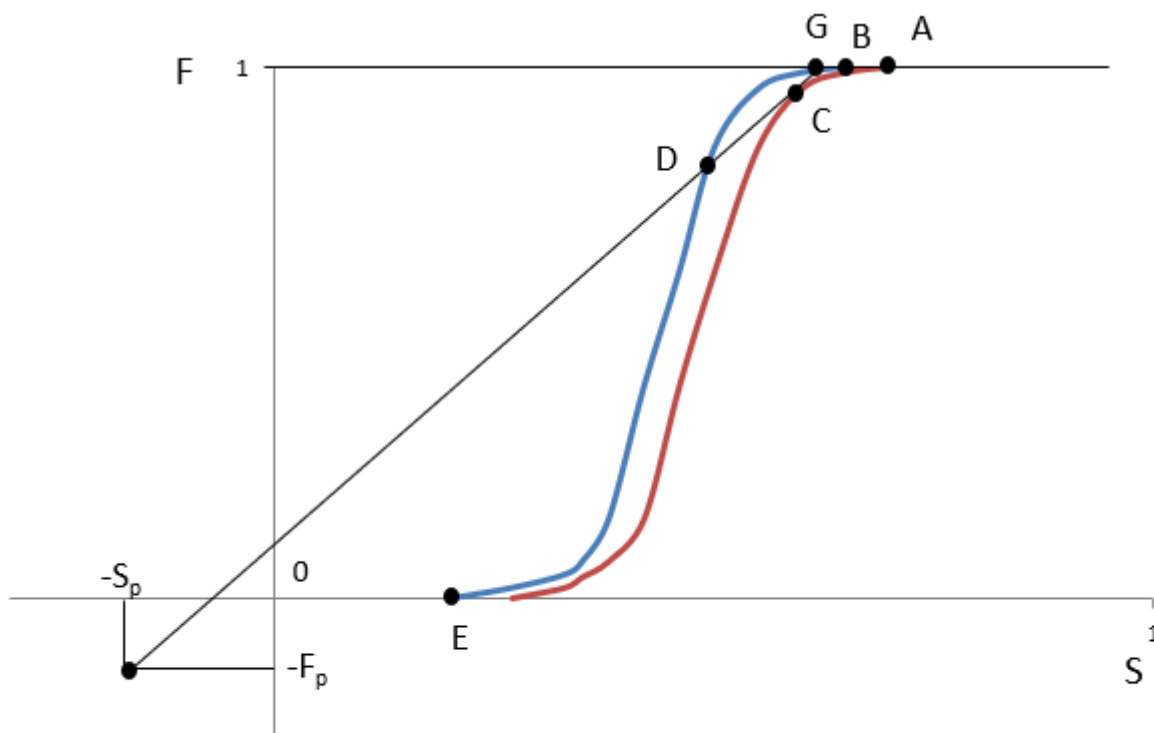


Рис. 9.1. Графическая интерпретация процесса вытеснения нефти раствором активной примеси, случай, когда касательная пересекает кривую  $F$  при нулевой концентрации дважды.

Далее определяются координаты полюса  $(-S_p, -F_p)$  с учётом (9.34). После этого к графику  $F$ , который расположен правее, из точки полюса проводится касательная (точка касания  $C$ ), которая пересекает левую кривую  $F$  в точках  $D$  и  $G$ , где  $D$  – первая из точек пересечения, если двигаться от полюса вдоль проведённой ко второму графику касательной. За  $E$  следует обозначить начальную точку кривой  $F$  при нулевой концентрации, соответствующую остаточной водонасыщенности  $S_E$ . Для отмеченных точек  $A, B, C, D, G$  находятся соответствующие значения водонасыщенности  $S_A, S_B, S_C, S_D, S_G$ .

Аналогично ранее рассмотренному методу Велджа тангенс угла наклона касательной  $\alpha$  к функции распределения потоков в данной точке

равен в настоящем случае отношению автомодельной переменной к безразмерному времени  $T$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\xi}{T}. \quad (9.35)$$

Тогда, с помощью проведения дополнительных касательных к графику функции распределения потоков при нулевой концентрации примеси в воде в точках  $D$  и  $G$  (рис. 9.2), из (9.35), поскольку касательная в точку  $C$  уже проведена, можно определить значения автомодельной переменной для этих точек  $\xi_C$ ,  $\xi_D$ ,  $\xi_G$ . При этом, очевидно, значения автомодельной переменной для точек  $A$  и  $B$  будут равны 0.

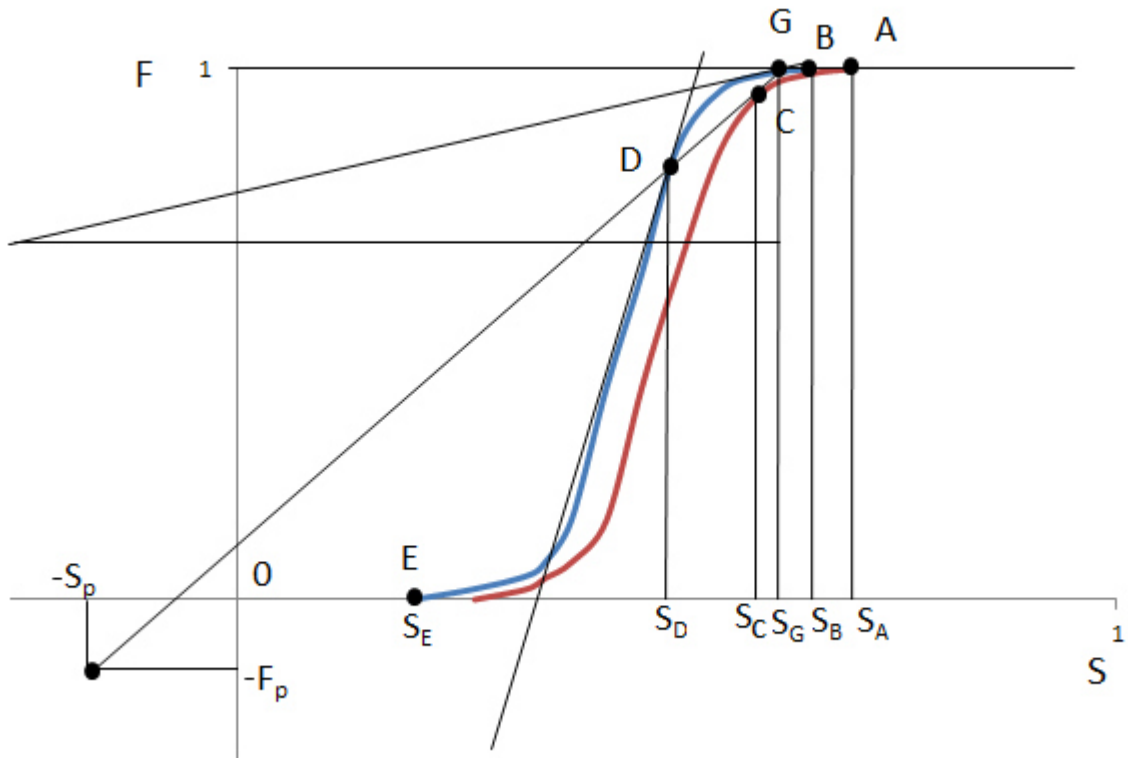


Рис. 9.2. Проведение касательных для графика процесса вытеснения нефти раствором активной примеси, случай, когда касательная пересекает кривую  $F$  при нулевой концентрации дважды.

Из общего анализа решения, проведённого Баренблаттом, Ентовым и Рыжиком [1], следует, что водонасыщенность будет иметь два скачка, один из которых связан с классическим фронтом вытеснения (до остаточной водонасыщенности), другой – с изменением концентрации примеси в воде (рис. 9.3). Кроме того, наблюдается некоторая неоднозначность на границе (наличие значений  $S_A$  и  $S_B$ ). Зависимость водонасыщенности от автомодельной переменной (соответствующей координате фактически) строится так: при нулевом значении  $\xi$  ставятся точки  $S_A$  и  $S_B$ , затем идёт плавное уменьшение насыщенности до значения  $S_G$  при  $\xi_G$ , после чего насыщенность сохраняет данное значение до скачка при  $\xi_C$ , падая сразу до значения  $S_D$  (поскольку точки пересечения  $D$  и  $G$  находятся на одной касательной, проведённой в точке  $C$ ). Это значение насыщенности сохраняет до второго (классического) скачка при  $\xi_D$ , связанному с фронтом вытеснения, причём водонасыщенность падает уже до остаточной  $S_E$ .

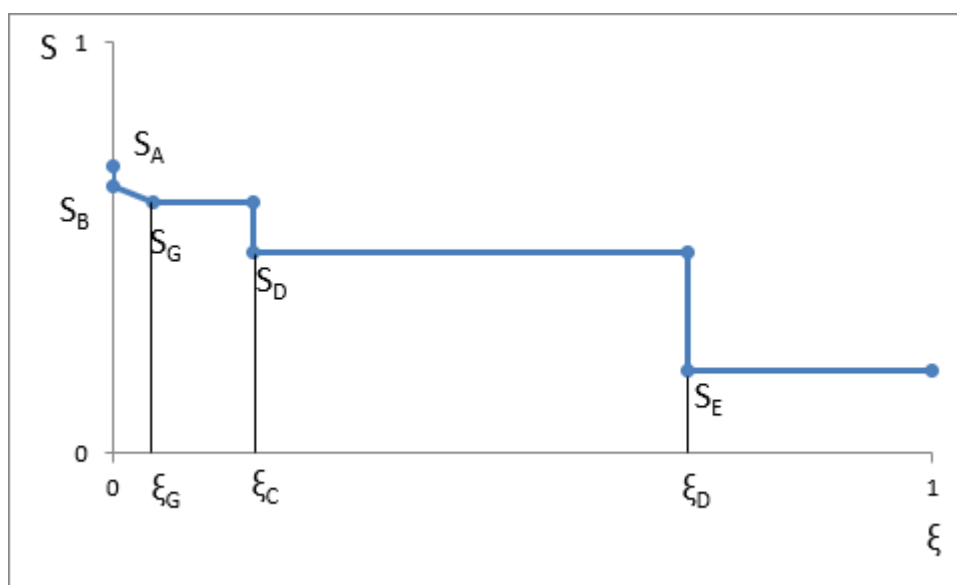


Рис. 9.3. График водонасыщенности в зависимости от автомодельной переменной при вытеснении нефти раствором активной примеси, случай, когда касательная пересекает кривую  $F$  при нулевой концентрации дважды.

При отсутствии повторного пересечения левой кривой  $F$  касательной, проведённой из полюса к правой кривой  $F$  (когда отсутствует точка  $G$ ) (рис. 9.4) графический метод в целом аналогичен, но не проводится касательная в точку  $G$  (рис. 9.5) и не находятся насыщенность  $S_G$  и координата  $\xi_G$ . Соответственно, при любых моментах времени водонасыщенность со значения  $S_B$  будет снижаться до значения  $S_C$ , достигая его при  $\xi_C$  (рис. 9.6), а не до  $S_G$  при  $\xi_G$ , как было ранее.

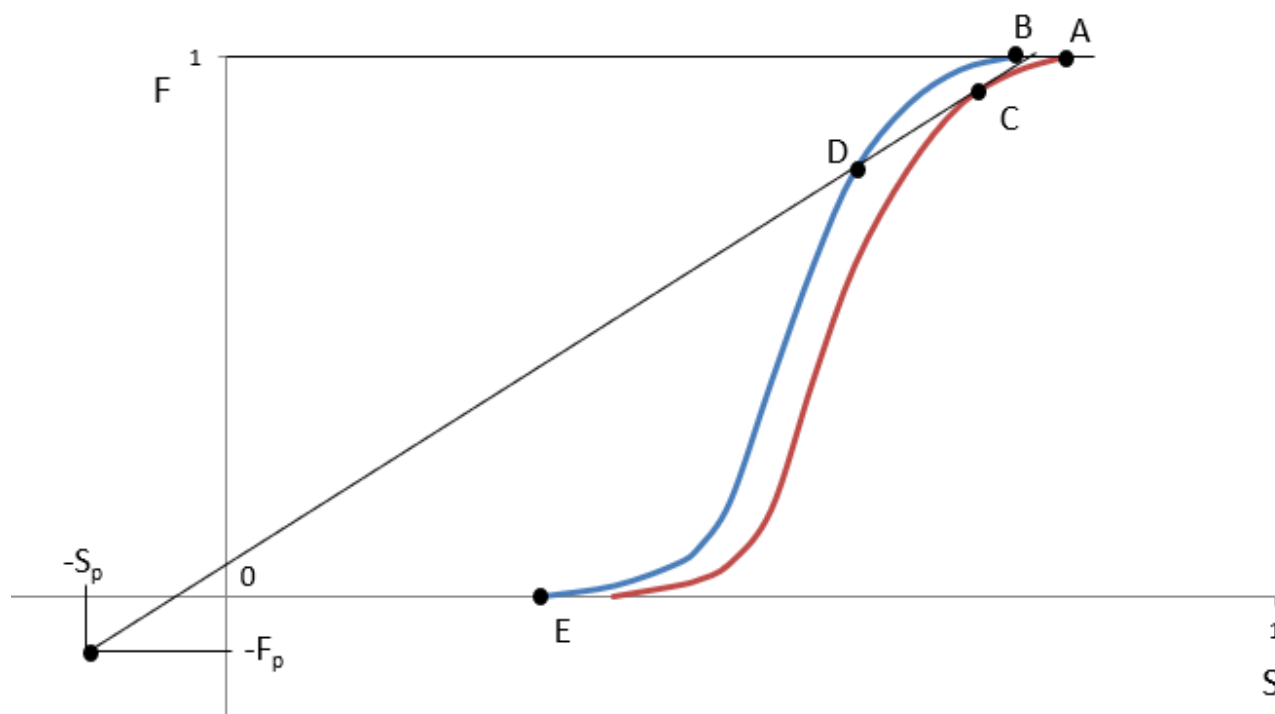


Рис. 9.4. Графическая интерпретация процесса вытеснения нефти раствором активной примеси, случай, когда касательная пересекает кривую  $F$  при нулевой концентрации только 1 раз.

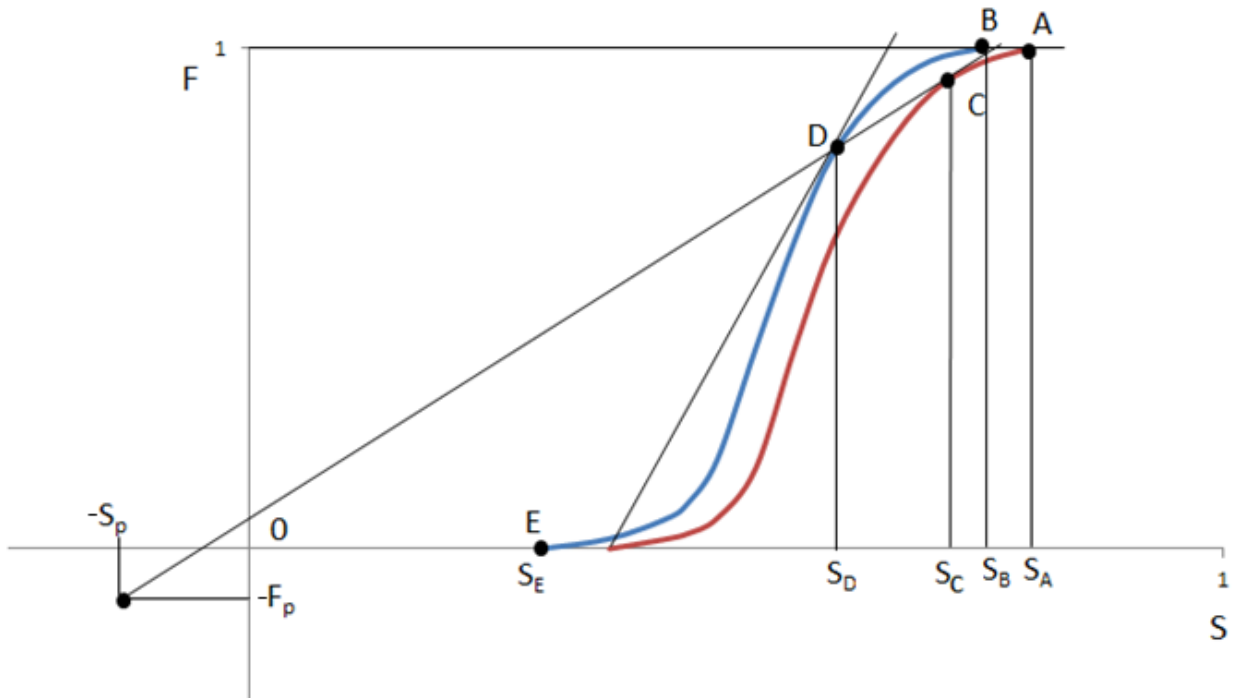


Рис. 9.5. Проведение касательных для графика процесса вытеснения нефти раствором активной примеси, случай, когда касательная пересекает кривую  $F$  при нулевой концентрации только 1 раз.

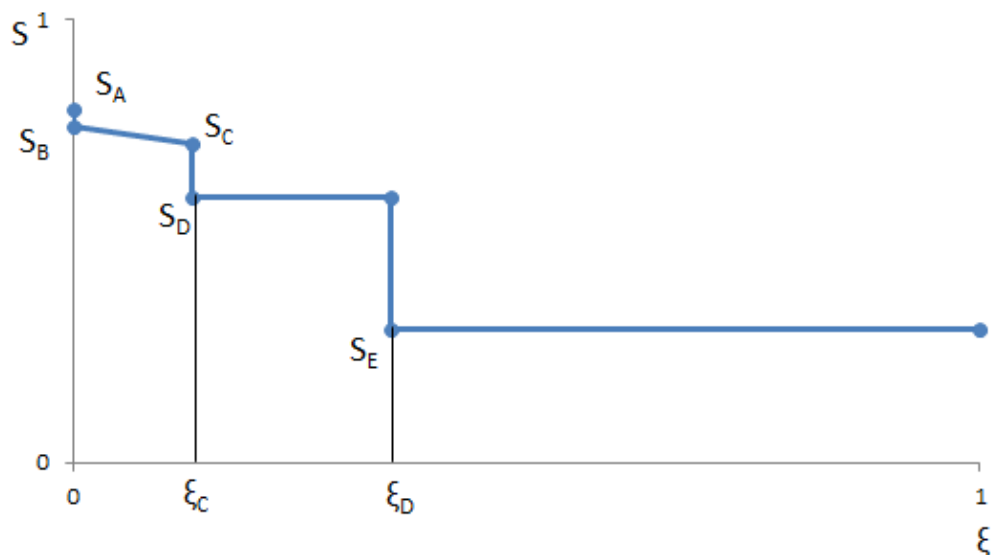


Рис. 9.6. График водонасыщенности в зависимости от автомодельной переменной при вытеснении нефти раствором активной примеси,

случай, когда касательная пересекает кривую  $F$  при нулевой концентрации только 1 раз.

При этом угловой коэффициент прямой, соединяющей полюс с точкой  $(S_+, F(S_+, c_+))$  или  $(S_-, F(S_-, c_-))$ , является относительной скоростью движения скачка водонасыщенности.

## 9.6. Вытеснение оторочкой активной примеси

Важным процессом является вытеснение нефти оторочкой активной примеси.

**Оторочкой** называется некоторый конечный объём раствора активного реагента, закачиваемый на начальной стадии вытеснения, который затем проталкивается в процессе фильтрации водой.

Для оторочки несколько изменяются начальные и граничные условия [1]:

$$S(x, 0) = S_0, c(x, 0) = 0; \quad (9.36)$$

$$F(S, c)|_{x=0} = 0; c(0, t) = c_{гр}, 0 \leq t \leq T; c(0, t) = 0, t > T, \quad (9.37)$$

где  $T$  – время появления скачка концентрации, до которого решение задачи совпадает с автомодельным решением для вытеснения нефти активной примесью, а после которого начинается распространение возмущения из-за скачка концентрации.

Объёмная доля примеси в скелете породы вычисляется по формуле

$$a = m\Gamma c, \quad (9.38)$$

где  $\Gamma$  – коэффициент сорбции.

При этом примесь в нефти также распределена линейно

$$\varphi(c) = \varphi_0 c, \quad (9.39)$$

где  $\varphi_0$  – некоторая характерная постоянная.



По модели Баренблатта, Ентова, Рыжика [1] (9.30) мгновенная скорость скачка  $v$  вычисляется по формуле

$$v = \frac{u}{m} \frac{F(S_+, c_+) - F(S_-, c_-)}{S_+ - S_-} = \frac{u}{m} \frac{F(S_+, c_+) + \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0}}{S_+ + \frac{\varphi_0 + \Gamma}{1 - \varphi_0}}. \quad (9.40)$$

Конечное выражение получено с учётом аналогии с полюсом (9.34) с учётом (9.38) и (9.39).

Зная скорость движения скачка, можно понять, где в данный момент времени будет находиться скачок концентрации, до него решение должно совпадать с автомодельным (в том числе графическим) для вытеснения нефти раствором активной примеси, а решение после него вычисляется численно либо с помощью метода характеристик.

Более подробно теория вытеснения растворами активной примеси рассмотрена в книге Баренблатта, Ентова и Рыжика [1].

### **Вопросы для самопроверки:**

1. Какая примесь называется активной?
2. Чему равна плотность конвективного потока массы?
3. Когда коэффициент диффузии является тензором?
4. Что произойдёт с компонентами тензора коэффициента конвективной диффузии в главных осях при увеличении скорости фильтрации?
5. Как выглядит уравнение теплопереноса при наличии активной примеси?
6. Как определить удельную энтальпию жидкости?
7. Какой вид имеет уравнение баланса тепла в отсутствие фазовых переходов и тепловыделения?
8. Как выглядит уравнение баланса примеси в многофазном случае?

9. Каковы начальные и граничные условия при фронтальном вытеснении нефти раствором активной примеси?
10. Как ввести автомодельную переменную при фронтальном вытеснении нефти раствором активной примеси?
11. Как выглядят основные уравнения с использованием автомодельной переменной при фронтальном вытеснении нефти раствором активной примеси?
12. Какие условия должны выполняться на скачках насыщенности?
13. Как найти насыщенность в полюсе?
14. Как найти функцию распределения потоков в полюсе?
15. Каковы основные характерные точки при графической интерпретации процесса вытеснения нефти раствором активной примеси?
16. Как построить график водонасыщенности в зависимости от автомодельной переменной при графической интерпретации процесса вытеснения нефти раствором активной примеси?
17. Что такое оторочка активной примеси?
18. Как найти объёмную долю примеси в скелете породы?
19. Как рассчитать мгновенную скорость скачка?

### 9.7. Практические задачи

**Пример 9.1.** Найти тензор коэффициента конвективной диффузии в главных осях, если скорость фильтрации растворителя и примеси равна  $2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , а характерные коэффициенты  $l_{\parallel} = 10 \text{ см}$ ,  $l_{\perp} = 5 \text{ см}$ .

**Решение.** Несложно найти тензор коэффициента конвективной диффузии из (9.4)

$$D' = \begin{pmatrix} l_{\parallel w} & 0 & 0 \\ 0 & l_{\perp w} & 0 \\ 0 & 0 & l_{\perp w} \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0,1 \text{ м} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}}{\text{с}} & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 \text{ м} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}}{\text{с}} & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 \text{ м} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{М}}{\text{с}} \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}.$$

Ответ:  $D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}.$

**Пример 9.2.** Найти изменение удельной энтальпии воды с постоянной удельной теплоёмкостью  $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  при её нагреве от  $0^\circ\text{C}$  до  $25^\circ\text{C}$ .

**Решение.** Из (9.12) удельная энтальпия

$$H = \int C_p dT + const.$$

Тогда после интегрирования изменение удельной энтальпии

$$\Delta H = H_2 - H_1 = C_p(T_2 - T_1),$$

поскольку разность одинаковых констант равна 0. Переводя температуру в кельвины, получим

$$\Delta H = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot (298 \text{ К} - 273 \text{ К}) = 105000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 105 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

Ответ:  $\Delta H = 105 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$

**Пример 9.3.** Найти скорость генерации примеси в стационарном случае, если

$$\vec{u}_1 = u_0 \left( \frac{2x}{L} \vec{i} + \frac{3y^2x}{L^3} \vec{j} + 6 \ln \frac{z}{L} \vec{k} \right),$$

$$\vec{u}_2 = u_0 \left( \frac{5x}{L} \vec{i} + \frac{2y}{L} \vec{j} + \frac{3z}{L} \vec{k} \right),$$

$$\vec{q} = q_0 \left( \frac{3x}{L} \vec{i} + \frac{4xyz}{L^3} \vec{j} + \frac{z}{L} \vec{k} \right),$$

где характерные скорость  $u_0$ , диффузионный поток  $q_0$  и линейный размер  $L$  являются постоянными величинами. Концентрации примеси в обеих фазах  $c_1$  и  $c_2$  известны.

**Решение.** Искомая скорость генерации примеси может быть найдена из (9.17). В стационарном случае производная по времени равна нулю. Тогда

$$r = \text{div}(c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \vec{q}).$$

Поскольку дивергенция суммы равна сумме дивергенций, найдём отдельно каждое слагаемое в этом выражении по правилу вычисления дивергенции, а затем их просуммируем. Напомним, что дивергенция векторной функции  $\vec{f}$  вычисляется так:

$$\text{div} \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

где

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}.$$

Тогда:

$$\text{div}(c_1 \vec{u}_1) = c_1 u_0 \left( \frac{2}{L} + \frac{6yx}{L^3} + \frac{6}{z} \right),$$

$$\text{div}(c_2 \vec{u}_2) = c_2 u_0 \left( \frac{5}{L} + \frac{2}{L} + \frac{3}{L} \right) = \frac{10c_2 u_0}{L},$$

$$\text{div} \vec{q} = q_0 \left( \frac{3}{L} + \frac{4xz}{L^3} + \frac{1}{L} \right) = q_0 \left( \frac{4}{L} + \frac{4xz}{L^3} \right),$$

$$r = \text{div}(c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \vec{q}) = \text{div}(c_1 \vec{u}_1) + \text{div}(c_2 \vec{u}_2) + \text{div} \vec{q}.$$

Итак, после вынесения общих множителей за скобку, имеем:

$$r = \frac{u_0}{L} \left( 2c_1 + 10c_2 + \frac{6yx}{L^2} \right) + \frac{6c_1 u_0}{z} + \frac{4q_0}{L} \left( 1 + \frac{xz}{L^2} \right).$$

Ответ:  $r = \frac{u_0}{L} \left( 2c_1 + 10c_2 + \frac{6yx}{L^2} \right) + \frac{6c_1 u_0}{z} + \frac{4q_0}{L} \left( 1 + \frac{xz}{L^2} \right).$

**Пример 9.4.** Если водонасыщенность в полюсе равна 0,2, а функция распределения потоков в полюсе 0,1, водонасыщенность до скачка 0,4 при функции распределения потоков 0,2, то чему равна относительная скорость движения скачка насыщенности?

**Решение.** Угловым коэффициентом  $K$  прямой  $y = KS + y_0$  ( $y_0$  – значение функции при нулевой насыщенности), соединяющей полюс с точкой  $(S_+, F(S_+, c_+))$  или  $(S_-, F(S_-, c_-))$ , является относительной скоростью движения скачка водонасыщенности. Подставляя значения из условия задачи, можем получить систему уравнений

$$0,2 = K \cdot 0,4 + y_0,$$

$$0,1 = K \cdot 0,2 + y_0,$$

тогда, вычитая из первого уравнения второе, получим  $0,1 = K \cdot 0,2$ , откуда

$$K = 0,5.$$

Ответ:  $K = 0,5$ .

**Задачи:**

9.1. Найти тензор коэффициента конвективной диффузии в главных осях, если скорость фильтрации растворителя и примеси  $3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , а характерные коэффициенты  $l_{||} = 20 \text{ см}$ ,  $l_{\perp} = 3 \text{ см}$ .

Ответ:  $D' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

9.2. В пласте идёт фильтрация жидкости с примесью с концентрацией

$$c(x, y, z) = 0,2 \frac{x}{L} + 0,05 \frac{y^2}{L^2} + 0,14 \frac{z^2}{L^2},$$

где размер продуктивной части пласта  $L=30 \text{ м}$ , скорость фильтрации

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

характерные коэффициенты  $l_{\parallel} = 0,8 \text{ м}, l_{\perp} = 0,3 \text{ м}$ . Пренебрегая диффузией в газе, найти вектор плотности потока массы в точке пласта с координатой (1 м, 5 м, 5 м).

Ответ:  $\vec{q} \approx \begin{pmatrix} 1,197 \\ -0,037 \\ 1,090 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

- 9.3. В некотором пласте объёмом  $15000 \text{ м}^3$  объём пор составляет  $5000 \text{ м}^3$ , концентрация примеси составляет 0,1, а доля примеси в скелете породы 5%. Чему равна доля примеси в единице объёма пористой среды?

Ответ:  $m_{с+a} \approx 0,0833$ .

- 9.4. Для некоторой жидкости имеется зависимость удельной теплоёмкости от температуры

$$C_p(T) = C_0 \left( 1 + \frac{T}{2,5T_0} \right), C_0, T_0 - const,$$

$$C_0 = 2200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; T_0 = 300 \text{ К}.$$

Найти изменение удельной энтальпии этой жидкости при её нагреве от 280 К до 290 К.

Ответ:  $\Delta H = 30360 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ .

- 9.5. Найти решение уравнения конвективной теплопроводности в стационарном одномерном (вдоль оси  $x$  – расстояния от контура питания) случае, считая переменной только температуру. Известно, что  $T(x = 0) = T_{\text{пл}}$ ,  $T(x = L) = T_0$ , где  $T_{\text{пл}}$  и  $T_0$  – пластовая температура (на контуре питания) и температура закачиваемой жидкости соответственно,  $L$  – длина продуктивной части пласта. Все параметры, кроме температуры, считать известными.

Ответ:

$$T(x) = T_{\text{пл}} + \frac{T_0 - T_{\text{пл}}}{e^{\beta L} - 1} (e^{\beta x} - 1), \beta = \frac{\rho c_p u}{\lambda}.$$

9.6. В процессе стационарной одномерной конвективной теплопроводности известны следующие параметры: пластовая температура  $30^{\circ}\text{C}$ , температура закачиваемой воды  $90^{\circ}\text{C}$ , длина продуктивной части пласта 30 м, плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплоёмкость  $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}$ , коэффициент теплопроводности  $0,675 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{K}}$ , скорость частиц жидкости  $2,68 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Чему равна температура на расстоянии 10 м от контура питания?

Ответ:  $T \approx 305 \text{ K}$ .

9.7. В пласте при стационарной одномерной фильтрации отсутствует генерация примеси, концентрация которой в воде 30%, в нефти 20%, причём скорость фильтрации воды 0,2 мм/с, плотность диффузионного потока 0,2 мм/с. Постоянное значение полного потока принять равным 0,3 мм/с. Чему равна скорость фильтрации нефти?

Ответ:  $u_2 = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

9.8. Найти скорость генерации примеси в стационарном случае в точке (2 м, 5 м, 2 м), если

$$\vec{u}_1 = u_0 \left( \frac{5x^2}{L^2} \vec{i} + 2e^{\frac{y}{L}} \vec{j} + \frac{zx^2}{L^3} \vec{k} \right),$$

$$\vec{u}_2 = u_0 \left( \frac{xyz}{L^3} \vec{i} + \frac{y}{L} \vec{j} + \frac{z^2x}{L^3} \vec{k} \right),$$

$$\vec{q} = q_0 \left( 3 \sin \frac{x}{L} \cos \frac{y}{L} \vec{i} + 25 \vec{k} \right),$$

где характерные скорость  $u_0$ , диффузионный поток  $q_0$  и размер пропластка  $L$  являются постоянными величинами, равными соответственно  $10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $2,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}$  и 25 м. Концентрации примеси в обеих фазах  $c_1$  и  $c_2$  известны и равны 25% и 20% соответственно.

Ответ:  $r \approx 7,00 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}}$ .

9.9. Пусть функция распределения потоков

$$F = \frac{k_1}{k_1 + c\mu^*k_2}$$

Используя типовые квадратичные корреляции ОФП, найти уравнение характеристики для координаты воды в пласте, считая водонасыщенность, относительную вязкость, скорость фильтрации, пористость пласта и концентрацию примеси в воде известными.

Ответ:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2 \frac{u}{m} \frac{Sc\mu^*(1-S)}{(S^2 + c\mu^*(1-S)^2)^2}$$

9.10. Если водонасыщенность в полюсе равна 0,12, а функция распределения потоков в полюсе 0,07, водонасыщенность до скачка 35% при функции распределения потоков 0,21, то чему равна относительная скорость движения скачка насыщенности?

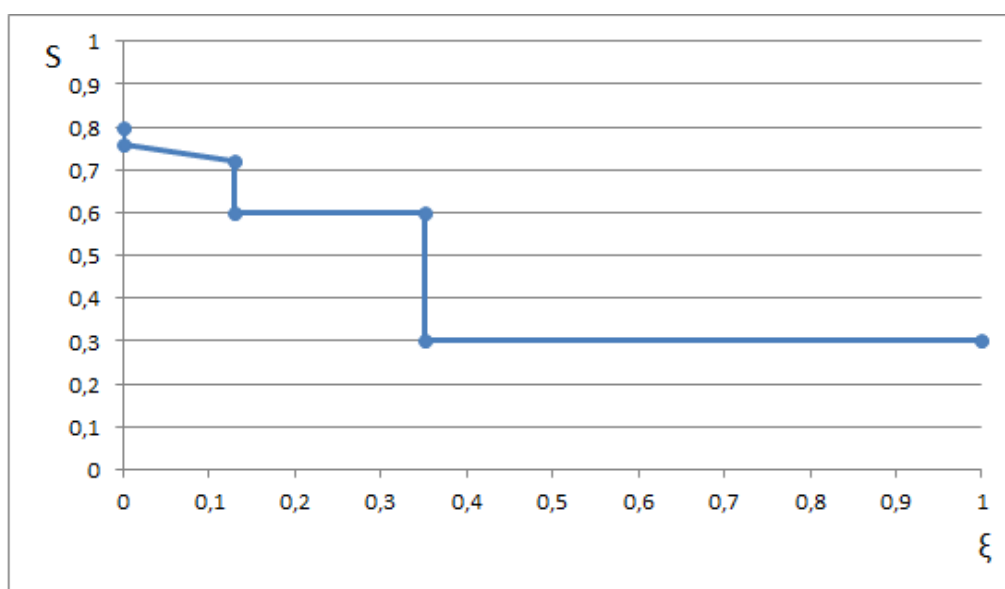
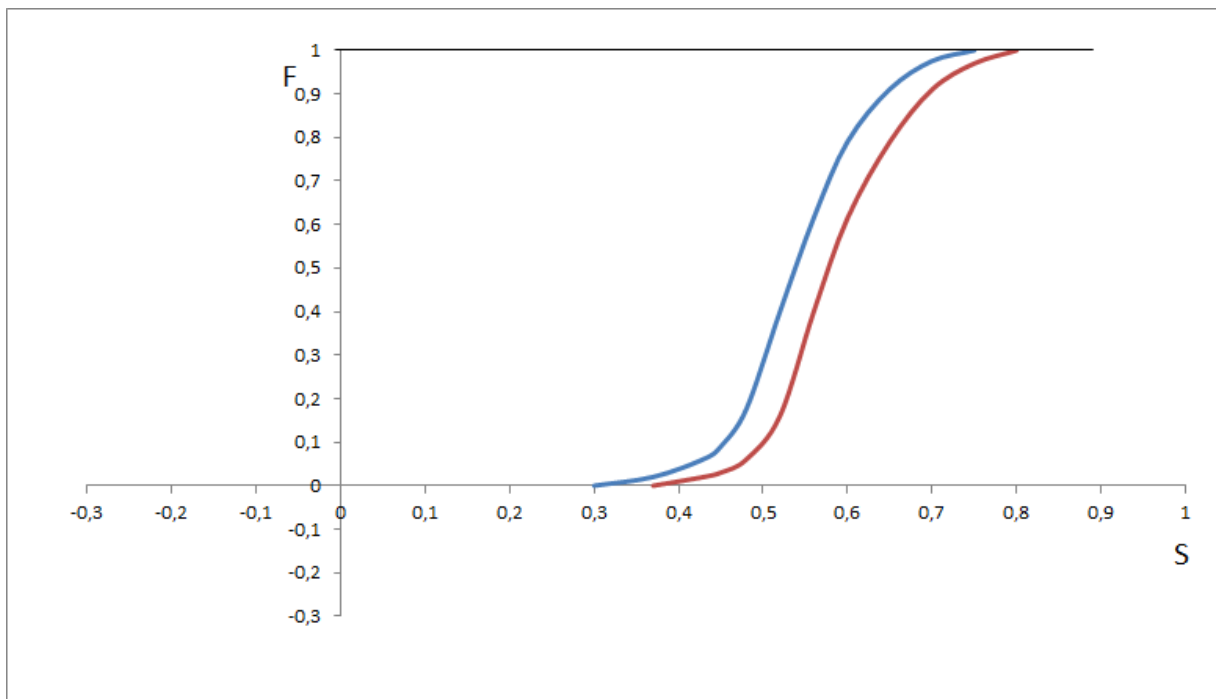
Ответ:  $K \approx 0,609$ .

9.11. Если функция распределения потоков в полюсе 0,08, водонасыщенность до скачка 35% при функции распределения потоков 0,2, относительная скорость движения скачка насыщенности 0,8, то чему равна водонасыщенность в полюсе?

Ответ:  $S_p = 0,2$ .

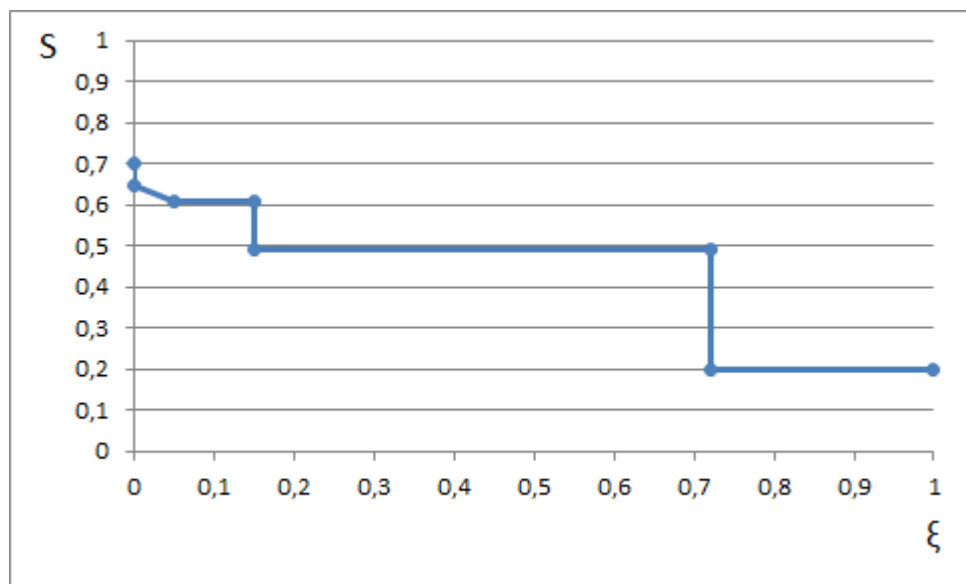
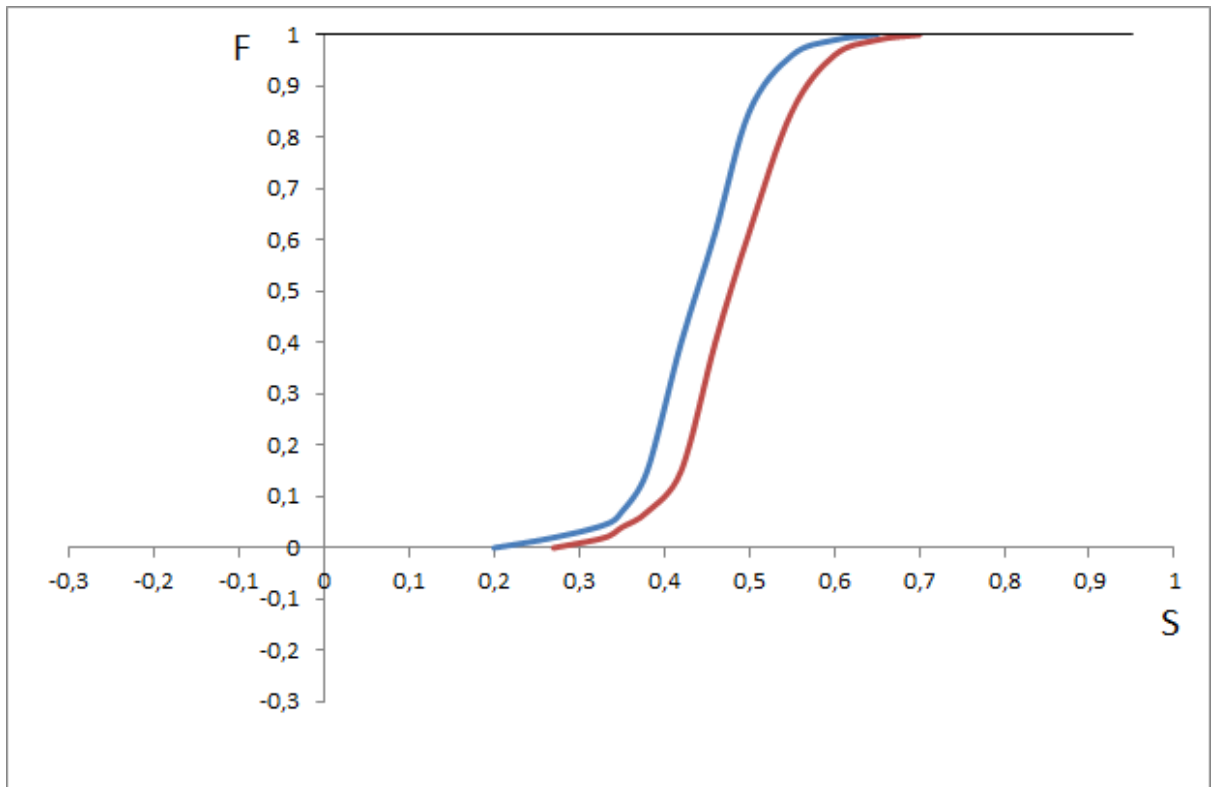
9.12. В пласте происходит вытеснение нефти раствором активной примеси. Функции распределения потоков при нулевой концентрации примеси в воде (синяя линия на графике) и при граничной концентрации (красная линия на графике) известны. Водонасыщенность в полюсе 0,14, функция распределения потоков в полюсе 0,1. Построить график зависимости водонасыщенности от автомодельной переменной при  $T=0,1$ .





Ответ:

- 9.13. В пласте происходит вытеснение нефти раствором активной примеси. Функции распределения потоков при нулевой концентрации примеси в воде (синяя линия на графике) и при граничной концентрации (красная линия на графике) известны. Пористость пласта 30%, изменение концентрации примеси в скелете породы 0,0072, изменение концентрации примеси в воде составляет 0,47, а в нефти 0,05. Построить график зависимости водонасыщенности от автомодельной переменной при  $T=0,12$ .



Ответ:

# ГЛАВА 10. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДА

## 10.1. Общие положения теории функций комплексного переменного (ТФКП). Уравнения Коши-Римана

В ряде задач для удобства расчётов можно применять положения теории функций комплексного переменного (ТФКП), однако с той поправкой, что переменные координаты следует считать безразмерными (а в случае размерных переменных – обезразмерить их). Следует напомнить основные положения этой теории.

**Комплексной** называется переменная  $z=x+iy$ , состоящая из действительной  $x$  и мнимой частей  $y$ ,  $i$  – мнимая единица.

Функция  $F(z)$  является **функцией комплексной переменной (комплексного переменного)**, если указан закон, позволяющий по известному  $z$  найти значение этой функции  $F$ . При этом  $F$  можно представить в виде:

$$F(z) = F(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (10.1)$$

где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  – некоторые функции действительных переменных  $x$  и  $y$ .

Функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (10.3)$$

если выполнены условия (уравнения) Коши-Римана (Даламбера-Эйлера)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10.4)$$

## 10.2. Характеристическая функция, эквипотенциальные линии и функция тока

Каждые две кривые, из которых одна принадлежит семейству  $\varphi(x, y) = C$ , а другая – семейству  $\psi(x, y) = C^*$ , где  $C$  и  $C^*$  – постоянные, пересекаются под прямым углом. Семейство кривых  $\varphi(x, y) = C$  – семейство **эквипотенциальных линий (потенциальных функций)**, которые для несжимаемой жидкости являются **изобарами**. Поскольку касательные к кривым семейства  $\psi(x, y) = C^*$  в любой точке ортогональны эквипотенциальным линиям, то при установившемся движении они будут совпадать с направлением векторов скорости фильтрации в любой точке, а значит,  $\psi(x, y)$  – **функции тока**. Тогда  $F(z)$  называется **характеристической функцией течения (комплексным потенциалом)**. Важно отметить, что функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  определяются с точностью до некоторых постоянных, но, поскольку в дальнейших расчётах используются их производные, то эти постоянные можно положить равными 0.

При рассмотрении двух произвольных поперечных сечений каналов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  видно (рис. 10.1), что количество массы жидкости, протекающей через эти сечения в единицу времени (массовый расход), будет одно и то же [5].

Функцией тока можно назвать функцию, принимающую на линии тока значение  $\psi(x, y) = C^*$ , равное массе жидкости (газа), протекающей в единицу времени через поперечное сечение канала, построенного на линиях  $\psi(x, y) = 0$  и  $\psi(x, y) = C_1^*$  где  $C_1^*$  – некоторая постоянная.

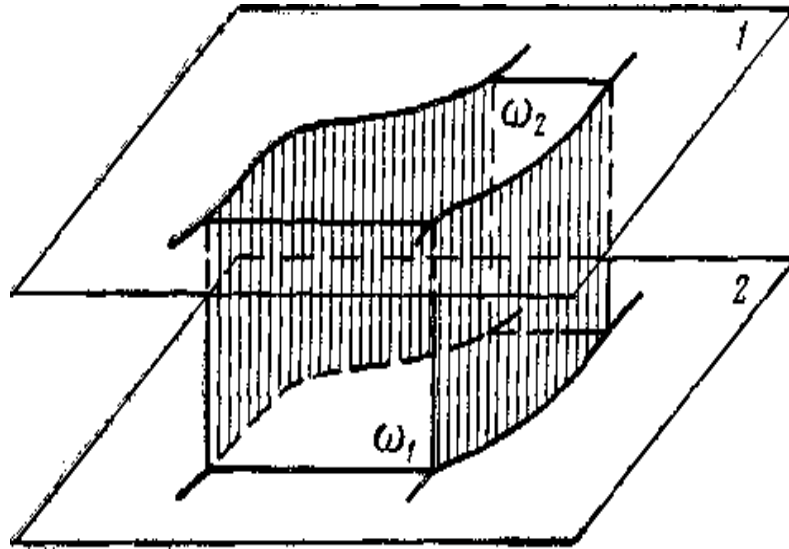


Рис. 10.1. Распределение потока между двумя параллельными плоскостями 1 и 2 [5].

### 10.3. Порядок исследования плоского течения с помощью ТФКП

Для исследования плоских течений (например, плоскопараллельных и плоскорадиальных) необходимо действовать следующим образом:

1. Сначала с использованием каких-либо соображений, аналогий или просто метода подбора необходимо определить характеристическую функцию рассматриваемого течения, если она не дана.
2. Поскольку в характеристической функции действительная часть может быть не отделена от мнимой, необходимо провести это разделение. Тогда из (10.1) действительная часть полученного комплексного потенциала будет равна потенциальной функции  $\varphi(x, y)$ , а мнимая – функции тока  $\psi(x, y)$ .
3. Меняя значения потенциальной функции, можем построить её семейство (например, с использованием программного

обеспечения на компьютере), по которому можно найти распределение давлений в пласте.

4. Прodelывая аналогичную процедуру для  $\psi(x, y)$ , можем построить семейство функций тока, по которому можно охарактеризовать движение, увидеть его направление и построить поле скоростей фильтрации.
5. Проекции вектора массовой скорости можно найти из физического смысла потенциальной функции или функции тока так:

$$\rho u_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \rho u_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (10.5)$$

где  $\rho$  – плотность фильтрующейся жидкости,  $u$  – её скорость фильтрации.

По этим проекциям можно найти итоговую массовую скорость фильтрации, как будет показано ниже.

#### 10.4. Определение массовой скорости

Как уже отмечалось выше, необходимо найти массовую скорость фильтрации. Сделать это можно из физического смысла комплексного потенциала [5], поскольку массовая скорость равна модулю его производной по комплексному аргументу. Докажем это. Из (10.1) с учётом определения полного дифференциала функции двух переменных

$$dF(z) = d\varphi + id\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + i \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + i \frac{\partial \psi}{\partial y} dy, \quad (10.6)$$

$$dF(z) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy. \quad (10.7)$$

При вынесении мнимой единицы за скобку у множителя перед  $dy$  будем иметь:

$$dF(z) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + i \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy, \quad (10.8)$$

тогда, при использовании условий Коши-Римана (10.4),

$$dF(z) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx + i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy, \quad (10.9)$$

$$dF(z) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (dx + i dy) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz. \quad (10.10)$$

Значит,

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (10.11)$$

а, с учётом (10.5),

$$\frac{dF}{dz} = -(\rho u_x - i \rho u_y). \quad (10.12)$$

Из (10.11) и определения модуля комплексного числа

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2}, \quad (10.13)$$

а, учитывая (10.5), в итоге имеем:

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| = \sqrt{(-\rho u_x)^2 + (\rho u_y)^2} = |\rho \vec{u}| = \rho u. \quad (10.14)$$

Таким образом, массовая скорость фильтрации равна производной комплексного потенциала по его аргументу.

## 10.5. Характеристическая функция течения при совместном действии источника и стока

Характеристическая функция при плоскорадиальной фильтрации

$$F(z) = \frac{G}{2\pi h} \ln z, \quad (10.15)$$

где  $G$  – массовый дебит жидкости. Вывод (10.15) предоставлен читателю в задаче 10.5 ниже. При наличии источника на расстоянии  $a_1$  от начала координат и стока на расстоянии  $a_2$  от начала координат, функция (10.15) примет вид

$$F(z) = \frac{G}{2\pi h} \ln(z - a_1) - \frac{G}{2\pi h} \ln(z - a_2) = \frac{G}{2\pi h} \ln \frac{z - a_1}{z - a_2}. \quad (10.16)$$

При использовании показательной формы записи комплексного числа можно получить

$$F(z) = \frac{G}{2\pi h} \ln \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}, \quad (10.17)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния некоторой точки  $M$  до источника и стока соответственно,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – соответствующие полярные углы. Отделяя действительную часть от мнимой с учётом свойств логарифма, получим

$$F(z) = \varphi + i\psi = \frac{G}{2\pi h} \ln \frac{r_1}{r_2} + i \frac{G}{2\pi h} (\theta_1 - \theta_2), \quad (10.18)$$

откуда

$$\varphi = \frac{G}{2\pi h} \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad (10.19)$$

$$\psi = \frac{G}{2\pi h} (\theta_1 - \theta_2), \quad (10.20)$$

тогда уравнение семейства изобар

$$\frac{r_1}{r_2} = C, \quad (10.21)$$

а уравнение семейства линий тока

$$\theta_1 - \theta_2 = C^*. \quad (10.22)$$

Можно доказать (как это сделано в книге Квеско) [5], что в рассматриваемом случае линии тока являются окружностями, проходящими через центр обеих скважин, а изобары также являются окружностями.

## 10.6. Время движения частицы несжимаемой жидкости

### вдоль линии тока

Для несжимаемой жидкости функция тока определяется не массовым расходом, а объёмным, поскольку плотность считается постоянной величиной. Тогда вместо (10.5) записываются условия



$$u_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, u_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (10.23)$$

Тогда производная комплексного потенциала по его аргументу также будет записываться без значений плотности:

$$\frac{dF}{dz} = -(u_x - iu_y). \quad (10.24)$$

По определению скорость фильтрации равна произведению пористости  $m$  на истинную (среднюю) скорость  $v$

$$u_x = mv_x, u_y = mv_y. \quad (10.25)$$

С учётом определения средней скорости из механики (10.25) примет вид

$$u_x = m \frac{dx}{dt}, u_y = m \frac{dy}{dt}. \quad (10.26)$$

Сопоставляя (10.23) и (10.26), получим после интегрирования от начальных координат  $x_0, y_0$  до текущих  $x, y$ , что время движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока  $t$  определяется по любой из двух формул:

$$t = -m \int_{x_0}^x \frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} dx, t = m \int_{y_0}^y \frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} dy. \quad (10.27)$$

Можно получить ещё одну формулу для определения времени движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока. Покажем это. Подставляя (10.26) в (10.24), имеем

$$\frac{dF}{dz} = -m \frac{dx - idy}{dt} = -m \frac{d(x - iy)}{dt} = -m \frac{dz^*}{dt}, \quad (10.28)$$

где  $z^*=x-iy$  – комплексно-сопряжённая переменная по отношению к  $z$ . При разделении переменных и интегрировании вдоль линии тока по контуру  $L$  можно получить

$$t = -m \int_L \frac{1}{\frac{dF}{dz}} dz^*. \quad (10.29)$$

Значит, если известен комплексный потенциал, можно определить время движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока.

### Вопросы для самопроверки:

1. Что такое функция комплексного переменного?
2. Каков физический смысл функции тока?
3. Что такое комплексный потенциал?
4. Каков порядок исследования плоского течения с помощью ТФКП?
5. Как определить массовую скорость, зная комплексный потенциал?
6. Как записать характеристическую функцию течения при совместном действии источника и стока?
7. Чем являются линии тока при совместном действии источника и стока?
8. Чем определяется функция тока для несжимаемой жидкости?
9. Как определить время движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока?

## 10.7. Практические задачи

**Пример 10.1.** Удовлетворяет ли функция

$$F = F_0 \left( yx + i \frac{y^2 - x^2}{2} \right)$$

уравнениям Коши-Римана (координаты являются безразмерными)?

**Решение.** Действительные и мнимые части функции из (10.1) будут равны соответственно

$$\begin{aligned} \varphi &= F_0 yx, \\ \psi &= F_0 \frac{y^2 - x^2}{2}. \end{aligned}$$

Проверим выполнение (10.4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_0 y = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_0 x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Значит, условия (10.4) выполнены. Функция  $F$  удовлетворяет уравнениям Коши-Римана.

Ответ: Удовлетворяет.

**Пример 10.2.** Задан комплексный потенциал в виде

$$F = F_0 \left( \frac{x}{L}(1 - i) + \frac{y}{L}(1 + i) + i(25 + 3e^3) \right).$$

Найти проекцию массовой скорости фильтрации на ось  $x$ .

**Решение.** Сначала необходимо отделить действительную часть от мнимой, чтобы найти потенциальную функцию или функцию тока.

$$F = F_0 \left( \frac{x}{L} + \frac{y}{L} + i \left( 25 + 3e^3 + \frac{y}{L} - \frac{x}{L} \right) \right)$$

Тогда с учётом (10.1) потенциальная функция будет равна

$$\varphi = F_0 \left( \frac{x}{L} + \frac{y}{L} \right)$$

Проекцию массовой скорости фильтрации на ось  $x$  можно определить из (10.5)

$$\rho u_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{F_0}{L}$$

Функцию тока в данной задаче можно не находить (либо наоборот находить только её вместо потенциальной функции, а затем использовать другое равенство в (10.5)).

Ответ:  $\rho u_x = -\frac{F_0}{L}$ .

**Пример 10.3.** Найти время движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока, если начальная координата  $x_0$ , текущая  $x$ , функция тока для неё имеет вид  $\psi = yx + x^2$ . Считать все величины безразмерными. Пористость пласта известна.

**Решение.** Для нахождения времени движения частицы воспользуемся выражением (10.27) в таком виде в силу данных задачи:

$$t = -m \int_{x_0}^x \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} dx.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x,$$

то

$$t = -m \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = -m \ln x \Big|_{x_0}^x = m \ln \frac{x_0}{x}.$$

Ответ:  $t = m \ln \frac{x_0}{x}$ .

**Задачи:**

10.1. Удовлетворяет ли функция

$$F = F_0(z^2 + iz), z = x + iy$$

уравнениям Коши-Римана (координаты являются безразмерными)?

Ответ: Удовлетворяет.

10.2. Найти потенциальную функцию и функцию тока, если комплексный потенциал

$$F = F_0(3z - iz^2), z = x + iy$$

(координаты являются безразмерными).

Ответ:  $\varphi = F_0(3x + 2xy), \psi = F_0(3y - x^2 + y^2)$ .

10.3. Задан комплексный потенциал в виде

$$F = F_0 \left( -3ii + \frac{y - ix}{L} \right).$$

Найти проекцию массовой скорости фильтрации на ось  $y$ .

Ответ:  $\rho u_y = -\frac{F_0}{L}$ .

10.4. Для плоскопараллельного потока комплексный потенциал имеет вид  $F(z) = Az$ ,  $z = x + iy$ , где  $A$  – любое комплексное или

действительное число, выражающееся через некоторые числа  $A_1$  и  $A_2$  так:  $A = A_1 + iA_2$ . Найти модуль массовой скорости фильтрации. Координаты считаются безразмерными.

Ответ:  $\rho u = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ .

- 10.5. Для плоскорадиального потока комплексный потенциал имеет вид  $F(z) = A \ln z$ ,  $z = x + iy$ , где  $A$  – любое действительное число. Координаты считаются безразмерными. Найти модуль массовой скорости фильтрации. Поскольку по определению:

$$\rho u = \frac{G}{2\pi r h},$$

то, используя полученную скорость фильтрации и её определение, найти итоговый вид функции  $F(z)$ , заменив  $A$  через известные физические величины (мощность пласта, массовый расход). Радиальную координату  $r$  и полярный угол  $\theta$  считать известными.

Указание: воспользоваться показательной формой записи комплексного числа.

Ответ:  $\rho u = \frac{A}{r}$ ;  $F(z) = \frac{G}{2\pi h} \ln z$ .

- 10.6. Найти время движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока, если начальная координата  $y_0$ , текущая  $y$ , функция тока для неё имеет вид  $\psi = \ln y + x(y^2 + 2y + 1)$ . Считать все величины безразмерными. Пористость пласта известна.

Ответ:  $t = \frac{m}{y_0+1} - \frac{m}{y+1}$ .

- 10.7. Исследуется процесс стягивания контура нефтеносности к эксплуатационной кольцевой батарее. Характеристическая функция имеет вид (координаты считаются безразмерными):

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi b} \ln(z^n - a^n), z = x + iy$$

где  $b$  – характерный линейный размер,  $n$  – число скважин в батарее,  $a$  – число, определяющее положение стока (все величины

известны). Радиальную координату  $r$  и полярный угол  $\theta$  считать известными. Найти время движения частицы вдоль линии тока  $t$  и по главной линии  $t_0$  при движении из  $r_1$  в  $r_2$ . Главная линия соответствует  $\theta = 0$ . Пористость пласта известна.

Указание: воспользоваться показательной формой записи комплексного числа.

Ответ:

$$t = -\frac{2\pi b m}{Q n} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^n - a^n e^{-i\theta n}}{r^{n-1}} dr,$$

$$t_0 = -\frac{2\pi b m}{Q n} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^n - a^n}{r^{n-1}} dr.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
2. Басниев К. С. Подземная гидромеханика: учебник для вузов / К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
3. Брусиловский А. И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа / А. И. Брусиловский. – М.: «Грааль», 2002. – 575 с.
4. Гиматудинов Ш. К. Физика нефтяного и газового пласта: Учебник / Ш. К. Гиматудинов, А. И. Ширковский. – 3-е изд. – М.: Недра, 1982. – 311 с.
5. Квеско Б. Б. Подземная гидромеханика: Учебное пособие / Б. Б. Квеско. – Томск: Издательство ТПУ, 2010. – 181 с.
6. Коротенко В. А. Физические основы разработки нефтяных месторождений и методов повышения нефтеотдачи / В. А. Коротенко, А. Б. Кряквин, С. И. Грачев, Ам. Ат. Хайруллин, Аз. Ам. Хайруллин. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2014. – 52 с.
7. Михайлов Н. Н. Остаточное нефтенасыщение разрабатываемых пластов / Н. Н. Михайлов. – М.: «Недра», 1992. – 270 с.
8. Рид Р. Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. Пер. с англ. под ред. Б. И. Соколова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Химия, 1982. – 596 с.
9. Савельев И. В. Курс общей физики, том I. Механика, молекулярная физика и термодинамика / И. В. Савельев. – М.: КноРус, 2012. – 521 с.

10. Сургучев М. Л. Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи пластов / М. Л. Сургучев. – М.: «Недра», 1985. – 264 с.
11. Ширковский А. И. Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений / А. И. Ширковский. – М.: Недра, 1987. – 309 с.