

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Романчук Иван Сергеевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 30.03.2022 10:26:21

Уникальный программный ключ:

6319edc2b582ffdacea443f01d5779368d0957ac34f5cd074d8118 высшего образования

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора

Института математики и

компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

АЛГЕБРА

Рабочая программа дисциплины

для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения очная

Баранникова Д.Д. Алгебра. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль: «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины (модуля) опубликована на сайте ТюмГУ: <https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

1. Пояснительная записка

Дисциплина «Алгебра» является базовой дисциплиной математического и естественнонаучного цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО). Для изучения дисциплины необходимы знания курсов школьной геометрии и начал математического анализа, а также необходимо владение простейшими математическими понятиями и методами, способность к восприятию информации, ее анализу, синтезу и обобщению.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с теорией матриц, систем линейных уравнений, комплексных чисел и многочленов, теорией определителей, векторным анализом, теорией линейных пространств и операторов, теорией квадратичных форм, основные алгебраические структуры.

Цель: обучение студентов основным разделам общей и линейной алгебры.

Задачи:

- познакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры: теорией матриц, линейных уравнений, линейных пространств и линейных операторов.
- дать введение в общую алгебру: группы, кольца и поля.
- дать понятие о теории вещественных и комплексных чисел, а также теории многочленов.
- сформировать теоретические знания и практические навыки решения задач, необходимые в дальнейшей учебной и последующей профессиональной деятельности

Логическим продолжением данного курса является элективный курс «Элементы абстрактной и компьютерной алгебры».

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в блок Б1 Дисциплины (модули), обязательная часть и изучается в первом семестре.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Знает: основные понятия алгебры, методы доказательств утверждений в данной области, владеет навыками решения основных задач. Умеет: решать задачи теоретического и прикладного характера, доказывать утверждения.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы	Всего часов (академические часы)	Часов в семестре (академические часы)
		1 семестр
Общий объем зач. ед. час	8	8
	288	288
Из них:		
Часы контактной работы (всего):	126	126
Лекции	60	60
Практические занятия	64	64
Лабораторные / практические занятия по подгруппам	0	0
Консультации и иная контактная работа	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	162	162
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф. зачет, экзамен)		экзамен

3. Система оценивания

3.1. Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках модульно-рейтинговой (100-балльной) и традиционной (4-балльной) систем оценок.

Экзаменационная оценка студента в рамках модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время лабораторных работ, индивидуальных домашних заданий, контрольной работы. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины:

61 - 76 баллов - удовлетворительно;

77 - 90 баллов - хорошо;

91 -100 баллов - отлично.

Студент, у которого сумма набранных баллов, оказалась меньше 61, должен сдать экзамен.

Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студента на теоретические вопросы, а также выполнения заданий, примерный уровень которых соответствует уровню заданий, выполняемых в семестре при проведении контрольных работ. Эта оценка характеризует уровень знаний, умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.

Примечание. Студент, желающий исправить экзаменационную оценку, полученную в рамках модульно-рейтинговой системы, имеет право на сдачу экзамена.

Каждая лекция оценивается в 1 балл (конспектирование материала, работа на лекции, за посещение баллы не ставятся). На каждом практическом/семинарском занятии выполняется предложенная работа по теме лекции, которая оценивается в зависимости от сложности задания.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины (модуля), час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (в час)			Иные виды контактной работы
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
1 семестр						
1.	Основные алгебраические структуры	20	2	2	0	0
2.	Алгебра матриц	20	2	2	0	0
3.	Определитель матрицы	20	4	4	0	0
4.	Обратная матрица	20	2	2	0	0
5.	Ранг матрицы	20	4	4	0	0
6.	Решение систем линейных уравнений общего вида	20	4	4	0	0
7.	Поле комплексных чисел	20	4	4	0	0
8.	Кольцо многочленов	22	6	8	0	0
9.	Линейное пространство над произвольным полем	20	4	4	0	0
10.	Евклидовы и унитарные пространства	20	4	4	0	0
11.	Линейное аффинное многообразие	20	2	2	0	0
12.	Линейные операторы	24	16	16	0	0
13.	Квадратичные формы	20	4	4	0	0
14.	Элементы общей алгебры	20	2	4	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	288	60	64	0	2

4.2. Содержание дисциплины (модуля) по темам

1. Основные алгебраические структуры

Введение. Множества. Бинарные операции. Декартово произведение множеств. Группы, кольца и поля на подмножествах вещественных чисел. Метод математической индукции.

2. Алгебра матриц

Основные виды матриц. Действия над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число, транспонирование, произведение матриц. Элементарные преобразования матриц.

3. Определитель матрицы

Перестановки и подстановки. Понятие определителя и его свойства. Вычисление определителя по определению и, используя свойства определителя, приведением его матрицы к треугольной форме. Теорема Лапласа и два следствия. Теоремы о произведении определителей.

4. Обратная матрица

Вычисление обратной матрицы. Системы линейных уравнений с квадратной матрицей их решение методами обратной матрицы, Крамера.

5. Ранг матрицы

Линейные пространства V_1, V_2, V_3 . Аксиоматика линейных пространств над произвольным полем. Элементарные свойства линейных пространств (6 штук). Линейная зависимость и независимость систем векторов. Координаты вектора.

Решение систем линейных уравнений с квадратной матрицей методом Гаусса, обратной матрицы, Крамера. Ранг матрицы. Теоремы о базисах и ранге матриц. Изоморфизм пространств. Эквивалентные матрицы. Нахождение ранга матрицы. Минорный ранг матрицы. Базис и размерность пространства.

6. Решение систем линейных уравнений общего вида

Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем линейных уравнений. Нахождение фундаментальной системы решений СЛОУ. Подпространство пространства R^n , как решение однородной системы линейных уравнений.

7. Поле комплексных чисел

Введение множества комплексных чисел через пары чисел. Введение операций сложения и умножения над парами чисел. Доказательство того, что полученное множество с двумя операциями будет полем. Отождествление части комплексных чисел вида $z=(a,0)$ с вещественными числами $(a,0) \sim a$. Число $i=(0,1)$ и его свойства. Алгебраическое представление комплексного числа $z=(a,b)=a+bi$. Эквивалентность двух форм представления комплексных чисел. Операции нахождения разности и частного в поле комплексных чисел, как результаты решения некоторых простейших уравнений. Операция сопряжения комплексного числа и ее свойства. Геометрическое представление комплексного числа и операция сложения. Неравенства треугольника для комплексных чисел.

Алгебраическое представление комплексного числа $z=(a,b)=a+bi$. Операции с комплексными числами в алгебраической форме.

Тригонометрическая форма представления комплексного числа, их умножение и возведение в целые степени. Деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Корни из комплексного числа. Множество корней из единицы и их свойства.

8. Кольцо многочленов

Кольцо многочленов над полем комплексных чисел. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида и его следствия.

Наибольший общий делитель.

Корни многочлена. Теорема Безу. Формулы Виета.

Каноническое разложение многочлена.

Метод Горнера, нахождение целых и рациональных корней целочисленных многочленов.

Каноническое разложение многочлена над полями действительных и комплексных чисел.

Интерполяционная формула Лагранжа.

Основная теорема алгебры.

9. Линейное пространство над произвольным полем

Определение и основные свойства. Базис и размерность. Матрица перехода к новому базису. Изоморфизм линейных пространств.

Линейные подпространства. Сумма и пересечение линейных подпространств. Прямая сумма подпространств.

10. Евклидовы и унитарные пространства

Скалярное произведение, метрические понятия, ортогональность. Неравенства Коши-Буняковского, треугольника, Бесселя и равенство Парсеваля. Метод ортогонализации базиса Грама-Шмидта. Матрица Грама.

Примеры введения скалярного произведения в вещественных и комплексных пространствах. Примеры на применение неравенств Коши-Буняковского и треугольника в евклидовом и унитарном пространствах. Матрица Грама, линейная независимость векторов и базис в евклидовом и унитарном пространствах. Вычисление скалярного произведения и матрица Грама. Изоморфизм евклидовых или унитарных пространств.

Ортогональное дополнение подпространства. Задача о перпендикуляре. Понятие о расстоянии и кратчайшем расстоянии в евклидовых и унитарных пространствах.

Изометрия пространств.

11. Линейное аффинное многообразие

Линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве.

Расстояние в евклидовом (унитарном) пространстве. Изометрия.

Решение задач многомерной геометрии. Расстояние в евклидовом пространстве.

12. Линейные операторы

Определение и простейшие свойства. Матрица линейного оператора.

Линейное пространство операторов. Умножение линейных операторов. Образ и ядро линейного оператора. Линейные формы. Алгебра линейных операторов, действующих в одном пространстве.

Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен.

Собственное подпространство. Операторы простой структуры. Треугольная форма матрицы линейного оператора.

Нильпотентный оператор. Корневые подпространства.

Жорданова форма матрицы линейного оператора.

Сопряженный оператор. Биортогональные базисы. Нормальный оператор. Теорема Шура. Унитарно подобные матрицы. Критерий унитарности. Спектральная характеристика унитарного оператора. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора. Самосопряженный оператор.

Знакоопределенные операторы. Разложение линейного оператора.

13. Квадратичные формы

Квадратичные формы в линейном пространстве. Канонический вид квадратичной формы. Закон инерции. Знакоопределенные квадратичные формы. Квадратичные формы в комплексном пространстве. Эрмитовы формы. Квадратичные формы в евклидовом (унитарном) пространстве.

14. Элементы общей алгебры

Группа. Подгруппа. Кольцо. Поле. Обобщение изученного материала.

Примерные варианты контрольных работ

За курс студенты пишут две контрольные работы. Баллы за контрольные суммируются с баллами за практические занятия.

Контрольная работа №1

Часть 1

1. С помощью формул Крамера найти первый корень системы линейных уравнений.

$$\{3x + 3y + z = -3, 7x + 6y + 2z = -1, 7x + 9y + 2z = -2.$$

2. Установить, что система уравнений имеет единственное решение, и найти его с помощью обратной матрицы.

$$\{-2x + 3y + 4z = 5, 3x - y - 3z = -2, -x + 2y + 2z = 1.$$

3. Найти общее и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\{5x + 3y + 5z + 12t = 10, 2x + 2y + 3z + 5t = 4, x + 7y + 9z + 4t = 2.$$

Часть 2

4. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить и исследовать систему линейных уравнений

$$\{ax + y + z = 4, x + by + z = 3, x + 2by + z = 4.$$

6. Вычислить определитель, пользуясь разложением по минорам второго порядка

$$|2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2|$$

Контрольная работа № 2. Евклидовы и унитарные пространства

1. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов x и y в некотором базисе двумерного вещественного линейного пространства V . Можно ли скалярное произведение в V определить формулой

$$(x, y) = [x_1, x_2][1 \ 0 \ 0 \ 4][y_1 \ y_2].$$

2. Найти длину вектора $a = (1, 1)$ в пространстве R^2 со скалярным произведением

$$(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

3. В пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением построить ортонормированный базис подпространства, натянутого на систему векторов: $a_1 = (2, 3, -4, -6)$, $a_2 = (1, 8, -2, -16)$, $a_3 = (12, 5, -14, 5)$, $a_4 = (3, 11, 4, -7)$.

4. В пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h , опущенный из вектора f на подпространство L , заданное системой уравнений:

$$f = (-3, 0, -5, 9), L: \{3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$$

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№ тем ы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Основные алгебраические структуры	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
2.	Алгебра матриц	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
3.	Определитель матрицы	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
4.	Обратная матрица	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
5.	Ранг матрицы	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
6.	Решение систем линейных уравнений общего вида	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
7.	Поле комплексных чисел	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
8.	Кольцо многочленов	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
9.	Линейное пространство над произвольным полем	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
10.	Евклидовы и унитарные пространства	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
11.	Линейное аффинное многообразие	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
12.	Линейные операторы	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
13.	Квадратичные формы	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.
14.	Элементы общей алгебры	Чтение рекомендованной и дополнительной учебной, научной, критической и справочной литературы. Подготовка конспектов. Решение задач по теме занятия.

В ходе подготовки к занятию обучающиеся самостоятельно разбирают некоторые разделы темы и читают обязательную литературу. Оценка самостоятельной работы студентов осуществляется в течение практических занятий посредством устного опроса и проверки конспектов по теме занятия, решений задач. Оцениваются как фактические знания студентов, так и глубина, а также навыки самостоятельного поиска необходимой информации по теме занятия и ее критической оценки.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю)

6.1 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

За курс студенты пишут две контрольные работы. Баллы за контрольные суммируются с баллами за практические занятия. Студент, у которого сумма набранных баллов, оказалась меньше 61, должен сдать экзамен. Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи. Задачи экзаменационного билета аналогичны заданиям контрольных работ.

Вопросы к экзамену

1. Перестановки, размещения и сочетания.
2. Множества и операции над ними. Мощность множеств.
3. Матрицы и операции над ними
4. Определители. Теорема Лапласа.
5. Теорема о произведении определителей.
6. Теорема об обратной матрице.
7. Правило Крамера.
8. Арифметическое линейное пространство.
9. Ранг матриц. Теорема о ранге.
10. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.
11. Системы линейных однородных уравнений. Теорема о фундаментальных системах.
12. Системы линейных алгебраических неравенств.
13. Основные алгебраические структуры.
14. Комплексные числа. Тригонометрическая форма.
15. Корни из комплексных чисел.
16. Кольцо многочленов. Алгоритм Евклида.
17. Неприводимые многочлены над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} .
18. Линейные пространства, подпространства. Сумма и пересечение подпространств.
19. Евклидовы пространства.
20. Унитарные пространства.
21. Линейные операторы.
22. Ранг и дефект линейного оператора.
23. Собственные значения и векторы линейного оператора.
24. Жорданова форма матрицы.
25. Теорема Гамильтона - Кэли.
26. Сопряжённый оператор.
27. Нормальный оператор. Критерий нормальности.
28. Ортогональный оператор. Критерий ортогональности.
29. Самосопряжённый оператор.
30. Квадратичная форма и её канонический вид.

31. Критерий Сильвестра.
32. Закон инерции квадратичных форм.
33. Группы и гомоморфизмы.
34. Кольцо целых чисел.
35. Кольцо вычетов.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 4

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Контрольная работа №1, контрольная работа № 2, экзамен	Компетенция сформирована при правильности и полноте ответов на теоретические вопросы, при глубине понимая вопроса и правильности выполнения предложенных заданий. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1 Основная литература:

1. Высшая алгебра : учебное пособие (курс лекций) / В. В. Бондарь, О. Д. Роженко, А. А. Смирнов, О. И. Скворцова. — Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2018. — 154 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/92679.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

7.2 Дополнительная литература:

1. Березина, Н. А. Линейная алгебра : учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов : Научная книга, 2019. — 125 с. — ISBN 978-5-9758-1741-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

- <http://www.iprbookshop.ru/80988.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Вильчевская, Е. Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ : учебное пособие / Е. Н. Вильчевская. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019. — 124 с. — ISBN 978-5-7422-6705-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/99827.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
 3. Емельянова, Т. В. Линейная алгебра. Решение типовых задач : учебное пособие / Т. В. Емельянова, А. М. Кольчатова. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 184 с. — ISBN 978-5-4486-0331-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/74559.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей
 4. Линейная алгебра : сборник задач / составители Л. Л. Ефименко, Ю. Н. Исмаиловой, И. В. Фролова. — Новосибирск : Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИИХ», 2015. — 52 с. — ISBN 978-5-7014-0686-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87127.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей
 5. Романников, А. Н. Линейная алгебра : учебное пособие / А. Н. Романников. — Москва : Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2007. — 124 с. — ISBN 5-7764-0356-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/10890.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

7.3 Интернет-ресурсы:

1. <http://biblioclub.ru> – Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн»;
2. <http://e.lanbook.com/> – Электронно-библиотечная система «Издательства Лань»
3. <http://elibrary.ru/> – Научная электронная библиотека «eLibrary».
4. <http://katalog.iot.ru/> – Каталог образовательных ресурсов сети Интернет для школы.
5. <http://pedsovet.org/> – Всероссийский интернет-педсовет.
6. <http://study.utmn.ru> – Портал доступа к электронным образовательным ресурсам ТюмГУ;
7. <http://virtuallib.intuit.ru/department/education/teacherwork/>– Электронная библиотека «ИНТУИТ.РУ»
8. <http://window.edu.ru/unilib> – Единое окно доступа к электронным образовательным ресурсам;
9. <http://www.videosursy.ru/> – Медиаресурсы для образования и просвещения (медиаотека педагогического опыта).
10. <http://znanium.com> – Электронно-библиотечная система «Znaniium.com»

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Национальная электронная библиотека <https://rusneb.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю):

- Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

платформа для электронного обучения Microsoft Teams

- **Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:**
Adobe Acrobat Reader

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

- Учебные аудитории для проведения лекций и практических занятий.
- Меловая или маркерная доска.
- Проектор.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 – Математика

Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения очная

Шармин В.Г. Аналитическая геометрия. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль Вещественный, комплексный и функциональный анализ, форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

1. Пояснительная записка

Цели и задачи освоения дисциплины

Данный курс предусматривает изучение простейших геометрических объектов и фигур на плоскости и в трехмерном пространстве. К их числу на плоскости относятся алгебраические линии 1-го порядка – прямые, а также линии 2-го порядка - эллипс, гипербола и парабола. В трехмерном пространстве изучаются прямые, плоскости и поверхности 2-го порядка. Отметим некоторые особенности программы. Весьма подробно излагается векторная алгебра. При ее изложении сразу же вводится понятие линейной зависимости векторов, базиса и координат, скалярного, векторного и смешанного произведений.

Цели и задачи дисциплины

Целью курса «Аналитическая геометрия» является изучение геометрических объектов методами алгебры. Знания, полученные при изучении курса «Аналитическая геометрия», с одной стороны, формируют математическую культуру, с другой, составляют основу для математического моделирования в естественных и социальных науках.

Задачи изучения курса

Аналитическая геометрия имеет своей задачей изучение свойств геометрических объектов при помощи аналитического метода. В основе этого метода лежит метод координат, впервые систематически примененный Р.Декартом и призванный решать следующие конкретные задачи:

- изучение и овладение методом координат при рассмотрении геометрических образов, представляемых линейными и билинейными и алгебраическими формами;
- изучение методов и приемов решения геометрических задач аналитическими методами;
- формирование у студентов умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний при исследовании и построении математических моделей.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в блок Б1 Дисциплины (модули), обязательная часть.

Для успешного освоения дисциплины необходимо изучить математику по программе средней общеобразовательной школы.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Код и наименование части компетенции (при наличии паспорта компетенций)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
Выпускник способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в	ОПК-1	Знает постановку классических задач аналитической геометрии
		Знает возможности координатного метода для изучения свойств пространства, а также плоских и пространственных фигур

профессиональной деятельности (ОПК-1)	Знает правила действий с векторами, основные операции над ними и действия с векторами в координатах
	Умеет использовать аппарат векторной алгебры для решения геометрических задач, а также задач механики и физики
	Умеет доказывать основные формулы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве и применять их при решении практических задач
	Умеет строить линии 1-го и 2-го порядка по их уравнениям
	Умеет устанавливать типы важнейших линий на плоскости, а также линий и поверхностей в пространстве по их уравнениям
	Умеет формулировать результат, доказывать результат, видеть следствия полученного результата
	Умеет представлять публично полученные результаты

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре
			1 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		32	32
Практические занятия		32	32
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф. зачет, экзамен)			экзамен

3. Система оценивания

Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках модульно-рейтинговой (100-балльной) и традиционной (4-балльной) систем оценок.

Оценивание достижений обучающихся в течение семестра осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы. Баллы начисляются студентам следующим образом:

- решение задач и/или выполнение тестовых заданий на практическом занятии и домашняя работа – 2 баллов (всего 13 работ);
- контрольные работы – 24 балла – Кр №1, 25 баллов – Кр №2, 25 баллов - Кр №3.

Экзаменационная оценка студента в рамках-модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время практических занятий, домашних заданий, контрольных работ и/или выполнения тестовых заданий. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины:

61 - 76 баллов - удовлетворительно;

77 - 90 баллов - хорошо;

91 -100 баллов - отлично.

Студент, у которого сумма набранных баллов, оказалась меньше 61, должен сдать экзамен.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
1 семестр						
1.	Элементы векторной алгебры	26	6	6	0	0
2.	Система координат на плоскости и в пространстве	20	4	4	0	0
3.	Прямая на плоскости	20	4	4	0	0
4.	Прямая и плоскость в пространстве	26	6	6	0	0
5.	Линии второго порядка	30	8	8	0	0
6.	Поверхности второго порядка	20	4	4	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	32	32	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

1. Элементы векторной алгебры.

Понятие вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Линейная зависимость векторов. Геометрический смысл линейной зависимости. Базис и координаты вектора. Условия линейной зависимости векторов в координатах. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов. Площади и объемы.

2. Система координат на плоскости и в пространстве.

Аффинная система координат, репер. Деление отрезка в данном отношении. Прямоугольная система координат. Расстояние между точками. Угол и направленный угол (на плоскости) между векторами. Ортонормированные базисы и реперы. Полярные координаты на плоскости. Сферические и цилиндрические координаты в пространстве. Преобразование аффинных координат точки. Ортогональные матрицы. Преобразование прямоугольных координат точки. Ориентации плоскости и пространства.

3. Прямая на плоскости.

Каноническое и параметрическое уравнение прямой. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Взаимное расположение двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Полуплоскость.

4. Прямая и плоскость в пространстве.

Общее уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Угол между плоскостями. Канонические уравнения прямой. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми в пространстве. Общее уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

5. Линии второго порядка

Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Исследование свойств кривых второго порядка по их каноническим уравнениям. Директориальное свойство. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах. Общее уравнение линии второго порядка. Центр линии второго порядка. Касательная к линии второго порядка. Приведение линии второго порядка к каноническому виду и построение ее точек. Классификация линий второго порядка.

6. Поверхности второго порядка.

Поверхности второго порядка. Метод сечений. Поверхности вращения. Цилиндрические и конические поверхности. Конические сечения. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

Средства для проведения текущего контроля

Типовые варианты контрольных работ

Вариант контрольной работы №1:

1. Четыре вектора заданы координатами. Определить координаты одного из этих векторов в базисе, состоящем из трех остальных.
2. Принимая две смежных стороны правильного шестиугольника за базисные векторы, определить координаты векторов, лежащих на остальных сторонах и диагоналях.
3. Даны два вектора своими координатами. Найти третий вектор, перпендикулярный заданным, длина которого равна сумме длин данных векторов и который образует с одной из осей координат данный угол.
4. Найти угол между диагоналями наклонного параллелепипеда, если известны углы при одной из вершин и длины ребер, выходящих из этой же вершины.

Вариант контрольной работы №2:

1. На плоскости задан треугольник координатами своих вершин. Найти:
 - угол между медианой и высотой, исходящими из одной вершины;
 - длину одной из высот;
 - точку пересечения биссектрисы и высоты, исходящих из различных вершин.

2. Доказать, что на плоскости через заданную точку можно провести две прямые так, чтобы их расстояния до другой заданной точки были равны некоторому числу. Составить уравнения этих прямых.

3. Даны вершины тетраэдра:

- составить уравнения его сторон и граней;
- составить уравнения одной из высот и найти ее длину;
- составить уравнения некоторой высоты одной из граней и найти ее длину.

4. Найти точку, симметричную некоторой данной точке относительно заданной прямой в пространстве.

Вариант контрольной работы №3:

1. Даны эксцентриситет гиперболы и расстояние между ее директрисами. Составить уравнение гиперболы.

2. Дано полярное уравнение эллипса. Составить каноническое уравнение этого эллипса и изобразить его в системе координат.

3. Составить уравнение поверхности вращения, полученной вращением данной кривой второго порядка вокруг одной из ее осей и исследовать эту поверхность.

4. Определить угол между прямолинейными образующими данного гиперболического параболоида, проводящими через заданную точку.

Типовые тестовые задания:

СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ТЕСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Тематическая структура

Линии второго порядка

- Асимптоты гиперболы
- Действительная полуось гиперболы
- Мнимая полуось гиперболы
- Фокальное расстояние эллипса
- Фокальный параметр параболы
- Эксцентриситет

Плоскость и прямая в пространстве

- Взаимное расположение двух плоскостей
- Взаимное расположение двух прямых
- Взаимное расположение прямой и плоскости
- Канонические уравнения прямой
- Принадлежность точки плоскости
- Расстояние от точки до плоскости
- Угол между прямыми

Поверхности второго порядка

- Канонические уравнения поверхностей второго порядка
- Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка
- Свойства поверхностей второго порядка
- Сечения поверхностей второго порядка

Прямая на плоскости

- Пересечение прямой с осями координат
- Прямая в полярной системе координат
- Расположение прямой относительно системы координат
- Расстояние от точки до прямой
- Угловой коэффициент прямой

- Угол между прямыми
- Условие перпендикулярности прямых
- Система координат в пространстве
 - Сечения шара и сферы
 - Координаты точки в пространстве
 - Точка, равноудаленная от двух данных
 - Уравнение поверхности
- Система координат на плоскости
 - Деление отрезка в данном отношении
 - Площадь ромба
 - Связь декартовых и полярных координат
 - Уравнение линии
- Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов
 - Вычисление векторного произведения
 - Вычисление скалярного произведения
 - Объем параллелепипеда
 - Свойства векторного произведения
 - Условие перпендикулярности векторов
- Элементы векторной алгебра на плоскости и в пространстве
 - Длина вектора
 - Единичный вектор
 - Коллинеарные векторы

Содержание тестовых материалов

Линии второго порядка

1. Асимптоты гиперболы

Расположить гиперболы в порядке возрастания угла, образованного ее асимптотами и содержащего ось Ox

$$-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$$

2. Действительная полуось гиперболы

Действительная полуось гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ равна ...

Правильные варианты ответа: 5;

3. Мнимая ось гиперболы

Мнимая полуось гиперболы $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ равна ...

Правильные варианты ответа: 5;

4. Фокусы эллипса

Расположить эллипсы в порядке убывания фокального расстояния

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{18} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$\frac{x^2}{42} + \frac{y^2}{8} = 1$$

5. Фокальный параметр параболы

Расположить параболы в порядке возрастания их фокального параметра

$$y^2 = -10x$$

$$x^2 = 6y$$

$$x^2 = 12y$$

6. Эксцентриситет

Расположить в порядке возрастания эксцентриситета

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{18} = 1$$

$$-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = -1$$

$$x^2 = 6y$$

Плоскость и прямая в пространстве

7. Взаимное расположение двух плоскостей

Плоскости $4x + 6y - 8z + 2 = 0$ и $6x - y + 9z - 8 = 0$...

пересекаются, но не перпендикулярны

пересекаются и перпендикулярны

совпадают

параллельны

8. Взаимное расположение двух прямых

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{5}$$

Прямая и ось Oy ...

совпадают

скрещиваются

пересекаются, но не перпендикулярны

параллельны

пересекаются и перпендикулярны

9. Параллельность прямых и плоскостей

Соответствие между плоскостью и параллельной ей прямой

$$6x + 3y + 4z - 7 = 0$$

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$x + y - z + 8 = 0$$

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$6x + 3y + z - 8 = 0$$

10. Канонические уравнения прямой

Соответствие между параметрами, задающими прямую, и ее уравнениями

Точка (0,0,2) и вектор (1,2,3)

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$$

Точка (0,-2,0) и вектор (1,-1,-3)

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-3}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-9}{-3}$$

11. Принадлежность точки плоскости

Плоскости $4x - 7y + 5z - 140 = 0$ принадлежит точка ...

$$(35,0,0)$$

$$(20,0,0)$$

$$(28,0,0)$$

$$(0,0,0)$$

12. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки (-4,3,3) до плоскости $5x - 8y + \sqrt{11}z - 3\sqrt{11} = 0$ равно ...

$$6$$

$$0,2$$

$$0,1$$

$$5,9$$

$$4,4$$

13. Угол между прямыми

Расположить прямые в порядке убывания угла, образованного этими прямыми с вектором (3,0,-1)

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-3}$$

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$$

Поверхности второго порядка

14. Канонические уравнения

Соответствие между названиями поверхностей второго порядка и их каноническими уравнениями

Гиперболический параболоид

$$\frac{z^2}{17} - \frac{y^2}{14} = -2x$$

Двуполостный гиперболоид

$$-\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{14} - \frac{z^2}{23} = 1$$

Однополостный гиперболоид

15. Прямолинейные образующие

Прямолинейных образующих НЕТ у ...

- гиперболического цилиндра
- однополостного гиперболоида
- гиперболического параболоида
- двуполостного гиперболоида

16. Вершины поверхности

Ровно две вершины имеет поверхность ...

$$\frac{z^2}{17} + \frac{y^2}{14} = 2x$$

$$\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{14} - \frac{z^2}{23} = -1$$

$$-\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{14} + \frac{z^2}{23} = 1$$

$$\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{14} + \frac{z^2}{23} = 1$$

17. Оси поверхности

НЕ менее трех осей симметрии имеют (ет) ...

- эллипсоид
- однополостный гиперболоид
- эллиптический параболоид
- гиперболический параболоид

18. Сечения поверхности

Сечением поверхности $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{3} = -2y$ плоскостью $y = 4$ является ...

- мнимый эллипс
- эллипс
- гипербола
- парабола
- пара пересекающихся прямых

Прямая на плоскости

19. Площадь треугольника

Площадь треугольника, отсекаемого прямой $5x - 6y + 60 = 0$, равна ...

Правильные варианты ответа: 60;

20. Прямая в полярной системе координат

Расстояние между точками пересечения линий $\rho = 10$ и $\rho \cdot \cos \varphi = 8$ равно

- 8
- 6
- 16
- 12

21. Расположение прямой относительно системы координат

Прямая $3x - 7y = 0$...

- проходит через начало координат
- параллельна оси абсцисс
- параллельна оси ординат
- совпадает с осью абсцисс
- совпадает с осью ординат

22. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $A(5, -2)$ до прямой $3x + 4y - 2 = 0$ равно ...

- 1
- 0,4
- 4
- 2,8
- 4,6

23. Угловой коэффициент прямой

Угловой коэффициент прямой $4x + 2y - 6 = 0$ равен ...

Правильные варианты ответа: -2;

24. Углы падения и отражения

Луч света, направленный по прямой $y = x - 5$, отражается от оси Ox . Ордината точки пересечения отраженного луча с осью Oy равна ...

25. Условие перпендикулярности

Прямые $4x + 5y + 6 = 0$ и $ax + 8y = 0$ перпендикулярны при a равно...

- 18
- 10
- 10
- 18
- 4

Система координат в пространстве

26. Координаты точки в пространстве

Сумма расстояний от точки $A(3,-2,-4)$ до оси Oy и плоскости xOz равна ...

Правильные варианты ответа: 7;

27. Точка, равноудаленная от двух данных

Сумма координат точки C , лежащей на оси Oy и равноудаленной от точек $A(-4,-4,2)$ и $B(-1,-5,4)$, равна ...

- 3
- 3
- 1
- 1
- 5

28. Уравнение поверхности

Фигурой, заданной в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве

уравнением $|x - y| = 0$, является ...

- пустое множество
- плоскость
- две полуплоскости
- полуплоскость

Система координат на плоскости

29. Деление отрезка пополам

Сумма координат точки, делящей отрезок с концами $A(-8,3)$ и $B(8,-3)$, равна ...

Правильные варианты ответа: 0;

30. Площадь ромба

Сторона ромба равна $5 \cdot \sqrt{37}$, две его противоположные вершины имеют координаты $A(4,9)$ и $C(-2,1)$. Площадь ромба равна ...

Правильные варианты ответа: 300

31. Уравнение линии

Фигурой, заданной в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости

уравнением $x^2 - y^2 = -2$, является ...

- гипербола
- окружность
- пара мнимых параллельных прямых
- точка
- пара действительных параллельных прямых

Векторное скалярное и смешанное произведение

32. Вычисление векторного произведения

Сумма координат векторного произведения векторов (0,-3,4) и (8,2,0) равна ...

Правильные варианты ответа: 48;

33. Вычисление скалярного произведения

Скалярное произведение векторов (-1,-1,2) и (4,5,-9) равно ...

Правильные варианты ответа: -27;

34. Вычисление объема параллелепипеда

Объем параллелепипеда, построенного на векторах (-5,-3,-8), (3,-2,-4) и (0,-1,0), равен ...

Правильные варианты ответа: 44;

Элементы векторной алгебра на плоскости и в пространстве

35. Длина вектора

Квадрат длины вектора с координатами (3,-4,2) равен ...

Правильные варианты ответа: 29;

36. Единичный вектор

Произведение координат единичного вектора, противоположно направленного с вектором (-2,-3), равно ...

2/13

-2/13

1/13

-6/13

6/13

37. Коллинеарные векторы

Векторы $\vec{a}(3,-5,\alpha)$ и $\vec{b}(-12,20,16)$ коллинеарны при α равном ...

4

-3

-4

2

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№ темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Элементы векторной алгебры	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.

2.	Система координат на плоскости и в пространстве	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.
3.	Прямая на плоскости	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.
4.	Прямая и плоскость в пространстве	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.
5.	Линии второго порядка	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.
6.	Поверхности второго порядка	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзаменационная оценка студента в рамках-модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время практических занятий, домашних заданий, контрольных работ и/или выполнения тестовых заданий. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины:

61 - 76 баллов - удовлетворительно;

77 - 90 баллов - хорошо;

91 -100 баллов - отлично.

Студент, у которого сумма набранных баллов, оказалась меньше 61, должен сдать экзамен.

Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студента на теоретические вопросы, перечень которых представлен в разделе ниже, решения задач, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в типовых вариантах контрольных работ и/или выполнения тестовых заданий. Эта оценка характеризует уровень знаний, умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.

Примечание. Студент, желающий исправить экзаменационную оценку, полученную в рамках модульно-рейтинговой системы, имеет право на сдачу экзамена.

Вопросы к экзамену

1. Сложение векторов и его свойства.
2. Умножение вектора на число и его свойства.
3. Линейная зависимость и независимость векторов.

4. Координаты вектора относительно данного базиса. Операции над векторами, заданными своими координатами.
 5. Аффинная система координат на плоскости. Деление отрезка в данном отношении.
 6. Прямоугольная система координат. Расстояние между двумя точками. Правая и левая системы координат.
 7. Полярные координаты на плоскости.
 8. Преобразование аффинной системы координат на плоскости.
 9. Преобразование прямоугольной системы координат на плоскости.
 10. Определение скалярного произведения векторов и его свойства.
 11. Вычисление скалярного произведения. Длина вектора. Угол между векторами.
- Ортогональные векторы.
12. Каноническое и параметрические уравнения прямой.
 13. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
- Взаимное расположение двух прямых.
14. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми.
 15. Преобразование аффинной системы координат в пространстве.
 16. Преобразование прямоугольной системы координат в пространстве.
 17. Векторное произведение и его свойства.
 18. Вычисление векторного произведения. Площадь параллелограмма.
 19. Смешанное произведение и его свойства.
 20. Вычисление смешанного произведения. Объем параллелепипеда.
 21. Общее уравнение плоскости.
 22. Расстояние от точки до плоскости.
 23. Взаимное расположение двух и трех плоскостей.
 24. Угол между плоскостями.
 25. Канонические уравнения прямой.
 26. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
 27. Угол между прямыми в пространстве.
 28. Общее уравнение прямой в пространстве.
 29. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
 30. Каноническое уравнение эллипса. Свойства эллипса.
 31. Каноническое уравнение гиперболы. Свойства гиперболы.
 32. Каноническое уравнение параболы. Свойства параболы.
 33. Директориальное свойство линий второго порядка.
 34. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах.
 35. Поверхности вращения.
 36. Цилиндрические и конические поверхности.
 37. Эллипсоид и его свойства.
 38. Гиперболоиды и их свойства.
 39. Параболоиды и их свойства.
 40. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 4

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1	Выпускник способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности. (ОПК-1)	<p>ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук</p> <p>ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.</p>	Задания для аудиторной и домашней работы	Наличие конспекта практических занятий
			Тестовые задания	Оценка (в баллах) выставляется пропорционально количеству правильно выполненных тестовых заданий
			Контрольные работы	Оценка (в баллах) выставляется пропорционально количеству правильно решенных задач с учетом коэффициента сложности каждой задачи.
			Экзаменационные билеты	<p>Экзаменационный билет состоит из двух теоретических заданий и решения задач и/или выполнения тестовых заданий. Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.</p> <p>Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле</p>

				успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ».
--	--	--	--	--

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература:

1. Остыловский, А. Н. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. - 92 с. - ISBN 978-5-7638-2196-3. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/443221> (дата обращения: 20.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Бортаковский, А. С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 496 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-011202-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1069929> (дата обращения: 20.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Бортаковский, А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум : учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. — 2-е изд., стереотип. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 352 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-010206-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1014764> (дата обращения: 20.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3. Интернет-ресурсы:

1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам <http://window.edu.ru/>.
2. Официальный сайт Министерства образования и науки Российской Федерации <http://минобрнауки.рф/>.
3. Российский общеобразовательный портал <http://www.school.edu.ru/>.
4. Федеральный портал «Российское образование»: <http://www.edu.ru/>.
5. Федеральное хранилище «Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов»: <http://school-collection.edu.ru/>.
6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU: <http://elibrary.ru/>.
7. <http://www.wolframalpha.com/>.
8. www.math.ru - сайт посвящён Математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой.
9. www.exponenta.ru - образовательный математический сайт.
10. www.matematicus.ru - учебный материал по различным математическим курсам.
11. www.geometry.ru – материалы по элементарной геометрии.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. ProQuest Dissertations & Theses Global / ФГБУ «Государственная публичная научно-техническая библиотека России». URL: <https://search.proquest.com/index>
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю):

- Лицензионное ПО:

платформа для электронного обучения Microsoft Teams

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и аудитория для практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Форма обучения очная

Басинский К.Ю. Вариационное исчисление. Рабочая программа дисциплины для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

1. Пояснительная записка

Целью изучения дисциплины «Вариационное исчисление» является получение теоретических знаний и практических навыков решения задач в объеме, необходимом для изучения других дисциплин учебного плана направления «Математика», а также в дальнейшей профессиональной деятельности; формирование навыков самостоятельной работы со специальной литературой. В результате изучения курса студент должен получить представление о теоретических основах и практические приложения разделов вариационного исчисления к задачам физики и других естественных наук.

Краткое содержание дисциплины.

Задачи, приводящие к вариационным проблемам. Экстремумы функционалов. Вариационные задачи с фиксированными границами. Вариационные задачи с подвижными границами. Задачи на условный экстремум. Достаточные условия экстремума. Вариационные методы в оптимальном управлении. Прямые методы вариационного исчисления. Двойственные вариационные задачи. Приложения вариационных методов.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Компонент (знаниевый/функциональный)
Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	Знает: теоретические основы и практические приложения разделов вариационного исчисления, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами
	Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать математические методы для использования их в работе и научных исследованиях
Способен пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования (ПК-5)	Знает: типичные постановки задач вариационного исчисления; типичные постановки задач управления и оценивания; основные результаты в области вариационного исчисления, оптимального оценивания траекторий динамических систем и оптимального управления. Умеет: ставить и решать задачи вариационного исчисления, включая решение задач с использованием вычислительных машин; ставить и решать задачи оптимального управления и оценивания, включая построение алгоритмов численного решения задач.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов (академические часы)	Часов в семестре (академические часы)
			7 семестр
Общий объем	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		30	30
Практические занятия		34	34
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф. зачет, экзамен)			Экзамен

3. Система оценивания

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" за две контрольные работы, то он получает оценку "отлично" без сдачи экзамена. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за другую "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдавать экзамен (без сохранения оценки).

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/ п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/ практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
7 семестр						

1	Основные понятия вариационного исчисления	20	3	3	0	0
2	Простейшие задачи вариационного исчисления	22	9	9	0	0
3	Достаточные условия экстремума. Сильный экстремум	20	6	6	0	0
4	Вариационные задачи для случая многих неизвестных функций. Вариационные задачи на условный экстремум	20	3	3	0	0
5	Основные понятия и задачи теории оптимального управления	20	3	3	0	0
6	Условия экстремума в задачах оптимального управления	20	4	6	0	0
7	Принцип Вейерштрасса	20	2	4	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Основные понятия вариационного исчисления: примеры содержательных задач о поиске экстремумов; типовые задачи вариационного исчисления; основные понятия и определения; общая постановка задачи вариационного исчисления; классификация экстремумов.

Тема 2. Простейшие задачи вариационного исчисления: необходимые условия экстремума в простейшей задаче; основные леммы вариационного исчисления; уравнение Эйлера; экстремали в регулярной и сингулярной ситуациях; случаи упрощения уравнения Эйлера; вариационная задача с незакреплёнными границами; условия трансверсальности; разрывные задачи; условия Вейерштрасса-Эрдмана; задачи с ограничениями; односторонние вариации.

Тема 3. Достаточные условия экстремума. Сильный экстремум: вторая вариация функционала; условие Лежандра; достаточные условия слабого относительного экстремума; геометрическая интерпретация достаточных условий слабого локального экстремума; достаточные условия сильного относительного экстремума; необходимые условия сильного относительного экстремума.

Тема 4. Вариационные задачи для случая многих неизвестных функций. Вариационные задачи на условный экстремум: простейшая вариационная задача с n неизвестными; каноническая форма системы дифференциальных уравнений Эйлера; обобщения простейшей вариационной задачи для случая n неизвестных; сильный относительный экстремум в задаче с n неизвестными; правило множителей Лагранжа в

задаче конечномерной оптимизации; вариационная задача Лагранжа на условный экстремум; изопериметрическая задача.

Тема 5. Основные понятия и задачи теории оптимального управления: пример содержательной задачи о построении оптимального управления; задача оптимального программного управления как вариационная задача на условный экстремум; классификация задач теории оптимального управления; задача о переводе системы из одного заданного состояния в другое; управляемость системы.

Тема 6. Условия экстремума в задачах оптимального управления: построение оптимальных программных управлений в задаче Больца; однопараметрическое семейство допустимых управлений; необходимые условия экстремума и их каноническая форма; оптимальное стабилизирующее управление; принцип оптимальности; уравнение Беллмана; задача об оптимальном быстродействии; достаточные условия экстремума в задаче Лагранжа

Тема 7. Принцип Вейерштрасса: принцип Вейерштрасса; постановка задачи; понятие игольчатой вариации управления; принцип максимума и его соотношение с принципом Вейерштрасса.

Средства для проведения текущего контроля

Для текущего контроля используются контрольные работы

Контрольная работа №1

1. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления

$$\int_0^1 (t^2 \dot{x}^2 + 12x^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

2. Решить задачу Больца

$$\int_0^1 x \dot{x} dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \rightarrow \text{extr}.$$

3. Решить задачу с подвижными концами

$$\int_0^1 (x \dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(1) = 0.$$

4. Решить изопериметрическую задачу

$$\int_0^1 t^3 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_1^2 x dt = 2, \quad x(1) = 4, \quad x(2) = 1.$$

5. Решить задачу Лагранжа

$$\int_0^1 (x^2 + u^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x} = x + u, \quad x(1) = 1.$$

Контрольная работа №2

1. Решить задачу оптимального быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad |u| \leq 1, \quad x_1(t_1) = (t_1) = 0, \quad x_1(t_2) = 0, \quad x_2(t_2) = -4. \end{cases}$$

Решить задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u, \quad -\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \quad x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 1, \quad \int_0^{2\pi} u dt + x_2(2\pi) \rightarrow \min. \end{cases}$$

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
7 семестр		
1	Основные понятия вариационного исчисления	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Простейшие задачи вариационного исчисления	Проработка лекций
3	Достаточные условия экстремума. Сильный экстремум	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Вариационные задачи для случая многих неизвестных функций. Вариационные задачи на условный экстремум	Проработка лекций
5	Основные понятия и задачи теории оптимального управления	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Условия экстремума в задачах оптимального управления	Проработка лекций
7	Принцип Вейерштрасса	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Экзамен	Самостоятельное изучение заданного материала

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" за две контрольные работы, то он получает оценку "отлично" без сдачи экзамена. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за другую "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдавать экзамен (без сохранения оценки).

Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Экстремум функции многих переменных. Безусловный экстремум.
2. Экстремум функции многих переменных. Достаточные условия строгого экстремума.
3. Метод наискорейшего спуска.
4. Экстремум функции многих переменных. Условный экстремум.
5. Метод множителей Лагранжа.
6. Функционал. Вариация функционал и ее свойства.

7. Функционал. Необходимое условие экстремума.
8. Уравнение Эйлера.
9. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
10. Вариационные задачи в параметрической форме.
11. Функционалы, зависящие от производных высших порядков.
12. Функционалы, зависящие от нескольких функций.
13. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных.
14. Поле экстремалей. Семейство однопараметрических кривых.
15. Поле экстремалей. Достаточное условие Якоби.
16. Поле экстремалей. Достаточные условия Лежандра.
17. Достаточные условия Вейерштрасса.
18. Достаточные условия Лежандра.
19. Фигуратриса.
20. Достаточное условие минимума.
21. Условный экстремум.
22. Изопериметрическая задача.
23. Задача Лагранжа при наличии связей.
24. Геодезические линии.
25. Простейшая задача с подвижными границами.
26. Задача с подвижными границами.
27. Геодезическое расстояние.
28. Разрывные задачи первого рода.
29. Разрывные задачи второго рода.
30. Односторонние вариации.
31. Каноническая форма уравнений Эйлера.
32. Уравнения Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби.
33. Вариационные принципы механики.
34. Конечно-разностный метод Эйлера.
35. Метод Рунге.
36. Метод Канторовича.
37. Задача Штурма-Лиувилля.
38. Принцип Релея.

Примерные экзаменационные задания

1. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления

$$\int_0^1 (t^2 \dot{x}^2 + 12x^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

2. Решить задачу Больца

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \rightarrow \text{extr}.$$

3. Решить задачу с подвижными концами

$$\int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(1) = 0.$$

4. Решить изопериметрическую задачу

$$\int_0^1 t^3 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_1^2 x dt = 2, \quad x(1) = 4, \quad x(2) = 1.$$

5. Решить задачу Лагранжа

$$\int_0^1 (x^2 + u^2) dt \rightarrow \text{extr}, \dot{x} = x + u, x(1) = 1.$$

6. Решить задачу оптимального быстрогодействия

$$\{\dot{x}_1 = x_2 + 1 \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad |u| \leq 1, \quad x_1(t_1) = (t_1) = 0, \quad x_1(t_2) = 0, \quad x_2(t_2) = -4.$$

Решить задачу оптимального управления

$$\{\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = x_1 + 2u, \quad -\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \quad x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 1, \quad \int_0^{2\pi} u dt + x_2(2\pi) \rightarrow \min.$$

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности. ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Контрольная работа Экзамен	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий. Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень

				знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.
2	Способен пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования (ПК-5)	ПК-5.1. Пользуется заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией. ПК-5.2. Оценивает возможный результат моделирования	Контрольная работа Экзамен	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий. Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература

1. Коган, Е. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Е.А. Коган. - Москва : ИНФРА-М, 2020. - 293 с. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/document?id=357263> (дата обращения: 08.11.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Кристалинский, Р. Е. Решение вариационных задач строительной механики в системе МАТНЕМАТИСА : учебное пособие / Р. Е. Кристалинский, Н. Н. Шапошников. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-0924-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211> (дата обращения: 08.12.2020)

3. Казанцева, Т. Е. Дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / Т. Е. Казанцева. — Тюмень : ТюмГУ, [б. г.]. — Часть 1 : Дифференциальные уравнения первого порядка — 2019. — 48 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/122132> (дата обращения: 08.12.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

7.2. Дополнительная литература

1. Егоров, А. И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] / А. И. Егоров. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 256 с. - ISBN 978-5-9221-0942-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544694> (дата обращения: 08.12.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Киселев, Д. М. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебно-методическое пособие / Д. М. Киселев. - Москва : МГАВТ, 2001. - 39 с. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/522813> (дата обращения: 08.12.2020). – Режим доступа: по подписке.
3. Белов, Ю. Я. Аппроксимация и корректность краевых задач для дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учеб. пос. / Ю. Я. Белов, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков. - Красноярск: Сиб. Федер. ун-т, 2012. - 172 с. - ISBN 978-5-7638-2499-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/491959> (дата обращения: 08.12.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

- Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: <https://icdlib.nspu.ru/>
- Национальная электронная библиотека. - URL: <https://rusneb.ru/>
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: <https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true>
- Orbit Intelligence. - URL: <https://www.orbit.com>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:


1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Maple.
5. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук


23.06.2021

М.Н. Первалова

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика
Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Форма обучения очная

Мачулис В.В. Динамические системы. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

1. Пояснительная записка

Современные исследования не только в области естественных, но и в области гуманитарных наук невозможны без математического моделирования и точных количественных методов исследования, широкого использования современных вычислительных средств.

Целью преподавания дисциплины является изучение методов качественной теории дифференциальных уравнений, или теории динамических систем. Под динамической системой понимается любой объект, или процесс, для которых определено понятие состояния (задаваемое обычно числовым вектором в R^n) и изменение которых определяется этим начальным состоянием. Определение допускает моделирование динамическими системами явлений и процессов в механике, физике, химии, теории вычислительных процессов, процессах переработки информации, совершаемых согласно некоторым алгоритмам. Выросшая в основном из задач, пришедших из приложений, теория динамических систем превратилась в настоящее время в самостоятельную дисциплину со своими задачами и методами. Основные задачи теории динамических систем:

- 1) каково асимптотическое поведение систем на бесконечном интервале времени;
- 2) какова зависимость асимптотического поведения от начальных данных;
- 3) какова зависимость асимптотического поведения от возмущений.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули).

Для её успешного изучения необходимы знания и умения, приобретённые в результате освоения предшествующих дисциплин: математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра, системы компьютерной математики.

Освоение дисциплины «Динамические системы» необходимо при изучении курсов «Гидродинамика», «Математические методы в механике сплошной среды», написании выпускной квалификационной работы, а также последующем изучении дисциплин магистратуры, связанных с моделированием различных процессов в природе и обществе. Этот раздел науки является необходимым для обучения в аспирантуре по специальности «математическое моделирование».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОПК-2: способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	Знает: основные понятия и определения теории динамических систем на плоскости, простейшие приёмы качественного исследования этих систем, методы исследования гиперболических неподвижных точек с помощью линеаризации, условия существования предельного цикла. Умеет: применять полученные знания для решения задач, возникающих в профессиональной деятельности.

<p>ПК-4: способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств</p>	<p>Знает: возможные типы автономных систем на плоскости, методы качественного исследования этих систем, способы реализации исследования на компьютере.</p> <p>Умеет: применять полученные знания на практике, подбирать средства и методы для решения поставленных задач; делать обоснованные заключения по результатам проводимых исследований.</p>
---	--

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре 7 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		30	30
Практические занятия		34	34
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		78	78
Вид промежуточной аттестации			Экзамен

3. Система оценивания

Оценивание достижений обучающихся в течение семестра осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы. Баллы начисляются студентам следующим образом:

1. решение задач на практическом занятии и домашняя работа – от 3-х до 8-ми баллов в зависимости от занятия;
2. контрольная работа – 8 баллов.

В контрольную работу включаются типы задач, рассмотренных на практических занятиях.

Обучающиеся, набравшие в течение семестра: от 61 до 75 баллов, получают оценку «удовлетворительно»; от 76 до 90 баллов – «хорошо»; 91 балл и выше – «отлично». Обучающиеся, не набравшие достаточное количество баллов или желающие повысить оценку, сдают экзамен.

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов: первый вопрос (В1) – теоретический, второй вопрос (В2) – задача. На подготовку к вопросу отводится не более 60 минут. По вопросам билета проводится собеседование, в ходе которого задаются дополнительные вопросы. Ответ на каждый вопрос оценивается по 100-балльной шкале. Результирующая оценка рассчитывается по формуле $0,4 \cdot V1 + 0,6 \cdot V2$. При

результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «неудовлетворительно»; от 61 до 75 – «удовлетворительно»; от 76 до 90 – «хорошо»; от 91 до 100 – «отлично».

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
7 семестр						
1	Основные понятия и определения теории динамических систем.	14	2	2	0	
2	Автономные динамические системы на прямой и на плоскости.	16	4	4	0	0
3	Устойчивость неподвижных точек нелинейных систем.	16	4	4	0	0
4	Консервативные и диссипативные системы.	16	4	4	0	0
5	Периодические орбиты.	16	4	4	0	0
6	Бифуркации.	16	4	4	0	0
7	Приложения.	16	2	4	0	0
8	Хаос.	16	3	4	0	0
9	Показатели Ляпунова.	16	3	4	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Основные понятия и определения теории динамических систем: Геометрическое представление решений дифференциальных уравнений, равновесные точки, фазовые портреты.

Тема 2. Автономные динамические системы на прямой и на плоскости: Типы неподвижных точек, канонический фазовый портрет, матрица линейного преобразования (матрица перехода), устойчивость равновесных решений.

Тема 3. Устойчивость неподвижных точек нелинейных систем: Гиперболические и негиперболические неподвижные точки, теорема о линеаризации, некоторые классические модели.

Тема 4. Консервативные и диссипативные системы: Консервативные системы и первые интегралы, диссипативные системы, предельные циклы, градиентные системы, нелинейный осциллятор, нейронные сети.

Тема 5. Периодические орбиты: Теорема Пуанкаре-Бендиксона, модель химической реакции, система Ван дер Поля, теория индексов, критерий Дюлака.

Тема 6. Бифуркации: Седло-узел, транскритическая, вильчатая, Андронова-Хопфа, гомоклиническая.

Тема 7. Приложения: Химический реактор, нелинейные электрические цепи, модель Вольтерра-Лотки.

Тема 8. Хаос: Существенная зависимость от начальных данных, хаотические аттракторы, система Лоренца, аттрактор Рёслера.

Тема 9. Показатели Ляпунова: Вычисление показателей Ляпунова, тест для хаотического аттрактора.

Средства для проведения текущего контроля

Оценивание достижений обучающихся в течение семестра осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы. Баллы начисляются студентам следующим образом:

1. решение задач на практическом занятии и домашняя работа – от 3-х до 8-ми баллов в зависимости от занятия;
2. контрольная работа – 8 баллов.

В контрольную работу включаются типы задач, рассмотренных на практических занятиях.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Для каждого из следующих уравнений найти неподвижные точки, определить их тип, нарисовать фазовый портрет, найти общее решение и изобразить несколько интегральных кривых на поле направлений.



$$x' = x^3 - 3x ; \text{ (б)}$$

$$x' = \sin^2 x ; \text{ (в)}$$

$$x' = |1 - x^2| ;$$

$$x' = ax + 2 \text{ (a – число).}$$

2. Для следующих уравнений найти потенциалы и с их помощью исследовать неподвижные точки на устойчивость.

(а) $x' = (1 - x)x ; \text{ (б)}$

$$x' = 1 - \sin 2x .$$

Контрольная работа №2

1. Исследовать систему на наличие/отсутствие периодических орбит. Фазовый портрет доказательством не является, а только подтверждением.

$$\begin{cases} x' = y \cos x \\ y' = \sin x \end{cases} .$$

2. Определить точки равновесия системы и найти индексы этих точек. Построить фазовый портрет.

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

3. Определить точки равновесия системы и найти индексы этих точек. Построить фазовый портрет.

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

Контрольная работа №3

1. В каждом из следующих уравнений найти бифуркационное значение, определить тип бифуркации и нарисовать бифуркационную диаграмму.

(а) $x' = \mu x^2 - 2\mu x + 3x$; (б) $x' = \frac{\mu x}{x^2 + 7} - x$

2. Исследовать систему с «неполным» параметром k . Нарисовать бифуркационные диаграммы уравнения $x' = x^2 - \mu x + k$ при $k \in \mathbb{R}, k = 0$. Изобразить на плоскости (μ, k) области, соответствующие различным типам фазовых портретов.

Контрольная работа №4

1. Для системы $\begin{cases} x' = -x + y(x+a) - b \\ y' = -cx(x+a) \end{cases}$, где a, b, c

положительные константы и $b > a$ на области

$$D = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid x < -a, y < \frac{x+b}{x+a} \right\}$$

доказать, что не существует периодических орбит, проходящих через некую точку области D .

2. Для системы $\begin{cases} x' = ax + yx \\ y' = bx^2 - cy \end{cases}$, где a, b, c положительные константы и $c > a$ на области

$$D = \{ X \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \}$$

доказать, что не существует периодических орбит, проходящих через некую точку области D .

3. Рассмотреть систему $\begin{cases} x' = y \\ y' = -(2b - g(x))ay - a^2x \end{cases}$,

$a, b > 0$, $g(x) = \begin{cases} 0, |x| > 1 \\ k, |x| \leq 1 \end{cases}$.

Показать, что при $k < 2b$ не существует, а при $k > 2b$ - существуют периодические орбиты.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся (изменить)

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1	Основные понятия и определения теории динамических систем.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Автономные динамические системы на прямой и на плоскости.	Выполнение домашних заданий
3	Устойчивость неподвижных точек нелинейных систем.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Консервативные и диссипативные системы.	Выполнение домашних заданий
5	Периодические орбиты.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Бифуркации.	Выполнение домашних заданий
7	Приложения.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Хаос.	Выполнение домашних заданий
9	Показатели Ляпунова.	Выполнение домашних заданий и контрольной работы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов: первый вопрос (В1) – теоретический, второй вопрос (В2) – задача. На подготовку к вопросу отводится не более 60 минут. По вопросам билета проводится собеседование, в ходе которого задаются дополнительные вопросы. Ответ на каждый вопрос оценивается по 100бальной шкале. Результирующая оценка рассчитывается по формуле $0,4 \cdot V1 + 0,6 \cdot V2$. При результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «неудовлетворительно»; от 61 до 75 – «удовлетворительно»; от 76 до 90 – «хорошо»; от 91 до 100 – «отлично».

Примеры экзаменационных задач

1. Дана система $X' = A \cdot X$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Найти:}$$

- (а) жорданову форму;
- (б) матрицу перехода М;
- (в) матрицу A_1 для системы

$X' = A_1 \cdot X$, получающейся из исходной

после ее поворота на угол $-\frac{\pi}{2}$.

2. Дана система
$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = xy - 1 \end{cases}$$
. Найти неподвижные точки и определить их тип.

3. Определить, как меняются главные направления (директрисы) седловой точки

$(0;0)$ нелинейной системы
$$\begin{cases} x' = -x + x^2 \\ y' = x + y \end{cases}$$
 по отношению к ее линеаризации.

4. Исследовать дифференциальное уравнение $x' = -x + \beta \tanh x$. Найти бифуркационное значение, построить диаграмму и определить тип бифуркации.

5. Исследовать систему
$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = \mu + x^2 - y \end{cases}$$
. Найти и определить тип бифуркации. Нарисовать бифуркационную диаграмму.

6. Построить фазовый портрет и определить тип бифуркации при $\mu = 0$ для

системы
$$\begin{cases} x' = \mu x - y + xy^2 \\ y' = x + \mu y - x^2 \end{cases}$$
.

7. Рассмотреть модель
$$\begin{cases} x' = x(x(1-x) - y) \\ y' = y(x - a) \end{cases}$$
, где $x \geq 0$, $y \geq 0$ - популяция жертв, $y \geq 0$ - популяция хищников и $a \geq 0$ - параметр. Найти и классифицировать неподвижные точки системы. Определить бифуркационное значение и тип бифуркации.

8. Определить бифуркационное значение и тип бифуркации для системы

$$\begin{cases} x' = \mu x + y + \sin x \\ y' = x - y \end{cases}$$

в начале координат. Построить фазовые портреты для значений μ в окрестности μ_0 .

9. Используя функцию Ляпунова, показать, что система

$$\begin{cases} x' = -x + 2y^3 - 2y^4 \\ y' = -x - y + xy \end{cases}$$
 не имеет предельных циклов.

10. Найти периодические решения системы

$$\begin{cases} x' = -x - y + x(x^2 + 2y^2) \\ y' = x - y + y(x^2 + 2y^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \mu(y - F(x)) \\ y' = -\frac{x}{\mu} \end{cases}, \text{ где}$$

11. Рассмотреть систему

$$F(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ -x, & |x| \leq 1, \\ x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Имеются ли у этой системы периодические решения? Построить фазовый портрет.

$$\begin{cases} x' = -4x + y^3 \\ y' = -3x - y + y^3 \end{cases}$$

12. Рассмотреть систему. Найти неподвижные точки и классифицировать их. Найти инвариантные линии. Построить фазовый портрет.

13. Для уравнения

$$x' = x - \mu x(1 - x)$$

- (а) найти неподвижные точки и их характер;
- (б) найти бифуркационное значение и тип бифуркации;
- (в) построить бифуркационную диаграмму.

14. Доказать наличие предельного цикла у системы

$$\begin{cases} x' = -\mu y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = \mu x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

и построить ее фазовый портрет.

15. Найти положительно инвариантное множество для системы

$$\begin{cases} x' = x(y^2 - x) \\ y' = -y(y^2 - x) \end{cases}$$

и построить ее фазовый портрет.

Примерные вопросы к экзамену

1. Локальные возмущения возле состояния равновесия: равновесие с квадратичным вырождением.
2. Скалярные автономные уравнения. Теорема существования и единственности.
3. Локальные возмущения возле состояния равновесия: гиперболическое равновесие.
4. Исследование нелинейных автономных систем на плоскости. Примеры.
5. Устойчивость неподвижных точек.
6. Локальные возмущения возле состояния равновесия: равновесие с кубическим вырождением.
7. «Реальные» фазовые портреты. Нахождение матрицы перехода и канонической формы.
8. Элементарные бифуркации: седло-узел.
9. Типы неподвижных точек. Канонические фазовые портреты.
10. Элементарные бифуркации: транскритическая.

11. Автономные системы уравнений на плоскости. Основные понятия и определения.
12. Элементарные бифуркации: вилка.
13. Пример качественного анализа (простое трехпараметрическое возмущение).
14. Явление гистерезиса.
15. Нелинейные системы на плоскости. Гиперболические и негиперболические неподвижные точки. Теорема о линеаризации.
16. Устойчивость неподвижных точек.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесённые с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-2: Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	<p>ОПК-2.1. Разрабатывает новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении</p> <p>ОПК-2.2. Анализирует новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении</p> <p>ОПК-2.3. Внедряет новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении</p>	Контрольная работа, экзамен.	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от
2	ПК-4: Способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств	<p>ПК-4.1. Понимает основы математических моделей реального объекта или процесса</p> <p>ПК-4.2. Готов применять моделирование для построения объектов и процессов, предсказания их свойств</p>	Контрольная работа, экзамен.	числа правильно выполненных заданий. Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых

				заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины
--	--	--	--	--

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

7.1 Основная литература:

1. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч.1 / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Чуа Леон ; перевод С. С. Пашкина [и др.]. — Москва, Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019. — 416 с. — ISBN 978-5-4344-0744-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/91959.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч.2 / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Чуа Леон ; перевод В. А. Осотова ; под редакцией Д. В. Тураева, А. Л. Шильникова. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 548 с. — ISBN 978-5-4344-0745-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/91960.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

7.2 Дополнительная литература:

1. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. — 4-е изд. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2019. — 368 с. — ISBN 978-5-4344-0779-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/92056.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Кузнецов, С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы : от математики к физике / С. П. Кузнецов. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. — 488 с. — ISBN 978-5-4344-0100-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

<http://www.iprbookshop.ru/28886.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Оболенский, А. Ю. Лекции по качественной теории дифференциальных уравнений / А. Ю. Оболенский. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 320 с. — ISBN 978-5-4344-0706-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/91945.html> (дата обращения: 30.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>

7.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

- Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: <https://icdlib.nspu.ru/>
- Национальная электронная библиотека. - URL: <https://rusneb.ru/>
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: <https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true>
- Orbit Intelligence. - URL: <https://www.orbit.com>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:
 - платформа для электронного обучения MicrosoftTeams;
 - Maple 16;

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с мультимедийным оборудованием для практических занятий по подгруппам.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Первалова

23.06.2021

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика

Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Форма обучения очная

Шармин В.Г. Дифференциальная геометрия. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль Вещественный, комплексный и функциональный анализ, форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Шармин В.Г., 2021.

1. Пояснительная записка

Целями освоения дисциплины "Дифференциальная геометрия " являются: формирование математической культуры студента, подготовка в области анализа геометрических объектов средствами математического анализа, овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

Задачи изучения дисциплины:

1. Формирование у студентов представлений о дифференциальной геометрии, как одной из важнейших математических дисциплин, имеющей свой предмет, задачи и методы.
2. Формирование у студентов знаний и умений, необходимых для освоения и использования методов дифференциальной геометрии при решении теоретических и прикладных задач.
3. Формирование у студентов знаний и умений, необходимых для дальнейшего самообразования в области современной математики.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в блок Б1 Дисциплины (модули), обязательная часть.

Для ее успешного изучения достаточно знаний и умений, приобретенных при изучении курсов аналитической геометрии, математического анализа, алгебры и дифференциальных уравнений в первом-третьем семестрах.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Код и наименование части компетенции (при наличии паспорта компетенций)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
Выпускник способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности. (ОПК-1)	-	Знает: основные понятия и утверждения, а также методы доказательства стандартных утверждений в дифференциальной геометрии
		Умеет: использовать аппарат дифференциальной геометрии для решения геометрических задач, а также задач механики и физики; доказывать основные формулы дифференциальной геометрии на плоскости и в пространстве и применять их при решении практических задач; формулировать результат, доказывать результат, видеть следствия полученного результата; представлять публично полученные результаты.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре
			4 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		30	30
Практические занятия		34	34
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф. зачет, экзамен)			экзамен

3. Система оценивания

Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках модульно-рейтинговой (100-балльной) и традиционной (4-балльной) систем оценок.

Оценивание достижений обучающихся в течение семестра осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы. Баллы начисляются студентам следующим образом:

- решение задач и/или выполнение тестовых заданий на практическом занятии и домашняя работа – 3 балла (всего 14 работ, первое практическое занятие – 1 балл);
- контрольные работы – 30 баллов – Кр №1, 30 баллов – Кр №2.

Экзаменационная оценка студента в рамках-модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время практических занятий, домашних заданий, контрольных работ и/или выполнения тестовых заданий. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины:

61 - 76 баллов - удовлетворительно;

77 - 90 баллов - хорошо;

91 -100 баллов - отлично.

Студент, у которого сумма набранных баллов, оказалась меньше 61, должен сдать экзамен.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.		
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)	Консультации и иная

			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	контактная работа
1	2	3	4	5		6
4 семестр						
1.	Геометрия кривых в евклидовом пространстве	42	10	12	0	0
2.	Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве.	58	10	14	0	0
3.	Внутренняя геометрия поверхностей	42	10	8	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

1. Геометрия кривых в евклидовом пространстве.

Определение векторной функции одного и нескольких скалярных аргументов. Годограф. Предел векторной функции. Непрерывность и дифференцируемость. Разложение векторной функции в ряд Тейлора. Понятие кривой. Способы задания кривой. Касательная прямая. Естественный параметр. Треугольник Френе. Кривизна кривой. Кручение кривой. Формулы Френе. Натуральные уравнения.

2. Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве.

Определение поверхности. Способы задания поверхностей. Кривые на поверхности. Координатные линии. Касательная плоскость. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности. Угол между кривыми на поверхности. Площадь области на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна кривой на поверхности. Соприкасающийся параболоид поверхности. Главные направления и главные нормальные кривизны. Тип точки на поверхности. Теорема Эйлера. Экстремальные свойства главных направлений. Отыскание главных направлений и главных нормальных кривизн. Гауссова и средняя кривизна поверхности. Асимптотические линии и линии кривизны поверхности.

3. Внутренняя геометрия поверхностей.

Изометричные поверхности. Внутренняя геометрия поверхности. Девриационные формулы. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии. Полугеодезическая система координат на поверхности. Формула Гаусса-Бонне (без доказательства) и ее следствия.

Средства для проведения текущего контроля

Примеры тестовых заданий.

1. Касательная к параболе $y = x^2$ образует угол 45° в точке _____.
2. Угол, под которым пересекаются кривые $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$, равен _____.
3. Длина линии $y = \operatorname{In} \cos x$ между точками $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$ равна _____.

4. Сумма координат единичного вектора главной нормали к кривой $x = e^t, y = e^{-t}, z = t$ в $t = 1$ точке равна _____.
5. Касательная плоскость, параллельная к плоскости _____ для кривой $x = e^t, y = e^{-t}, z = t$ имеет уравнение _____.
6. Кривизна окружности $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$ равна _____.
7. Произведение внутренних координат точки поверхности $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$, имеющей внешние координаты $(3, 5, 7)$, равно _____.
8. Нормаль поверхности $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$ в точке $(3, 5, 7)$ пересекает плоскость $ХОУ$ в точке _____.
9. Установить соответствие:

	Тип точек		Поверхность, целиком состоит из указанного типа точек
1	Параболические	А	Сфера
2	Эллиптические	В	Тор
3	Гиперболические	С	Гиперболический цилиндр
		D	Псевдосфера

Контрольные работы.

Контрольная работа № 1.

1. Найти трехгранник Френе, кривизну и кручение кривой.
2. Составить уравнения ребер и граней трехгранника Френе в заданной точке.
3. Найти касательные прямые, параллельные осям координат.
4. Найти нормальные плоскости, перпендикулярные осям координат.

Контрольная работа № 2.

1. Найти уравнение касательной плоскости, первую и вторую квадратичные формы, гауссову и среднюю кривизну.
2. Найти линии кривизны и асимптотические линии заданной поверхности.
3. Вычислить символы Кристоффеля заданной поверхности.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№ темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Геометрия кривых в евклидовом пространстве	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.
2	Геометрия поверхностей в евклидовом пространстве.	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной

		литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.
3	Внутренняя геометрия поверхностей	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, самостоятельное изучение части теоретического материала, выполнение домашних заданий.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзаменационная оценка студента в рамках модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время практических занятий, домашних заданий, контрольных работ и/или выполнения тестовых заданий. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины:

61 - 76 баллов - удовлетворительно;

77 - 90 баллов - хорошо;

91 -100 баллов - отлично.

Студент, у которого сумма набранных баллов, оказалась меньше 61, должен сдать экзамен.

Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студента на теоретические вопросы, перечень которых представлен в разделе ниже, решения задач, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в типовых вариантах контрольных работ и/или выполнения тестовых заданий. Эта оценка характеризует уровень знаний, умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.

Примечание. Студент, желающий исправить экзаменационную оценку, полученную в рамках модульно-рейтинговой системы, имеет право на сдачу экзамена.

Вопросы к экзамену

1. Кривизна кривой.
2. Кручение кривой.
3. Формулы Френе. Натуральные уравнения.
4. Кривые на гладкой поверхности.
5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
6. Длина дуги кривой на регулярной поверхности.
7. Угол между линиями на поверхности.
8. Теорема Менье.
9. Соприкасающийся параболоид.
10. Главные кривизны и главные направления. Свойства.
11. Вычисление главных кривизн и главных направлений.
12. Линии кривизны поверхности.
13. Асимптотические линии поверхности.
14. Деривационные формулы.
15. Кривизна кривой на поверхности.
16. Внутренняя геометрия поверхности. Факты внутренней геометрии.

17. Полугеодезическая система координат. Свойства. Примеры.

18. Геодезическая линия. Свойства. Примеры.

19. Формула Гаусса-Бонне (без доказательства) и ее следствия.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 4

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1	Выпускник способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности. (ОПК-1)	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Задания для аудиторной и домашней работы	Наличие конспекта практических занятий
			Тестовые задания	Оценка (в баллах) выставляется пропорционально количеству правильно выполненных тестовых заданий
			Контрольные работы	Оценка (в баллах) выставляется пропорционально количеству правильно решенных задач с учетом коэффициента сложности каждой задачи.
			Экзаменационные билеты	Экзаменационный билет состоит из двух теоретических заданий и решения задач и/или выполнения тестовых заданий. Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и

				промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ».
--	--	--	--	---

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература:

1. Мищенко, А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 304 с. (Классический университетский учебник) ISBN 5-9221-0442-X. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544615> (дата обращения: 28.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Розендорн, Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Э. Р. Розендорн. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 144 с. - ISBN 978-5-9221-0821-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544679> (дата обращения: 28.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Малаховский, В. С. Краткий курс дифференциальной геометрии : учебное пособие / В. С. Малаховский. — Калининград : Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, 2010. — 111 с. — ISBN 978-5-9971-0054-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/23813.html> (дата обращения: 28.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

7.3. Интернет-ресурсы:

1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам <http://window.edu.ru/>.
2. Официальный сайт Министерства образования и науки Российской Федерации <http://минобрнауки.рф/>.
3. Российский общеобразовательный портал <http://www.school.edu.ru/>.
4. Федеральный портал «Российское образование»: <http://www.edu.ru/>.
5. Федеральное хранилище «Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов»: <http://school-collection.edu.ru/>.
6. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU: <http://elibrary.ru/>.
7. <http://www.wolframalpha.com/>.
8. www.math.ru - сайт посвящён Математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой.
9. www.exponenta.ru - образовательный математический сайт.
10. www.matematicus.ru - учебный материал по различным математическим курсам.
11. www.geometry.ru – материалы по элементарной геометрии.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. ProQuest Dissertations & Theses Global / ФГБУ «Государственная публичная научно-техническая библиотека России». URL: <https://search.proquest.com/index>
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю):

– Лицензионное ПО:

платформа для электронного обучения Microsoft Teams

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и аудитория для практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Первалова

23.06.2021

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика

Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Форма обучения очная

Мачулис В.В. Дифференциальные уравнения. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 – Математика, Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ, форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Мачулис В.В., 2021.

1. Пояснительная записка

Целью изучения дисциплины является знакомство с методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений, умение проводить качественный и количественный анализ математической модели, описываемой дифференциальными уравнениями.

Дифференциальные уравнение очень широко используются в научных исследованиях и инженерных расчётах, поэтому данная дисциплина является наиважнейшей в математическом образовании студентов.

Задачи учебного курса:

- 1) овладение методами решения основных типов дифференциальных уравнений и их систем;
- 2) овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в блок Б1 Дисциплины (модули), обязательная часть.

Для успешного освоения дисциплины необходимы знания и умения, приобретённые в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра».

Освоение дисциплины «Дифференциальные уравнения» необходимо при последующем изучении дисциплин «Уравнения в частных производных», «Дифференциальная геометрия», «Численные методы» и ряда других.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОПК-1: способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Знает: основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, методы решения этих уравнений, области применения уравнений в математическом моделировании практических задач. Умеет: решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальных уравнений; применять полученные знания для анализа поведения решений дифференциального уравнения, исследования устойчивости решений.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре	
			3 семестр	4 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	8	4	4
	час	288	144	144
Из них:				
Часы контактной работы (всего):		132	66	66
Лекции		60	30	30
Практические занятия		68	34	34
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0	0
Консультации и иная контактная работа		4	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		156	78	78
Вид промежуточной аттестации			Зачет	Экзамен

3. Система оценивания

Оценивание достижений обучающихся в течение семестров осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы. Баллы начисляются студентам следующим образом:

1. решение задач на практическом занятии и домашняя работа – от 3-х до 8-ми баллов в зависимости от занятия;
2. контрольная работа – 8 баллов.

В контрольную работу включаются типы задач, рассмотренных на практических занятиях.

Студенты, получившие по итогам работы в семестре не менее 61 балла, получают зачет по дисциплине автоматически. Студенты, не получившие зачет по дисциплине автоматически, должны сдавать зачет (3 семестр). Зачет проводится в форме тестирования.

Экзамен (4 семестр) проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов: первый вопрос (В1) – теоретический, второй вопрос (В2) – задача. На подготовку к вопросу отводится не более 60 минут. По вопросам билета проводится собеседование, в ходе которого задаются дополнительные вопросы. Ответ на каждый вопрос оценивается по 100бальной шкале. Результирующая оценка рассчитывается по формуле $0,4 \cdot V1 + 0,6 \cdot V2$. При результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «неудовлетворительно»; от 61 до 75 – «удовлетворительно»; от 76 до 90 – «хорошо»; от 91 до 100 – «отлично».

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
3 семестр						
1	Введение в предмет. Простейшие методы интегрирования уравнений первого порядка.	34	6	8	0	
2	Теорема существования и единственности решения начальной задачи.	36	8	8	0	0
3	Уравнения, не разрешённые относительно производной.	36	8	8	0	0
4	Уравнения высших порядков.	36	8	10	0	0
	Зачет	2	0	0	0	2
	Итого за 3 семестр	144	30	34	0	2
4 семестр						
5	Некоторые приложения дифференциальных уравнений высших порядков.	34	6	8	0	0
6	Общая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений..	36	8	8	0	0
7	Основы теории устойчивости.	36	8	8	0	0
8	Фазовое пространство и фазовые портреты.	36	8	10	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого за 4 семестр	144	30	34	0	2
	Итого (часов)	288	60	64	0	4

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Введение в предмет. Простейшие методы интегрирования уравнений первого порядка. Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные понятия. Геометрическое представление решений. Поле направлений, интегральные кривые, изоклины. Методы интегрирования уравнений первого порядка. Некоторые численные методы решения начальной задачи для уравнений первого порядка.

Тема 2. Теорема существования и единственности решения начальной задачи. Теорема существования и единственности решения начальной задачи для уравнения, разрешённого относительно производной. Непрерывная зависимость решений от начальных данных и малых возмущений.

Тема 3. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Уравнения, не разрешённые относительно производной, методы их решения. Уравнение Лагранжа (и Клеро), особые решения, огибающая.

Тема 4. Уравнения высших порядков. Задачи, приводящие к уравнениям высших порядков. Линейные уравнения высших порядков. Определитель Вронского, формула Остроградского-Лиувилля. Уравнения Коши-Эйлера.

Тема 5. Некоторые приложения дифференциальных уравнений высших порядков. Простые гармонические колебания, затухающие колебания, движение под действием возмущающей силы. Понятие о краевой задаче. Функция Грина.

Тема 6. Общая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод неопределённых коэффициентов и метод вариации параметров. Матричная экспонента.

Тема 7. Основы теории устойчивости. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Орбитальная устойчивость, устойчивость по Лагранжу. Критерий устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами. Устойчивость нелинейных систем. Функция Ляпунова.

Тема 8. Фазовое пространство и фазовые портреты. Фазовое пространство и фазовый портрет системы дифференциальных уравнений. Классификация линейных неподвижных точек. Сепаратрисы. Предельный цикл. Отображение Пуанкаре. Мультипликаторы, теорема Флоке.

4.3. Средства для проведения текущего контроля

Примерные задания для контрольных работ

Решить уравнение

$$x^2 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$$

Решить задачу Коши

$$2xy' - 3y = 9x^3, \quad y(1) = 3$$

3. Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = x - y$$

4. Найти интегрирующий множитель и решить уравнение

$$x^2 y' = xy - 2x^2 y^2$$

5. Решить задачу Коши

$$xy' + y = xy^2, \quad y(0) = 0$$

6. Решить уравнение методом вариации

$$y'' + 2y = 2 - 4x^2 \sin x^2$$

7. Решить граничную задачу

$$y'' - y = 2 \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

8. Найти два независимых интеграла для системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

9. Решить систему любым разумным способом

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + y \\ \dot{y} = -16x - 2y \end{cases}.$$

10. По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x)$ найти $A(x)$ линейной системы $y'(x) = A(x)y(x)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

11. Решить уравнение

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - 5xy' - 3y = x(-8 \ln x - 60).$$

12. Решить системы:

$$(a) \quad \begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = 5y - 2z \end{cases}; \quad (b) \quad \begin{cases} y' = 3y - z + x \\ z' = 13y - 3z - \sin x \end{cases}; \quad (в)$$

$$\begin{cases} x' = x - 2y + z \\ y' = 2x - 3y \\ z' = y + 2z \end{cases}.$$

13. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 5 \cos t \end{cases}, \text{ если } \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

14. Построить однородное уравнение, имеющее следующую фундаментальную систему

$$\text{решений } y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2.$$

15. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \quad y(0) = -1$$

16. Исследовать устойчивость тривиального решения и нарисовать фазовый портрет канонической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = -17x - 5y \end{cases}$$

17. Найти все неподвижные точки нелинейной системы и определить тип устойчивости каждой, если это возможно

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - xy \\ \dot{y} = 2x^2 - y \end{cases}$$

18. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y''' + y'' + y' + 2y = 0$$

19. При каких значениях параметров тривиальное решение уравнения

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0$$

асимптотически устойчиво?

20. С помощью функции Ляпунова вида
нулевое решение системы

$$V(x, y) = ax^2 + by^2 \quad \text{исследовать}$$

$$\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = -xy - y^3 \end{cases}$$

на устойчивость.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся (изменить)

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1	Введение в предмет. Простейшие методы интегрирования уравнений первого порядка.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Теорема существования и единственности решения начальной задачи.	Выполнение домашних заданий
3	Уравнения, не разрешённые относительно производной.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Уравнения высших порядков.	Выполнение домашних заданий
5	Некоторые приложения дифференциальных уравнений высших порядков.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Общая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.	Выполнение домашних заданий
7	Основы теории устойчивости.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Фазовое пространство и фазовые портреты.	Выполнение домашних заданий

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Оценивание достижений обучающихся в течение семестра осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы. Баллы начисляются студентам следующим образом:

- решение задач на практическом занятии и домашняя работа – от 3-х до 8-ми баллов в зависимости от занятия;
- контрольная работа – 8 баллов.

В контрольные работы включаются типы задач, рассмотренных на практических занятиях.

Оценка студенту выставляется пропорционально числу правильно решённых в контрольной работе задач.

Оценка снижается на 3 балла при условии:

- Студент допустил одну грубую ошибку в конкретной задаче;
- Студент допустил два недочёта в конкретной задаче.

При наличии двух грубых ошибок в одной задаче задача считается нерешённой. Ошибки и недочёты одного типа группируются и считаются за одну ошибку или недочёт.

3 семестр

Студенты, получившие по итогам работы в семестре не менее 61 балла, получают зачет по дисциплине автоматически. Студенты, не получившие зачёт по дисциплине автоматически, должны сдавать зачёт.

Зачёт проводится в форме тестирования. Вопросы для подготовки к зачёту и примерный вариант тестовых заданий представлены ниже.

4 семестр

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов: первый вопрос (В1) – теоретический, второй вопрос (В2) – задача. На подготовку к вопросу отводится не более 60 минут. По вопросам билета проводится собеседование, в ходе которого задаются дополнительные вопросы. Ответ на каждый вопрос оценивается по 100балльной шкале. Результирующая оценка рассчитывается по формуле $0,4*В1+0,6*В2$. При результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «неудовлетворительно»; от 61 до 75 – «удовлетворительно»; от 76 до 90 – «хорошо»; от 91 до 100 – «отлично».

Вопросы к зачёту

1. Понятие о дифференциальном уравнении первого порядка. Общее решение и общий интеграл. Задача Коши. Частное решение.
2. Линейное уравнение первого порядка. Метод интегрирующего множителя.
3. Линейное уравнение первого порядка. Метод Бернулли.
4. Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной.
5. Теоремы об общем решении (начиная с Теоремы 1.4.1) и решении задачи Коши для линейного уравнения. Следствия и примеры.
6. Локальное существование решения и единственность решения (Теорема 2.2.1, Лемма 2.2.4, Предложение 2.2.5, Теорема 2.2.8).
7. Глобальное существование решения и глобальная единственность (Теорема 2.2.10 и Следствия).
8. Уравнение с разделяющимися переменными.
9. Уравнение в полных дифференциалах. Два метода решения.
10. Интегрирующий множитель. Два критерия.
11. Однородные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним.
12. Уравнение Бернулли.
13. Особое решение. Дискриминантная кривая. Нахождение особого решения.

14. Уравнение Клеро.

Тестовые задания

Решить уравнения

1.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4-7x)(2y-3)}{(x-1)(2x-5)} ;$$

2.
$$3tdt + (t-4y)dy = 0 ;$$

3.
$$(2y-t)dt + (4y^2 - 2ty)dy = 0 ;$$

4.
$$y' + y = 5 ;$$

5.
$$y' + ty = t ;$$

6.
$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = y^2 ;$$

7.
$$\frac{dy}{dt} = y + ty^3 ;$$

8.
$$\frac{dy}{dt} = -y + e^t y^{-2} ;$$

Найти общее решение и особые решения, если они есть

9.
$$y = ty' + 3y'^4 ;$$

10.
$$y - ty' = 2y^2 \ln t ;$$

11.
$$y - 2ty' = -2y'^3 ;$$

12.
$$y - 2ty' = -4y'^2 ;$$

Решить начальные задачи

13.
$$(2x - y - 2)dx + (2y - x)dy = 0, \quad y(0) = 1 ;$$

14.
$$\cos(t - y)dt + (1 - \cos(t - y))dy = 0, \quad y(\pi) = \pi ;$$

Гарантирует ли теорема существования и единственности единственность решения?

15.
$$\frac{dy}{dt} = ty^3, \quad y(0) = 0 ;$$

16.
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t-2}, \quad y(2) = 0 ;$$

Найти общие решения уравнений

17. $y'' - 4y' = -3\sin t$;

18. $y'' = 9y + \frac{1}{1 + e^{3t}}$;

19. $y'' - 3y' + 2y = -4e^{-2t}$;

20. $y'' + 9y' + 20y = -2te^t$;

21. $y''' + 3y'' - 9y' + 5y = e^t$;

22. $y''' - 12y' - 16y = e^{4t} - e^{-2t}$;

Решить задачи Коши

23. $y'' - 4y = t, y(0) = 2, y'(0) = 0$;

24.

$y'' + 3y' - 4y = e^t, y(0) = 0, y'(0) = 4$.

25. $y'' + y = \cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0$;

Решить уравнения методом вариации параметров

26. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2t$;

27. $y'' + y = \frac{1}{\sin t}$;

28. $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4t}}{t^3}$;

29. $y'' - 2y' + y = e^t \ln t$;

30. $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4t}}{t}$.

Вопросы к экзамену

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Начальные понятия.
2. Построение ФС однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.
3. Уравнения первого порядка. Основные понятия.
4. Простейшие методы интегрирования систем.
5. Уравнения с разделяющимися переменными.
6. Неоднородные линейные уравнения.
7. Однородные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним.
8. Матричный метод решения систем. Характеристические числа.
9. Линейные уравнения первого порядка (метод вариации).
10. Системы дифференциальных уравнений. Общие определения.
11. Линейные уравнения первого порядка (метод Бернулли).

12. Матричный метод решения систем. Элементарные делители.
13. Уравнения в полных дифференциалах.
14. Системы линейных дифференциальных уравнений (теорема 1 и теорема 2).
15. Интегрирующий множитель и особые решения.
16. Системы линейных дифференциальных уравнений (теоремы 3, 4, 5).
17. Уравнения с интегрирующим множителем.
18. Системы линейных дифференциальных уравнений (теорема 6 и теорема 7).
19. Принцип сжимающих отображений.
20. Нахождение решения систем матричным методом (первый способ).
21. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
22. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
23. Особые точки и особые решения.
24. Нахождение решения систем матричным методом (второй способ).
25. Уравнения, не разрешённые относительно производной (все случаи).
26. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
27. Уравнение Лагранжа и уравнение Клеро.
28. Нахождение решения системы матричным методом (первый способ).
29. Однородные уравнения первого порядка.
30. Понятие устойчивости по Пуанкаре.
31. Общий метод введения параметра.
32. Понятие устойчивости по Лагранжу.
33. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
34. Устойчивость по первому приближению.
35. Уравнения высших порядков. Начальные понятия.
36. Функция Ляпунова.
37. Некоторые способы понижения порядка дифференциальных уравнений.
38. Приложения дифференциальных уравнений к расчёту электрических цепей.
39. Общие свойства линейных уравнений n – го порядка.
40. Гармонические колебания.
41. Однородные уравнения n – го порядка.
42. Колебания с диссипацией.
43. Линейная независимость системы функций (теорема 1).
44. Колебания с внешним воздействием.
45. Линейная независимость системы функций (теорема 2).
46. Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.
47. Формула Остроградского–Лиувилля.
48. Устойчивость тривиальных решений автономных систем.
49. Фундаментальная система и общее решение.
50. Фундаментальная система (основная теорема).
51. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена

6.2 Критерии оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесённые с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Контрольные работы, коллоквиум, зачёт, экзамен..	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

7.1. Основная литература

1. Жукова Г.С. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Изд-во Инфра-М, 2021: <https://znanium.com/catalog/document?id=361218> (дата обращения: 01.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

2. Коган Е.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд-во Инфра-М, 2020 <https://znanium.com/catalog/document?id=357263> (дата обращения: 01.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература

1. Осадчий Ю.М. Дифференциальные уравнения. Изд-во Инфра-М, 2019. <https://znanium.com/catalog/document?id=344075> (дата обращения: 01.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

2. Пантелеева А.В. и др. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс. Изд-во Логос., 2020. <https://znanium.com/catalog/document?id=367482> (дата обращения: 01.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

3. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple. Изд-во Солон-Пресс., 2016. <https://znanium.com/catalog/document?id=82351> (дата обращения: 01.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>

2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>

7.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

- Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: <https://icdlib.nspu.ru/>
- Национальная электронная библиотека. - URL: <https://rusneb.ru/>
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: <https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true>
- Orbit Intelligence. - URL: <https://www.orbit.com>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- **Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:**
платформа для электронного обучения Microsoft Teams;
Maple 16;
Matlab R2012a.

9. **Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины**
Аудитория с мультимедийным оборудованием для практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Шалагинов С. Д. Комплексный анализ. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Шалагинов С.Д., 2021.

1. Пояснительная записка

Целями освоения дисциплины «Комплексный анализ» являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области комплексного анализа;
- 2) овладение аналитическими методами теории функций комплексного переменного
- 3) овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в научных исследованиях и приложениях.

Задачами освоения дисциплины «Комплексный анализ» являются:

- 1) Обеспечение усвоения студентами данной дисциплины;
- 2) создание базы для изучения завершающих разделов курса и специальных дисциплин;
- 3) формирование способностей будущих специалистов-математиков к ведению исследовательской работы и решению практических задач.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Знать: – типичные постановки задач; – основные результаты в области комплексного анализа. Уметь: – ставить и решать задачи.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре	
			5 семестр	6 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	8	4	4
	час	288	144	144
Из них:				
Часы контактной работы (всего):		132	66	66
Лекции		60	30	30
Практические занятия		68	34	34
Лабораторные/практические занятия по подгруппам		0	0	0

Консультации и иная контактная работа	4	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	156	78	78
Вид промежуточной аттестации		Экзамен	Экзамен

3. Система оценивания

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

Для текущего контроля применяются контрольные работы. Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" за две контрольные работы, то он получает оценку "отлично" без сдачи экзамена. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за другую "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдавать экзамен (без сохранения оценки).

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
5 семестр						
1	Комплексные числа.	22	4	4	0	0
2	Функции комплексного переменного.	24	4	6	0	0
3	Голоморфные функции.	24	4	6	0	0
4	Отображения с помощью элементарных функций.	24	6	6	0	0
5	Комплексное интегрирование.	24	6	6	0	0

6	Голоморфные функции и ряды.	24	6	6	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов) за 5 семестр	144	30	34	0	2
6 семестр						
7	Ряды Лорана.	22	4	4		
8	Особые точки голоморфной функции.	24	4	6		
9	Элементы теории вычетов.	24	4	6		
10	Приложения теории вычетов.	24	6	6		
11	Основные принципы теории конформных отображений.	24	6	6		
12	Построение конформных отображений.	24	6	6		
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов) за 6 семестр	144	30	34	0	2
	Итого (часов)	288	60	68	0	4

4.2. Содержание дисциплины по темам

1. Комплексные числа: комплексные числа и действия над ними, топология комплексной плоскости, числовые последовательности и их пределы, числовые ряды; стереографическая проекция, ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость.
2. Функции комплексного переменного: предел и непрерывность функции комплексного переменного, пути и кривые, функциональные ряды, элементарные функции комплексного переменного.
3. Голоморфные функции: моногенность, голоморфность, геометрический смысл голоморфной функции, конформное отображение.
4. Отображения с помощью элементарных функций: дробно-линейная функция, степенная и экспоненциальная функции и обратные к ним, римановы поверхности.
5. интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши, интеграл типа Коши, теорема Морера.
6. Голоморфные функции и ряды: ряды Тейлора, неравенства Коши для коэффициентов, теорема Абеля, формула Коши-Адамара.
7. Теоремы Вейерштрасса, принцип единственности и принцип максимума модуля.
8. Ряды Лорана, теорема единственности, неравенства Коши для коэффициентов.
9. Особые точки голоморфной функции: изолированные особые точки однозначного характера и их классификация, связь с рядами Лорана.

10. Элементы теории вычетов: теоремы о вычетах, вычисление вычетов, принцип аргумента, теорема Руше, вычисление определенных интегралов.
11. Основные принципы теории конформных отображений: условия однолиственности, принцип сохранения области, принцип взаимно однозначного соответствия, понятие о теореме Римана, аналитическое продолжение, принцип непрерывности, принцип симметрии, принцип Шварца.
12. Построение конформных отображений односвязных областей.

Планы практических занятий

1. **Комплексные числа:** комплексные числа и действия над ними, числовые последовательности и их пределы, числовые ряды.
2. **Функции комплексного переменного:** предел и непрерывность функции комплексного переменного, пути и кривые, функциональные ряды, элементарные функции комплексного переменного.
3. **Голоморфные функции:** геометрический смысл голоморфной функции, конформное отображение.
4. **Отображения с помощью элементарных функций:** дробно-линейная функция, степенная и экспоненциальная функции и обратные к ним.
5. **Комплексное интегрирование:** интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши, интеграл типа Коши.
6. **Голоморфные функции и ряды:** ряды Тейлора, неравенства Коши для коэффициентов, теорема Абеля, формула Коши-Адамара.
7. **Ряды Лорана:** разложение функций в ряд Лорана.
8. **Особые точки голоморфной функции:** изолированные особые точки однозначного характера и их классификация, связь с рядами Лорана.
9. **Элементы теории вычетов:** вычисление вычетов.
10. **Приложения теории вычетов:** теорема Руше, вычисление определенных интегралов.
11. **Основные принципы теории конформных отображений:** условия однолиственности, принцип сохранения области, принцип взаимно однозначного соответствия, принцип непрерывности, принцип симметрии, принцип Шварца.
12. **Построение конформных отображений:** построение конформных отображений односвязных областей.

Образцы средств для проведения текущего контроля

Для текущего контроля используются контрольные работы.

5 семестр

Контрольная работа №1

1. Найти все значения корня. Отметить точки на комплексной плоскости, соответствующие значениям корня $\sqrt[3]{-8i}$.
2. Представить в алгебраической форме $\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.
3. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой части $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$

$$v = e^x (y \cos \cos y + x \sin \sin y), f(0) = 0.$$

4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой

$$\int_{AB} \frac{z^{-2}}{z} dz; AB: \left\{ y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i \right\}.$$

Контрольная работа №2

1. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{(e^{2z^2}-1)dz}{z^3}.$$

2. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{in\pi}}{n^4+1}.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(z-2-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n (z-2-i)^n}{n^2+1}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $z = i$
 $\cos \cos z + \cos \cos iz$.

6 семестр

Контрольная работа №3

1. Разложить функцию в ряд Лорана по степеням z

$$\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}.$$

2. Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0

$$3z^2 \cos \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2.$$

3. Вычислить интеграл при помощи вычетов

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^4-4z^3+z^2-4z}.$$

4. Вычислить интеграл

$$\int_{|z+i|=3} \left(\frac{4 \sin \sin \frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} + \frac{\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}+i}} \right) dz.$$

5. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \cos x dx}{(2 \cos \cos x + 5)^2}.$$

Контрольная работа №4

1. Найти конечные особые точки функции и определить их тип. Найти вычеты в изолированных особых точках

$$\frac{\sin \sin z}{z(e^z - e^{z+2})}.$$

2. Найти образ кривой при отображении $w = f(z)$

$$\gamma: |z+1| = 1, w = \frac{1}{z+1} - 1.$$

3. Найти образ области D при отображении линейной функцией $w = az + b$

$$D: |z| > 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < 0; \quad w = 3iz - i - 2.$$

4. Найти образ области D при отображении $w = f(z)$

$$D: 1 < |z| < 2, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}; \quad w = z^3 + 2i.$$

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ темы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Комплексные числа.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2.	Функции комплексного переменного.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
3	Голоморфные функции.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Отображения с помощью элементарных функций.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
5	Комплексное интегрирование.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Голоморфные функции и ряды.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
7	Ряды Лорана.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Особые точки голоморфной функции.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
9	Элементы теории вычетов.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
10	Приложения теории вычетов.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
11	Основные принципы теории конформных отображений.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
12	Построение конформных отображений.	Чтение обязательной и дополнительной литературы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма промежуточной аттестации – экзамен (5, 6 семестр). Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи.

Вопросы к экзамену

5 семестр

1. Числовые последовательности и их пределы.
2. Числовые ряды.
3. Множества на плоскости. Области и кривые.
4. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
5. Дифференцируемость по комплексному переменному. Уравнения Коши-Римана.
6. Голоморфная функция. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
7. Целая линейная и дробно-линейная функции и их свойства.
8. Экспонента и степень с натуральным показателем.
9. Функция Жуковского.
10. Тригонометрические и гиперболические функции.
11. Интеграл по комплексному переменному, его свойства и вычисление.
12. Первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница.
13. Интегральная теорема Коши.
14. Интегральная формула Коши.
15. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции, формулы Коши для производных, теорема Морера.
16. Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
17. Степенные ряды, теорема Абеля, формула Коши-Адамара.
18. Теорема Тейлора, неравенства Коши для коэффициентов.
19. Нули голоморфной функции, их порядок.
20. Принцип единственности голоморфной функции.
21. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.

6 семестр

22. Теорема Лорана, неравенства для коэффициентов.
23. Изолированные особые точки однозначного характера, связь с разложением в ряд Лорана.
24. Теорема Коши о вычетах, вычисление вычетов.
25. Логарифмический вычет. Принцип аргумента.
26. Основная теорема алгебры многочленов.
27. Теорема Руше.
28. Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов.
29. Необходимое условие однолиственности голоморфной функции.
30. Достаточное условие локальной однолиственности.
31. Принцип сохранения области.
32. Принцип взаимно однозначного соответствия.
33. Понятие о теореме Римана.
34. Соответствие границ при конформном отображении.
35. Аналитическое продолжение. Теорема о монодромии.
36. Принцип непрерывности.
37. Принцип симметрии Римана-Шварца.
38. Принцип Шварца.
39. Интеграл Кристоффеля-Шварца.

Задачи для подготовки к экзаменам

5 семестр

1. Найти все значения корня. Отметить точки на комплексной плоскости, соответствующие значениям корня

2. Представить в алгебраической форме $\sqrt[4]{-16i}$.
3. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой части $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$

$$u = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0.$$

4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой

$$\int_L (z + 1)e^z dz; \quad L: \{|z| = 1, z \geq 0\}.$$

5. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=1} \frac{(z-1)dz}{z^4}.$$

6. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + i^{2n}}{(4+i)^n}.$$

7. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}(\sqrt{3}+i)^n}{(z-i)^n}.$$

8. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $z = i$
- $$\sin \sin z + \sin \sin iz.$$

6 семестр

9. Разложить функцию в ряд Лорана по степеням z

$$\frac{z-2}{2z^3+z^2-z}.$$

10. Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0

$$z^2 \sin \sin \frac{1}{z-3}, \quad z_0 = 3.$$

11. Найти конечные особые точки функции и определить их тип. Найти вычеты в изолированных особых точках

$$\frac{z^3-1}{z(e^z-e)}.$$

12. Вычислить интеграл при помощи вычетов

$$\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2+4)}.$$

13. Вычислить интеграл

$$\int_{|z+6|=2} \left(ze^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2\cos \frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)} \right) dz.$$

14. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \sin 2x dx}{2 - \sin \sin 2x}.$$

15. Найти образ кривой при отображении $w = f(z)$

$$: |z| = 5, \quad w = \frac{i}{z} + 2.$$

16. Найти образ области D при отображении линейной функцией $w = az + b$

$$: |z| < 4, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}; \quad w = (\sqrt{3} + i)z + i.$$

17. Найти образ области D при отображении $w = f(z)$

$$D: 2 < |z| < 3, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{6}; \quad w = z^3 - 1 - i.$$

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Вопросы к экзамену	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного : учебник / Е. С. Половинкин. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 254 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-013608-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1125614> (дата обращения: 05.05.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Пантелеев, А. В. Математический анализ : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Н. И. Савостьянова, Н. М. Федорова. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 502 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-016008-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1077332> (дата обращения: 05.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Абрамян, М. Э. Лекции по дифференциальному исчислению функций одной переменной : учебник / М. Э. Абрамян : Южный федеральный университет. - Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020. - 228 с. - ISBN 978-5-9275-3495-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1308345> (дата обращения: 05.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Первалова

23.06.2021

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Рабочая программа дисциплины

для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика»

Профиль: «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Форма обучения очная

Бутакова Н.Н. Математическая статистика. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль: «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Бутакова Н.Н., 2021.

1. Пояснительная записка

Цель курса «Математическая статистика»: основ современной математической статистики с акцентом на строгое теоретическое обоснование основных положений разделов курса.

Основные задачи дисциплины состоят в создании достаточной теоретической базы; в выработке практических навыков решения задач; воспитании у студентов культуры мышления и доказательства математических утверждений; развитии математической культуры и интуиции; выработке навыков самостоятельного статистического исследования, правильной интерпретации статистических выводов.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математическая статистика» входит в обязательную часть Блока 1. «Дисциплины (модули)» и изучается в седьмом семестре. Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Теория вероятностей». Освоение дисциплины «Математическая статистика» необходимо для написания выпускной квалификационной работы.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Код и наименование компетенции	Код и наименование части компетенции (при наличии паспорта компетенций)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
ОПК-1 «способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности»	–	Знает: основные понятия и определения, формулировки основных утверждений и теорем, постановки стандартных задач; возможности применения изученного теоретического материала в профессиональной деятельности. Умеет: применять полученные знания для решения различных задач.
ПК-1 «способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области»	–	Знает: основные понятия и определения, формулировки основных утверждений и теорем, постановки стандартных задач; возможности применения изученного теоретического материала в профессиональной деятельности. Умеет: применять полученные знания для решения различных задач; передавать результат проведенных исследований в виде рекомендаций, выраженных в терминах предметной области

ПК-2 «способен использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях»	–	Знает: основные понятия и определения теории; постановки классических задач; формулировки важнейших утверждений, возможные сферы их приложения. Умеет: решать задачи, использовать математические методы и модели для решения прикладных задач..
--	---	---

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы	Всего часов (академические часы)	Часов в семестре (академические часы)
		7 семестр
Общий объем зач. ед. час.	4	4
	144	144
Из них:		
Часы контактной работы (всего):	66	66
Лекции	30	30
Практические занятия	34	34
Лабораторные/практические занятия по подгруппам	0	0
Консультации и иная контактная работа	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф.зачет, экзамен)	экзамен	экзамен

3. Система оценивания

3.1.

Для текущего контроля применяется 100-балльная система оценивания. Баллы проставляются за выполненные письменных контрольных работы по каждой теме дисциплины. Результаты текущего контроля учитываются при промежуточной аттестации. Вид промежуточной аттестации – экзамен.

Обучающиеся, набравшие в течение семестра: от 61 до 75 баллов, получают оценку «удовлетворительно»; от 76 до 90 баллов – «хорошо»; 91 балл и выше – «отлично». Обучающиеся, не набравшие достаточное количество баллов или желающие повысить оценку, сдают экзамен.

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи. На подготовку к ответу отводится не более 60-90 минут. Ответы на теоретические вопросы и решение задачи оцениваются по 100-балльной шкале.

Результующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое оценок за ответы на вопросы и решение задачи. При результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «неудовлетворительно». Студенты, набравшие от 61 до 75 баллов, получают оценку «удовлетворительно»; от 76 до 90 баллов – «хорошо»; 91 балл и выше – «отлично».

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
7 семестр						
1.	Основные понятия и задачи математической статистики	20	2	0	0	0
2.	Эмпирическое распределение	20	4	6	0	0
3.	Точечное оценивание параметров распределений	22	6	6	0	0
4.	Интервальное оценивание параметров распределений	22	6	6	0	0
5.	Проверка статистических гипотез (параметрическая теория)	20	4	6	0	0
6.	Проверка статистических гипотез (непараметрическая теория)	20	4	6	0	0
7.	Регрессионный и факторный анализ	18	4	4		
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Основные понятия и задачи математической статистики.

Выборка из распределения. Двойственный характер выборки. Основные статистические задачи: оценка параметров распределений, проверка статистических гипотез, установление эмпирических зависимостей и др.

Тема 2. Эмпирическое распределение.

Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения. Группировка наблюдений, гистограммы. Теорема Гливленко-Кантелли. Числовые характеристики эмпирических распределений: выборочное среднее, выборочные дисперсии, выборочные моменты. Сходимость выборочных характеристик к соответствующим теоретическим характеристикам распределений.

Тема 3. Точечное оценивание параметров распределений.

Параметрическое семейство распределений. Понятие плотности относительно некоторой меры. Классические параметрические семейства распределений. Экспоненциальное семейство распределений. Понятие точечной оценки неизвестного параметра. Состоятельные оценки. Несмещенные и асимптотически несмещенные оценки. Сравнение оценок. Эффективные оценки в заданном классе оценок. Асимптотически нормальные оценки и их сравнение. Состоятельность асимптотически нормальных оценок. Примеры преобразований, стабилизирующих экспертные оценки. Методы нахождения оценок: метод подстановки (метод моментов), метод максимального (наибольшего) правдоподобия. Асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия. Регулярные модели. Неравенство Рао-Крамера (неравенство информации). R-эффективные оценки. Критерий R-эффективности. Связь R-эффективных оценок с оценками максимального правдоподобия. Условные математические ожидания. Достаточные статистики. Теорема факторизации Неймана-Фишера. Улучшение несмещенной оценки усреднением по достаточной статистике. Полные достаточные статистики. Наилучшие несмещенные оценки.

Тема 4. Интервальное оценивание параметров распределений.

Доверительные интервалы и доверительные вероятности. Точные и асимптотические доверительные интервалы. Универсальный способ построения доверительных интервалов. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок. Распределения «хи-квадрат», Стьюдента и Фишера. Выборки из нормального распределения. Теорема Фишера и ее следствие для выборок из нормального распределения. Точные доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Доверительные интервалы для одномерных параметров классических семейств распределений.

Тема 5. Проверка статистических гипотез (параметрическая теория).

Основные понятия проверки статистических гипотез: простые и сложные гипотезы, критерии, критические области, вероятности ошибок 1-го и 2-го рода. Размер и мощность критерия. Сравнение критериев. Невозможность построения наилучшего критерия в классе всех критериев. Проверка двух простых гипотез. Наиболее мощные критерии. Лемма Неймана-Пирсона. Равномерно наиболее мощные критерии для проверки сложных гипотез против сложных альтернатив. Распределения с монотонным отношением правдоподобия. Пример экспоненциальных семейств. Равномерно наиболее мощные

критерии для проверки сложных гипотез о параметрах нормального и пуассоновского распределений. Сравнение параметров распределений двух выборок. Проверка гипотезы о равенстве средних и дисперсий двух нормальных совокупностей.

Тема 6. Проверка статистических гипотез (непараметрическая теория).

Непараметрические критерии. Критерии согласия. Критерий Колмогорова и «омега-квадрат». Критерии «хи-квадрат» для проверки простых и сложных гипотез. Теорема Пирсона. Проверка гипотезы о независимости признаков. Проверка гипотезы об однородности выборок. Построение критериев согласия с помощью доверительных интервалов.

Тема 7. Регрессионный и факторный анализ.

Простейшая и общая модели регрессии с гауссовскими ошибками. Общие линейные модели. Ортогональность регрессоров. Оценка параметров регрессии. Метод наименьших квадратов. Проверка гипотез относительно параметров линейной регрессии. Факторные модели.

Планы практических занятий

Тема 2. Эмпирическое распределение.

Вариационный ряд. Построение эмпирической функции распределения. Группировка наблюдений, построение гистограммы. Выборочные характеристики и их свойства. Сходимость выборочных характеристик к истинным.

Тема 3. Точечное оценивание параметров распределений.

Проверка оценок на несмещенность, состоятельность и асимптотическую нормальность. Методы нахождения оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия. Различные подходы к сравнению оценок. Информация по Фишеру о параметре. Вычисление ее количества для различных статистических моделей. Неравенство Рао-Крамера. R-эффективные оценки. Нахождение достаточных статистик, проверка их полноты. Улучшение несмещенной оценки усреднением по достаточной статистике. Нахождение эффективных несмещенных оценок.

Тема 4. Интервальное оценивание параметров распределений.

Универсальный способ построения доверительных интервалов. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок, неравенства Чебышева. Построение точных доверительных интервалов для параметров классических семейств распределений.

Тема 5. Проверка статистических гипотез (параметрическая теория).

Нахождение вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода, мощности критерия. Естественное сравнение критериев. Построение критериев для проверки двух простых гипотез. Распределения с монотонным отношением правдоподобия. Построение равномерно наиболее мощных критериев для проверки сложных гипотез.

Тема 6. Проверка статистических гипотез (непараметрическая теория).

Критерии согласия. Критерий Колмогорова, «омега-квадрат» и «хи-квадрат» для проверки простых и сложных гипотез. Построение критериев по подходящей статистике. Нахождение размеров критериев, доказательство их состоятельности. Построение критериев согласия с помощью доверительных интервалов.

Тема 7. Регрессионный и факторный анализ.

Простейшая и общая линейные модели регрессии с гауссовскими ошибками. Ортогонализация регрессоров. Применение метода наименьших квадратов для оценки параметров регрессии. Оценки максимального правдоподобия. Проверка гипотез относительно параметров линейной регрессии.

Образцы средств для проведения текущего контроля

Задания, используемые для проведения текущего контроля, аналогичны заданиям, разбираемым на практических занятиях.

Контрольная работа №1 (примерный вариант)

1. Рассчитать и построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, где m_i – частота попадания вариант в промежуток (x_i, x_{i+1}) .

i	$x_i < X \leq x_{i+1}$	m_i
1	2-4	5
2	4-6	8
3	6-8	16
4	8-10	12
5	10-12	9

2. Найти несмещенную выборочную дисперсию на основании данного распределения выборки:

x_i	-6	-2	3	6
n_i	12	14	16	8

3. Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение $a_0=10$ является математическим ожиданием нормально распределенной случайной величины при 5%-м уровне значимости для двусторонней критической области, если в результате обработки выборки объема $n=10$ получено выборочное среднее $\bar{x}=12$, а несмещенное среднее квадратичное отклонение равно $s=1$.

Контрольная работа №2 (примерный вариант)

1. При уровне значимости $\alpha=0,1$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин X и Y на основе выборочных данных при

альтернативной гипотезе $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

X		Y	
x_i	n_i	y_i	m_i
142	3	140	5
145	1	146	3
146	2	147	2
18	4	151	2

2. Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X на основании корреляционной таблицы.

X \ Y	10	15	20	25	30	35
15	6	4				

25		6	8			
35				21	2	5
45				4	12	6
55					1	5

3. При уровне значимости $\alpha=0,05$ методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании пяти измерений для трех уровней фактора Φ_1 - Φ_3 .

Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	24	18	22
2	16	14	15
3	12	10	16
4	5	4	12
5	6	16	8

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№ темы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Основные понятия и задачи математической статистики	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
2.	Эмпирическое распределение	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
3.	Точечное оценивание параметров распределений	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
4.	Интервальное оценивание параметров распределений	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
5.	Проверка статистических гипотез (параметрическая теория)	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.

6.	Проверка статистических гипотез (непараметрическая теория)	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
7.	Регрессионный и факторный анализ	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.

Порядок выполнения каждого вида самостоятельной работы

1. Изучение лекционного материала по теме.
2. Изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы.
3. Ответы на пункты плана для практических занятий.
4. Разбор практических примеров, продемонстрированных на лекциях и решенных на практических занятиях.

Контроль за самостоятельной работой осуществляется при выполнении обучающимся контрольной работы.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма проведения экзамена – собеседование по вопросам билета и решению задачи.

Примерные формулировки задач

1. Составить интервальный вариационный ряд, построить полигон и гистограмму.
2. Составить эмпирическую функцию распределения и изобразить ее графически.
3. Вычислить числовые характеристики: моду, медиану, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, асимметрию и эксцесс.
4. Построить доверительные интервалы для истинного значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения генеральной совокупности.
5. Поставить гипотезу о теоретическом распределении генеральной совокупности, выбирая из трех распределений: равномерное, нормальное, показательное. Найти параметры выбранного теоретического распределения.
6. Поставить гипотезу о теоретическом распределении генеральной совокупности, выбирая из трех распределений: равномерное, нормальное, показательное. С помощью критерия Пирсона (или для нормального распределения – критерия Романовского) проверить согласованность выбранного теоретического распределения с данными выборки на уровне значимости $\alpha = 0,05$.
7. Построить корреляционное поле. По характеру расположения точек в корреляционном поле выбрать общий вид регрессии.
8. Вычислить числовые характеристики \bar{x} , \bar{y} , S_x , S_y , r , σ_r .
9. Определить значимость коэффициента корреляции r и найти для него доверительный интервал с надежностью $\gamma = 0.95$.
10. Написать эмпирические уравнения линий регрессий y на x и x на y .
11. Вычислить коэффициент детерминации R^2 и объяснить его смысловое значение.

12. Провести оценку величины погрешности уравнения регрессии y на x и его коэффициентов.

Теоретические вопросы

1. Выборка из распределения. Двойственный характер выборки. Основные задачи математической статистики.
2. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко-Кантелли.
3. Выборочные моменты. Числовые характеристики выборочного среднего и его асимптотическое поведение.
4. Выборочные моменты. Числовые характеристики выборочной дисперсии и ее асимптотическое поведение. Исправленная выборочная дисперсия.
5. Классические распределения математической статистики: хи-квадрат, Стьюдента, Фишера.
6. Выборки из нормального распределения. Теорема Фишера.
7. Теорема Стьюдента (следствие теоремы Фишера).
8. Точечные оценки; их состоятельность, несмещенность и асимптотическая несмещенность.
9. Сравнение оценок. Эффективные оценки в заданном классе оценок.
10. Асимптотически нормальные оценки и их сравнение. Состоятельность асимптотически нормальных оценок.
11. Метод моментов нахождения оценок.
12. Метод максимального правдоподобия.
13. Асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия.
14. Условия регулярности. Неравенство Рао-Крамера. R-эффективные оценки. Пример существования R-эффективной оценки.
15. Достаточные статистики. Теорема факторизации Неймана-Фишера.
16. Метод улучшения оценок. Теорема Блекуэла-Рао-Колмогорова. Пример.
17. Полная достаточная статистика. Теорема об эффективной оценке. Пример.
18. Определение доверительного интервала (ДИ). Точные и асимптотические ДИ.
19. Построение асимптотических ДИ с помощью асимптотически нормальных оценок.
20. Асимптотический ДИ для неизвестной вероятности «успеха» распределения Бернулли.
21. Точный ДИ для неизвестного среднего нормального распределения при известной дисперсии.
22. Точный ДИ для неизвестного среднего нормального распределения при неизвестной дисперсии.
23. Точный ДИ для неизвестной дисперсии.
24. Универсальный способ построения ДИ.
25. Общая постановка задачи проверки параметрических статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Понятие о критерии. Ошибки первого и второго рода. Мощность и размер критерия.
26. Математическая постановка задачи проверки простых гипотез. Понятие о рандомизированном критерии.
27. Фундаментальная лемма Неймана-Пирсона.
28. Математическая постановка задачи проверки сложных гипотез. Равномерно наиболее мощные критерии (РНМК).
29. Распределения с монотонным отношением правдоподобия. Экспоненциальное семейство распределений. РНМК для проверки сложных гипотез.

30. Примеры построения РНМК для параметров пуассоновского и нормального распределений.
31. Построения критериев для проверки сложных гипотез, если отношение правдоподобия не монотонно. Односторонний и двусторонний критерий Стьюдента.
32. Односторонний и двусторонний критерий однородности Фишера.
33. Непараметрические критерии. Критерий согласия хи-квадрат. Теорема Пирсона.
34. Проверка гипотезы о независимости признаков.
35. Проверка гипотезы об однородности выборок.
36. Критерий Колмогорова. Распределение Колмогорова.
37. Критерий «омега-квадрат». Сравнение с критерием Колмогорова.
38. Построение критериев согласия с помощью доверительных интервалов.
39. Простейшая и общая модели регрессии с гауссовскими ошибками. Задача регрессии.
40. Общие линейные модели регрессии. Ортогональность регрессоров.
41. Оценки параметров простейшей линейной регрессии. Метод наименьших квадратов.
42. Проверка гипотез относительно параметров линейной регрессии. Понятие о факторной модели.

6.2. Критерии оценивания компетенций:

Таблица 4

№ п / п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1 «способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности»	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности. ОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности.	Контрольные работы в течение семестра. Теоретические вопросы к экзамену.	Оценка за выполнение контрольной работы зависит от количества правильно решенных заданий. Оценка за ответ по билету зависит от полноты ответа на вопросы. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»
2.	ПК-1 «способен передавать результат проведенных физико-математических и	ПК-1.1. Осуществляет передачу результатов проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде	Контрольные работы в течение семестра. Теоретические	Оценка за выполнение контрольной работы зависит от количества правильно решенных заданий.

	прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области»	рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области.	вопросы к экзамену.	Оценка за ответ по билету зависит от полноты ответа на теоретические вопросы и правильности решения задачи. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»
3.	ПК-2 «способен использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях»	ПК-2.1. Использует методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях.	Контрольные работы в течение семестра. Теоретические вопросы к экзамену.	Оценка за выполнение контрольной работы зависит от количества правильно решенных заданий. Оценка за ответ по билету зависит от полноты ответа на теоретические вопросы и правильности решения задачи. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература:

1. Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. – Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. – 368 с. – ISBN 978-5-211-05846-0. – Текст : электронный// Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/13115.html> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: для авторизир. пользователей

7.2. Дополнительная литература:

1. Гмурман, Владимир Ефимович Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман, 11-е изд., перераб. - Москва : Высшее образование, 2009. - 404 с.

2. Павлов, С. В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / С.В. Павлов. - М.: ИЦ РИОР: ИНФРА-М, 2019. - 186 с.: - (Карманное учебное пособие). - ISBN 978-5-369-00679-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/990420> (дата обращения: 14.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3. Интернет-ресурсы

1. Федеральный портал «Российское образование»: <http://www.edu.ru>.
2. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU: <http://elibrary.ru>.

7.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ProQuest Dissertations & Theses Global / ФГБУ «Государственная публичная научно-техническая библиотека России». URL: <https://search.proquest.com/index>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

– Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.
2. Microsoft Office.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы. Для проведения занятий лекционного типа необходимо демонстрационное оборудование. Помещения для самостоятельной работы обучающихся должны быть оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Шалагинов С. Д. Математический анализ. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Шалагинов С.Д., 2021.

1. Пояснительная записка

Цель курса "Математический анализ" - ознакомление с фундаментальными методами исследования переменных величин посредством анализа бесконечно малых, основу которого составляет теория дифференциального и интегрального исчисления. Объектами изучения в данной дисциплине являются, прежде всего, функции. С их помощью могут быть сформулированы как законы природы, так и разнообразные процессы, происходящие в экономике, природе, технике. Отсюда объективная важность математического анализа как средства изучения функций. Дисциплина "Математический анализ" отражает важное направление развития современной математики, в ней рассматриваются вопросы, связанные с методами вычислений.

Задачи курса. Развить математический кругозор студентов. Обучить студентов важнейшим теоретическим положениям математического анализа, аналитическим методам, выработать у них навыки решения конкретных задач, требующих исследования функций и вычисления связанных с ними величин.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули).

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Знает: теоретические основы и практические приложения методов математического анализа, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать методы математического анализа для использования их в работе и научных исследованиях

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре		
			2 семестр	3 семестр	4 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	25	9	8	8
	час	900	324	288	288
Из них:					
Часы контактной работы (всего):		390	130	130	130
Лекции		180	60	60	60
Практические занятия		204	68	68	68

Лабораторные/практические занятия по подгруппам				
Консультации и иная контактная работа	6	2	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	510	194	158	158
Вид промежуточной аттестации		Экзамен	Экзамен	Экзамен

3. Система оценивания

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" за две контрольные работы, то он получает оценку "отлично" без сдачи экзамена. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за другую "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдавать экзамен (без сохранения оценки).

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
2 семестр						
1	Неопределённый интеграл	34	4	20	0	0
2	Определённый интеграл	32	14	10	0	0
3	Несобственные интегралы	32	6	8	0	0
4	Метрические пространства	32	4	2	0	0

5	Компактность в метрических пространствах	32	4	2	0	0
6	Непрерывные отображения метрических пространств	32	4	2	0	0
7	Производные и дифференциалы функций многих переменных	32	8	8	0	0
8	Локальные экстремумы функций многих переменных	32	4	6	0	0
9	Неявные функции	32	6	4	0	0
10	Условный экстремум	32	6	6	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов) за 2 семестр	324	60	68	0	2
3 семестр						
11	Числовые ряды	36	8	10		
12	Функциональные последовательности и ряды	36	6	8		
13	Степенные ряды	36	8	8		
14	Ряды Фурье	36	8	8		
15	Интегралы, зависящие от параметров	36	8	10		
16	Эйлеровы интегралы	36	8	8		
17	Преобразование Фурье	36	8	8		
18	Асимптотические разложения	34	6	8		
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов) за 3 семестр	288	60	68	0	2
4 семестр						
19	Мера Жордана	22	6	6		
20	Кратный интеграл Римана	24	8	10		
21	Несобственные кратные интегралы	24	4	4		
22	Кривые	24	6	2		
23	Криволинейные интегралы	24	4	8		

24	Потенциальные векторные поля	24	4	4		
25	Формула Грина	24	4	4		
26	Поверхности	24	4	4		
27	Поверхностные интегралы	24	4	6		
28	Формула Стокса	24	4	6		
29	Формула Гаусса-Остроградского	24	4	6		
30	Общая формула Стокса	24	8	8		
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов) за 4 семестр	288	60	68	0	2
	Итого (часов)	900	180	204	0	6

4.2. Содержание дисциплины по темам

2 СЕМЕСТР

Тема 1. Неопределённый интеграл

Первообразная. Строение множества первообразных. Начальные условия Коши. Неопределённый интеграл. Табличные интегралы. Свойства неопределённого интеграла. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределённом интеграле. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей. Дифференциальный бином. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера. Интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование трансцендентных функций.

Тема 2. Определённый интеграл

Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Определение интеграла Римана. Интеграл Римана, как предел по базе. Интеграл Римана на языке последовательностей. Ограниченность интегрируемой функции. Неинтегрируемость по Риману функции Дирихле. Интегральные суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Римана. Критерий интегрируемости в терминах колебаний функции. Интегрируемость непрерывной функции и функции, имеющей конечное число точек разрыва. Интегрируемость монотонной функции. Интегрируемость сложной функции. Арифметические операции с интегрируемыми функциями. Верхний и нижний интегралы Дарбу. Интегралы Дарбу как пределы сумм Дарбу. Критерий интегрируемости функции в терминах равенства её интегралов Дарбу. Основные свойства определённого интеграла: интеграл от единицы, монотонность, линейность, аддитивность. Неравенства для интегралов. Первая теорема о среднем значении. Интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность интеграла по верхнему пределу. Дифференцирование интеграла по верхнему пределу. Вторая теорема о среднем значении. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Интегральные неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского и Минковского.

Тема 3. Несобственные интегралы

Определение несобственного интеграла с одной особой точкой. Формула Ньютона-Лейбница

для несобственных интегралов. Сходимость интегралов $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная сходимость интеграла. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла.

Тема 4. Метрические пространства

Понятие метрического пространства. Понятие нормированного пространства. Примеры метрических и нормированных пространств. Окрестности. Открытые и замкнутые множества, связь между ними. Внутренность, производное множество, замыкание, внешность, граница. Ограниченные и вполне ограниченные множества. Подпространства метрического пространства. Предел функции со значениями в метрическом пространстве. Свойства предела. Предел последовательности. Предел функции в точке.

Тема 5. Компактность в метрических пространствах

Полные пространства. Принцип полноты Кантора. Предкомпактные множества. Критерий предкомпактности Хаусдорфа. Компактные множества. Критерий компактности метрического пространства. Компактность в терминах покрытий.

Тема 6. Непрерывные отображения метрических пространств

Непрерывность в точке. Непрерывность на множестве. Прообраз открытого и замкнутого множества при непрерывном отображении. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность линейной комбинации (для отображений в нормированное пространство), произведения и частного (для отображений в \mathbf{R}). Непрерывность сложной функции. Гомеоморфизм. Изометрия. Основные теоремы о непрерывных функциях: непрерывный образ компакта – компакт, теоремы Вейерштрасса, теорема Кантора о равномерной непрерывности, теорема о сохранении линейной связности при непрерывном отображении. Принцип сжимающих отображений. Свойства пространства \mathbf{R}^n .

Тема 7. Производные и дифференциалы функций многих переменных

Частные производные. Геометрический смысл частных производных. Частные производные и непрерывность. Дифференцируемость функции. Критерий дифференцируемости. Сравнение понятий частных производных и дифференцируемости. Сравнение понятий дифференцируемости и непрерывности. Касательная плоскость и геометрический смысл дифференцируемости. Дифференциал. Геометрический смысл дифференциала. Правило дифференцирования сложной функции. Инвариантность формы записи первого дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Непрерывно дифференцируемые функции. Дифференциалы высших порядков. Условие инвариантности высших дифференциалов относительно замены переменных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано. Формула конечных приращений.

Тема 8. Локальные экстремумы функций многих переменных

Понятие локального экстремума. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие локального экстремума.

Тема 9. Неявные функции

Понятие неявной функции. Теорема о неявной функции. Система неявных функций. Якобиан системы функций. Теорема о системе неявных функций. Правила вычисления производных и дифференциалов неявных функций. Геометрические приложения теории неявных функций.

Тема 10. Условный экстремум

Понятие условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума. Метод неопределённых множителей Лагранжа. Достаточное условие условного экстремума в методе Лагранжа.

3 СЕМЕСТР

Тема 11. Числовые ряды

Понятие числового ряда. Сходящиеся ряды, сумма ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Свойства сходящихся рядов. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Интегральный признак Коши-Маклорена. Ряд Римана. Признаки сравнения. Признак Коши. Признак Даламбера. Признак Куммера. Признак Раабе. Признак Ермакова. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда Лейбница. Преобразование Абеля конечных сумм. Признаки Абеля и Дирихле. Абсолютно сходящиеся ряды. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах. Перестановка членов в условно сходящихся рядах (теорема Римана). Умножение рядов. Двойные и повторные пределы по базе. Двойные и повторные ряды. Бесконечные произведения и их связь с рядами. Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения. Представление Эйлера для дзета-функции Римана.

Тема 12. Функциональные последовательности и ряды

Последовательности функций. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость. Метрический критерий равномерной сходимости. Признак Дини равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность равномерного предела непрерывных функций. Предельный переход под знаком интеграла. Предельный переход под знаком производной. Ряды функций. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда. Непрерывность суммы функционального ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов. Разложение синуса в бесконечное произведение. Ещё о двойных и повторных пределах по базе.

Тема 13. Степенные ряды

Понятие степенного ряда. Первая теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара. Непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Действия со степенными рядами. Понятие аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Единственность представления функции в виде степенного ряда. Пример бесконечно дифференцируемой, но не аналитической функции. Ряд Тейлора. Достаточное условие аналитичности функции. Аналитичность основных элементарных функций. Принцип единственности для аналитических функций. Пять основных разложений в степенные ряды. Аналитические функции комплексного переменного. Формулы Эйлера.

Тема 14. Ряды Фурье

Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Аппроксимация непрерывных функций алгебраическими многочленами. Аппроксимация непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами. Абсолютно интегрируемые функции и функции, интегрируемые с квадратом. Пространство функций, интегрируемых с квадратом. Скалярное произведение функций, норма, неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в среднем и в среднем квадратичном. Аппроксимация функций ступенчатыми функциями. Тригонометрическая система функций и её ортогональность. Полнота тригонометрической системы в равномерном и в среднем квадратичном приближении. Понятие тригонометрического ряда. Необходимое условие разложения функции в равномерно сходящийся тригонометрический ряд. Понятие ряда Фурье. Тожество Бесселя. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Замкнутость тригонометрической системы функций. Однозначность определения непрерывной функции своим рядом Фурье. Теорема Римана о стремлении коэффициентов Фурье к нулю. Интеграл Дирихле. Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное интегрирование рядов Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Ряды Фурье в случае произвольного симметричного относительно нуля интервала.

Тема 15. Интегралы, зависящие от параметров

Семейства функций, зависящих от параметров. Поточечная и равномерная сходимость семейства функций. Собственные интегралы, зависящие от параметров, с постоянными пределами интегрирования. Предельный переход по параметрам под знаком интеграла. Непрерывность интеграла по параметрам. Дифференцирование интеграла по параметрам (формула Лейбница). Интегрирование по параметрам. Собственные интегралы, зависящие от параметров, с переменными пределами интегрирования. Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Поточечная и равномерная сходимость несобственных интегралов. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса, Абели и Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла. Непрерывность несобственного интеграла по параметрам. Дифференцирование несобственного интеграла по параметрам. Интегрирование несобственного интеграла по параметрам.

Тема 16. Эйлеровы интегралы

Гамма-функция. Бета-функция. Множество сходимости и равномерной сходимости эйлеровых интегралов. Формула понижения для гамма-функции. Разложение гамма-функции в бесконечное произведение. Формула дополнения для гамма-функции. Формула удвоения Лежандра. Формула умножения Гаусса. Связь между эйлеровыми интегралами.

Тема 17. Преобразование Фурье

Понятие интеграла Фурье. Интегральная формула Фурье. Главное значение несобственного интеграла. Комплексная запись интеграла Фурье. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье производной. Связь между гладкостью функции и скоростью убывания её преобразования Фурье. Производная преобразования Фурье. Преобразование Фурье бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Формула Планшереля. Преобразование Фурье свёртки функций.

Тема 18. Асимптотические разложения

Понятие асимптотической последовательности и асимптотического разложения. Единственность асимптотического разложения. Действия над степенными асимптотическими рядами. Формула суммирования Эйлера-Маклорена. Формула Стирлинга. Лемма Ватсона. Метод Лапласа.

4 СЕМЕСТР

Тема 19. Мера Жордана

Внутренняя и внешняя меры Жордана в \mathbf{R}^n , их свойства. Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства измеримых множеств. Основные свойства меры Жордана. Мера прямого произведения множеств. Важнейшие примеры измеримых множеств.

Тема 20. Кратный интеграл Римана

Конечно-аддитивные разбиения множества. Интегральные суммы и интеграл Римана. Интегральные суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Римана. Верхний и нижний интегралы Дарбу. Интегралы Дарбу как пределы сумм Дарбу. Критерий интегрируемости функции в терминах равенства её интегралов Дарбу. Классы интегрируемых функций. Свойства кратного интеграла. Интегральная теорема о среднем. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменных в кратном интеграле.

Тема 21. Несобственные кратные интегралы

Понятие несобственного кратного интеграла. Несобственный кратный интеграл как предел по базе. Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Признаки сравнения. Равносильность сходимости и абсолютной сходимости несобственных кратных интегралов. Замена переменных в несобственном кратном интеграле. Сходимость модельных несобственных интегралов.

Тема 22. Кривые

Понятие кривой. Эквивалентные кривые. Ориентированные кривые. Касательная к кривой. Гладкие и кусочно-гладкие кривые. Длина кривой. Аддитивность длины. Вычислительная формула для длины гладкой кривой. Натуральная параметризация кривой.

Тема 23. Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы первого рода, их физический смысл, вычислительная формула. Свойства криволинейных интегралов первого рода. Криволинейные интегралы второго рода, их физический смысл, вычислительная формула. Свойства криволинейных интегралов второго рода.

Тема 24. Потенциальные векторные поля

Понятие полного дифференциала $Pdx + Qdy + Rdz$. Равносильность условия полного дифференциала и независимости интеграла от пути интегрирования. Понятие потенциального векторного поля, потенциальная функция. Связь потенциального векторного поля и полного дифференциала. Формула Ньютона-Лейбница для функции многих переменных. Структура множества потенциальных функций. Ротор векторного поля. Необходимое условие потенциальности векторного поля. Циркуляция векторного поля вдоль замкнутой кривой. Критерий потенциальности в терминах циркуляции

Тема 25. Формула Грина

Ориентация границы плоской области. Формула Грина. Различные формы записи формулы Грина. Вычисление площадей при помощи криволинейных интегралов. Дифференциальный критерий потенциальности плоского векторного поля в односвязной области.

Тема 26. Поверхности

Понятие поверхности. Эквивалентные поверхности. Касательная плоскость к поверхности. Гладкие поверхности. Первая квадратичная форма гладкой поверхности. Площадь гладкой поверхности. Ориентация гладкой поверхности. Ориентация края гладкой поверхности. Кусочно-гладкие поверхности. Ориентация кусочно-гладкой поверхности.

Тема 27. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого рода, их физический смысл, вычислительная формула. Свойства поверхностных интегралов первого рода. Поверхностные интегралы второго рода, их физический смысл, вычислительные формулы. Свойства поверхностных интегралов второго рода.

Тема 28. Формула Стокса

Формула Стокса. Векторная трактовка формулы Стокса. Геометрическое определение ротора векторного поля. Дифференциальный критерий потенциальности векторного поля в односвязной области.

Тема 29. Формула Гаусса-Остроградского

Формула Гаусса-Остроградского. Векторная трактовка формулы Гаусса-Остроградского. Геометрическое определение дивергенции векторного поля. Вычисление объемов при помощи поверхностных интегралов. Соленоидальные векторные поля.

Тема 30. Общая формула Стокса

Полилинейные формы. Тензорное произведение полилинейных форм и его свойства. Базис в пространстве полилинейных форм. Перенос полилинейных форм при линейном отображении. Антисимметричные формы. Операция альтернации полилинейных форм и её свойства. Внешнее произведение антисимметричных форм и его свойства. Ассоциативность внешнего произведения. Внешнее произведение линейных форм. Базис в пространстве антисимметричных форм. Дифференциальные формы. Перенос дифференциальных форм при отображении. Свойства операции переноса. Внешний дифференциал. Независимость внешнего дифференциала от выбора системы координат. Цепи и границы. Интегрирование форм по цепям. Теорема Стокса для цепей. Многообразия в \mathbf{R}^n . Локальные координаты на многообразии. Край многообразия. Касательное пространство к многообразию. Ориентация

многообразия и его края. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Независимость внешнего дифференциала от выбора локальных координат. Разбиение единицы. Интегрирование дифференциальных форм на многообразии. Общая формула Стокса.

Средства для проведения текущего контроля

Для текущего контроля используются контрольные работы

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа №1 «Общие приемы и методы интегрирования» (2 семестр)

1. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(3-2x^2)dx}{3x^2+x+1} ; \quad \text{б) } \int \frac{\operatorname{ctg} x \ln \sin x}{\sqrt{1+\ln \sin x}} dx ; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 2x} .$$

2. Найти $\int f(x)dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \leq 1 \\ 1-|x|, & |x| > 1 \end{cases}$$

3. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_0^{\pi^2} \cos^2 \sqrt{x} dx ; \quad \text{б) } \int_{e^3}^{e^8} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx .$$

4. Найти длину дуги кривой $x^2 = 5y^3$, если $x^2 + y^2 \leq 6$.

5. Найти площадь поверхности вращения дуги кривой $y = 2 \cos \frac{\pi x}{2}$, $|x| \leq 1$, вокруг оси абсцисс. Изобразить эту поверхность.

6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2-x}{e^{\sqrt{x}}-1} dx ; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2-1}} dx .$$

Контрольная работа №2 «Дифференциальное исчисление функций многих переменных» (2 семестр)

1. Будет ли функция $y(x)$, определяемая условием $e^{4x-2}(y+e^y+5)=1$, удовлетворять дифференциальному уравнению $(1+e^y)^2 y'' = 4y'e^y(4+y)$?

2. Для функции $z(x,y)$ вычислить $\vec{\nabla} z(1,-1)$, если $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u + v$, $u > 0$.

3. Будет ли функция $z(x,y)$ иметь в точке $(1,1)$ локальный экстремум, если $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 72$ и $z(1,1) = 4$?

4. Найти локальные экстремумы функции трех переменных $u = x^2 + y^2 - 7z^2$.

Контрольная работа №3 «Ряды» (3 семестр)

1. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{1+n^3(x+1)^2}.$$

на множестве $E = [-2; +\infty]$.

2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{1+n^4 x^6}$$

на множестве ее задания.

3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах интервала

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) x^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{3^n + 2^n}.$$

Контрольная работа №4 «Ряды Фурье» (3 семестр)

1. Разложить функцию $f(x) = 8 + x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$.
2. Разложить функцию $f(x) = 1 - 7x$ в ряд Фурье на отрезке $[0; 2\pi]$.
3. Разложить функцию $f(x) = 9,5$ в ряд Фурье по синусам и по косинусам на отрезке $[-2; 1]$.

Контрольная работа «Кратные интегралы» (4 семестр)

1. Переменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x, y) dy$$

2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G \frac{x^2}{y^2} dx dy,$$

где фигура G ограничена кривыми $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

3. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y=0$, $y=x$.

4. Найти объём трехмерного тела, ограниченного поверхностями

$$2z = x^2, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad 3x + 2y = 12, \quad x \geq 0.$$

5. Переходя к полярным координатам, вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V z dx dy dz,$$

где тело V характеризуется условиями $z \leq x^2 + y^2$, $y \geq x$, $y \leq 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Контрольная работа «Криволинейные и поверхностные интегралы» (4 семестр)

1. Вычислить криволинейный интеграл первого типа $\int_{\Gamma} (x + 4y) ds$ вдоль правой петли плоской кривой, заданной в полярных координатах условиями $r^2 = \cos 2\varphi$, $x \geq 0$.
2. При помощи криволинейных интегралов вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ и осями координат.
3. Вычислить поверхностный интеграл первого типа $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, где поверхность S характеризуется условиями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 2x$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x^3 + yz)\vec{i} + (y^3 + zx)\vec{j} + (z^3 + xy)\vec{k}$ через верхнюю сторону полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.
5. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (y - z, z - x, x - y)$ вдоль эллипса $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, пробегаемого по ходу часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z .

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ темы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
2 семестр		
1	Неопределённый интеграл	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Определённый интеграл	Чтение обязательной и дополнительной литературы
3	Несобственные интегралы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Метрические пространства	Чтение обязательной и дополнительной литературы
5	Компактность в метрических пространствах	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Непрерывные отображения метрических пространств	Чтение обязательной и дополнительной литературы
7	Производные и дифференциалы функций многих переменных	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Локальные экстремумы функций многих переменных	Чтение обязательной и дополнительной литературы
9	Неявные функции	Чтение обязательной и дополнительной литературы
10	Условный экстремум	Чтение обязательной и дополнительной литературы
3 семестр		

11	Числовые ряды	Чтение обязательной и дополнительной литературы
12	Функциональные последовательности и ряды	Чтение обязательной и дополнительной литературы
13	Степенные ряды	Чтение обязательной и дополнительной литературы
14	Ряды Фурье	Чтение обязательной и дополнительной литературы
15	Интегралы, зависящие от параметров	Чтение обязательной и дополнительной литературы
16	Эйлеровы интегралы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
17	Преобразование Фурье	Чтение обязательной и дополнительной литературы
18	Асимптотические разложения	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4 семестр		
19	Мера Жордана	Чтение обязательной и дополнительной литературы
20	Кратный интеграл Римана	Чтение обязательной и дополнительной литературы
21	Несобственные кратные интегралы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
22	Кривые	Чтение обязательной и дополнительной литературы
23	Криволинейные интегралы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
24	Потенциальные векторные поля	Чтение обязательной и дополнительной литературы
25	Формула Грина	Чтение обязательной и дополнительной литературы
26	Поверхности	Чтение обязательной и дополнительной литературы
27	Поверхностные интегралы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
28	Формула Стокса	Чтение обязательной и дополнительной литературы
29	Формула Гаусса-Остроградского	Чтение обязательной и дополнительной литературы
30	Общая формула Стокса	Чтение обязательной и дополнительной литературы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма промежуточной аттестации – экзамен (2, 3, 4 семестр). Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Задачи экзаменационного билета аналогичны заданиям контрольных работ.

Вопросы к экзамену

2 семестр

1. Определение интеграла Римана. Интеграл Римана как предел по базе. Ограниченность интегрируемой функции.
2. Интегральные суммы Дарбу и их свойства: сравнение сумм Римана и Дарбу, суммы Дарбу как точные грани сумм Римана, поведение сумм Дарбу при измельчении разбиения, сравнение сумм Дарбу для любых разбиений.
3. Критерий интегрируемости Римана.
4. Интегрируемость непрерывной функции и функции с конечным числом точек разрыва.
5. Интегрируемость сложной функции. Арифметические операции с интегрируемыми функциями.
6. Верхний и нижний интегралы Дарбу. Интегралы Дарбу как пределы сумм Дарбу. Критерий интегрируемости функции в терминах равенства её интегралов Дарбу.
7. Основные свойства определённого интеграла: интеграл от единицы, монотонность, линейность, аддитивность.
8. Первая теорема о среднем значении.
9. Интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность интеграла по верхнему пределу. Дифференцирование интеграла по верхнему пределу.
10. Вторая теорема о среднем значении.
11. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
12. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Интегральные неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского и Минковского.
13. Определение несобственного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла. Сходимость модельных интегралов $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Признаки сходимости интегралов от неотрицательных функций.
14. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютно сходящиеся интегралы. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла.
15. Понятия метрического и нормированного пространства. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве, их свойства. Связь между открытыми и замкнутыми множествами.
16. Предел по базе функции со значениями в метрическом пространстве. Свойства функций, имеющих предел. Предел последовательности. Предел функции в точке.
17. Полные метрические пространства. Принцип полноты Кантора. Подпространства полного пространства. Критерий Коши существования предела.
18. Предкомпактные множества в метрическом пространстве. Критерий предкомпактности Хаусдорфа.
19. Компактные множества в метрическом пространстве. Критерий компактности метрического пространства. Критерий компактности множества в полном метрическом пространстве. Компактные множества в \mathbf{R}^n .
20. Компактность в терминах покрытий. Компактность в терминах централизованных систем.
21. Непрерывные отображения метрических пространств. Прообраз открытого и замкнутого множества при непрерывном отображении. Непрерывность сложной функции.

22. Непрерывный образ компакта – компакт. Теоремы Вейерштрасса. Линейно связные множества в метрическом пространстве. Непрерывный образ линейно-связного множества – линейно-связное множество.
23. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
24. Понятие топологического пространства. Окрестности, внутренние точки, предельные точки, точки прикосновения, замыкание, замкнутое множество, граница. Предел по базе функции со значениями в топологическом пространстве. Непрерывные отображения топологических пространств. Понятие гомеоморфизма.
25. Частные производные, дифференцируемость, дифференциал функции. Критерий дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости функции.
26. Теорема о дифференцировании сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования.
27. Производная по направлению. Градиент.
28. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Непрерывно дифференцируемые функции.
29. Дифференциалы высших порядков. Вычислительная формула для дифференциалов высших порядков. Условие инвариантности высших дифференциалов относительно замены переменных.
30. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано. Формула конечных приращений.
31. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
32. Неявная функция. Теорема о неявной функции.
33. Система неявных функций. Теорема о системе неявных функций. Существование обратной функции.
34. Условные экстремумы функций многих переменных. Метод множителей Лагранжа. Достаточное условие экстремума в методе Лагранжа.
35. Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби.
36. Принцип сжимающих отображений.

3 семестр

37. Числовой ряд и его сумма. Критерий Коши и необходимое условие сходимости ряда. Общие свойства сходящихся рядов: сходимость ряда и его остатка, линейная операция с рядами, сочетательное свойство ряда.
38. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: общий критерий сходимости, признаки сравнения, Коши, Даламбера, Куммера и Раабе. Интегральный признак Коши-Маклорена. Сходимость ряда Римана.
39. Формула суммирования Эйлера. Постоянная Эйлера.
40. Признак Ермакова сходимости рядов с неотрицательными членами.
41. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле для произвольных числовых рядов. Оценка остатка ряда Лейбница.
42. Абсолютная и условная сходимость рядов. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах.
43. Умножение абсолютно сходящихся рядов. Умножение условно сходящихся рядов.
44. Бесконечные произведения и их связь с рядами. Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения. Представление Эйлера для дзета-функции.
45. Равномерная и поточечная сходимость последовательности функций. Метрический критерий равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций. Непрерывность предельной функции.
46. Признак Дини равномерной сходимости последовательности функций.

47. Предельный переход под знаком интеграла и производной для последовательности функций.
48. Равномерная и поточечная сходимости функционального ряда. Критерий Коши и необходимое условие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы ряда.
49. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.
50. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.
51. Степенной ряд. Первая теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.
52. Непрерывность суммы степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
53. Понятие аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Единственность представления аналитической функции степенным рядом.
54. Ряд Тейлора. Критерий представления функции степенным рядом. Достаточное условие аналитичности. Аналитичность основных элементарных функций. Пять основных разложений в степенные ряды.
55. Принцип единственности для аналитических функций. Понятие аналитической функции комплексного переменного. Комплексная экспонента и её свойства. Формулы Эйлера.
56. Аппроксимация непрерывных функций. Теорема Стоуна. Аппроксимация непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами.
57. Скалярное произведение функций. Абсолютно и квадратично интегрируемые функции, связь между ними. Неравенство Коши-Буняковского. Норма функции. Сходимость в среднем квадратичном. Аппроксимация ступенчатыми функциями (без доказательства). Тригонометрическая система функций и её свойства: ортогональность, полнота в равномерном и среднем квадратичном приближениях.
58. Необходимое условие разложения функции в равномерно сходящийся тригонометрический ряд. Понятие ряда Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Ряд Фурье в случае произвольного интервала.
59. Норма тригонометрического полинома. Выражение среднего квадратичного отклонения функции от тригонометрического полинома. Тождество Бесселя. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Разложение функции в ряд Фурье, сходящийся в среднем квадратичном.
60. Неравенство Бесселя. Равенство Парсевала. Замкнутость тригонометрической системы функций. Однозначность определения функции своим рядом Фурье.
61. Теорема Римана о стремлении коэффициентов Фурье к нулю. Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье. Ядро Дирихле и его свойства.
62. Признак Дини сходимости ряда Фурье. Поточечная сходимости ряда Фурье кусочно-гладких функций.
63. Разложение синуса в бесконечное произведение.
64. Равномерная сходимости ряда Фурье непрерывных кусочно-гладких функций. Интегрирование рядов Фурье.
65. Семейства функций, зависящих от параметров. Поточечная и равномерная сходимости. Достаточное условие равномерной сходимости. Метрический критерий равномерной сходимости. Равномерная сходимости семейства функций на языке последовательностей. Непрерывность предельной функции.
66. Собственные интегралы, зависящие от параметров, с постоянными пределами интегрирования. Предельный переход по параметру под знаком интеграла. Непрерывность интеграла по параметрам. Дифференцирование и интегрирование интеграла по параметру в случае постоянных пределов интегрирования.

67. Собственные интегралы, зависящие от параметров, с переменными пределами интегрирования. Непрерывность интеграла по параметрам. Дифференцирование интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования.
68. Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла.
69. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметров.
70. Непрерывность несобственного интеграла по параметрам. Дифференцирование и интегрирование несобственного интеграла по параметру.
71. Гамма-функция и бета-функция. Множества сходимости эйлеровых интегралов. Равномерная сходимость. Разложение гамма-функции в бесконечное произведение.
72. Свойства гамма-функции: формула понижения, аналитическое продолжение гамма-функции в комплексную плоскость, формула дополнения.
73. Свойства гамма-функции: формула удвоения Лежандра, формула умножения Гаусса (без доказательства). Связь между эйлеровыми интегралами.
74. Формула Стирлинга.
75. Понятие интеграла Фурье. Интегральная формула Фурье. Комплексная запись интеграла Фурье. Прямое и обратное преобразование Фурье. Формулы обращения.
76. Свойства преобразования Фурье: линейность, ограниченность, непрерывность. Преобразование Фурье производной. Связь между гладкостью функции и скоростью убывания её преобразования Фурье. Производная преобразования Фурье.
77. Преобразование Фурье бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Формула Планшереля. Преобразование Фурье свёртки функций.
78. Понятие асимптотической последовательности и асимптотического разложения. Единственность асимптотического разложения. Операции со степенными асимптотическими рядами: арифметические операции, почленное интегрирование и дифференцирование.
79. Формула суммирования Эйлера-Маклорена.
80. Лемма Ватсона.

4 семестр

81. Внутренняя и внешняя мера Жордана и их свойства.
82. Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства измеримых множеств.
83. Свойства меры Жордана: конечная аддитивность, мера прямого произведения множеств. Мера графика непрерывной на компакте функции.
84. Определение кратного интеграла Римана. Интегральные суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости.
85. Интегрируемость непрерывных функций. Связь между интегрируемостью и ограниченностью.
86. Интегрируемость разрывных функций.
87. Четыре основных свойства интеграла. Интегральная теорема о среднем.
88. Сведение двойного интеграла к повторному.
89. Сведение кратного интеграла к повторному.
90. Замена переменных в двойном интеграле.
91. Определение несобственного кратного интеграла. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения.
92. Несобственный кратный интеграл сходится тогда и только тогда, когда он абсолютно сходится.
93. Длина кривой. Аддитивность длины. Вычислительная формула для длины непрерывно дифференцируемой кривой.

94. Криволинейные интегралы первого рода и их свойства. Вычислительная формула.
95. Криволинейные интегралы второго рода и их свойства. Вычислительная формула.
96. Формула Грина.
97. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Критерий полного дифференциала в односвязной области.
98. Первая квадратичная форма поверхности. Площадь поверхности.
99. Ориентация поверхности и её края. Кусочно-гладкие поверхности.
100. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Вычислительные формулы.
101. Формула Стокса.
102. Векторная трактовка формулы Стокса. Геометрическое определение ротора векторного поля.
103. Формула Гаусса-Остроградского, её векторная трактовка. Геометрическое определение дивергенции векторного поля.
104. Полилинейные антисимметричные формы. Внешнее произведение форм и его свойства.
105. Дифференциальные формы. Операции внешнего дифференцирования и переноса форм, их свойства.
106. Понятие многообразия. Ориентация многообразия и его края. Интегрирование дифференциальных форм на многообразии. Общая формула Стокса (без доказательства).

Примерные экзаменационные задачи

Семестр 2

1. Найти интегралы:

1. $\int \frac{(2^x + 3^x)^2}{6^x} dx$

6. $\int \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{e^x - e^{-x}}} dx$

2. $\int \frac{(3 - 2x^2) dx}{3x^2 + x + 1}$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}$

3. $\int \frac{\operatorname{ctg} x \ln \sin x}{\sqrt{1 + \ln \sin x}} dx$

8. $\int \frac{\sin \frac{2}{x}}{x^3} dx$

4. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{ctg} x}{\cos^2 x} dx$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 2x}$

5. $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$

10. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

2. Найти $\int f(x) dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 1 - |x|, & |x| > 1 \end{cases}$$

3. Вычислить интегралы

а) $\int_0^{\pi^2} \cos^2 \sqrt{x} dx$;

б) $\int_{e^3}^{e^8} \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx$.

4. Найти промежутки монотонности функции

$$F(x) = \int_0^{\frac{\sqrt{x}}{x+100}} e^{-t^2} dt$$

5. При каких значениях параметра k функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{kx} - 1) & \text{если } 0 < k \leq 1 \\ 1 & \text{если } 1 < k \leq x \end{cases}$$

имеет первообразную на $[-1, 1]$? Ответ обосновать.

6. Найти длину дуги кривой $x^2 = 5y^3$, если $x^2 + y^2 \leq 6$.

7. Найти площадь поверхности вращения дуги кривой $y = 2 \cos \frac{\pi x}{2}$, $|x| \leq 1$, вокруг оси абсцисс. Изобразить эту поверхность.

8. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - x}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx$

б) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg \frac{1}{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

в) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} (1 + \sqrt[3]{x^2 + 1})} dx$

9. Найти и изобразить множество задания функции

$$f(x, y) = \frac{3^{\sqrt{y}}}{\sqrt[8]{\arctg e^x - y}} + \sqrt[4]{\arccos x - y}$$

и выяснит, будет ли оно ограниченным в \mathbf{R}^2 ? Ответ обосновать.

10. Будет ли функция $y(x)$, определяемая условием $e^{4x-2}(y + e^y + 5) = 1$, удовлетворять дифференциальному уравнению $(1 + e^y)^2 y'' = 4y'e^y(4 + y)$?

11. Для функции $z(x, y)$ вычислить $\vec{\nabla} z(1, -1)$, если $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u + v$, $u > 0$.

12. Будет ли функция $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ удовлетворять неравенству $|f(x, y)| \leq \frac{13}{5}$, если $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$?

13. Будет ли функция $z(x, y)$ иметь в точке $(1, 1)$ локальный экстремум, если $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 72$ и $z(1, 1) = 4$?

14. Найти локальные экстремумы функции трех переменных $u = x^2 + y^2 - 7z^2$.

Семестр 3

1. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{1+n^3(x+1)^2}$$

на множестве $E = [-2; +\infty]$.

2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2 \cos \cos 2x}{1+n^4 x^6}$$

на множестве ее задания.

3. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n^2 x}$$

на множестве ее задания.

4. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

5. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах интервала

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{3^n + 2^n}$.

6. Разложить функцию $f(x) = 8 + x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$.

7. Разложить функцию $f(x) = 1 - 7x$ в ряд Фурье на отрезке $[0; 2\pi]$.

8. Разложить функцию $f(x) = 9,5$ в ряд Фурье по синусам и по косинусам на отрезке $[-2; 1]$.

Семестр 4

1. Переменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x, y) dy$$

2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G \frac{x^2}{y^2} dx dy,$$

где фигура G ограничена кривыми $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

3. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = 0$, $y = x$.

4. Найти объём трехмерного тела, ограниченного поверхностями

$$2z = x^2, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad 3x + 2y = 12, \quad x \geq 0.$$

5. Переходя к полярным координатам, вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V z dx dy dz,$$

где тело V характеризуется условиями $z \leq x^2 + y^2$, $y \geq x$, $y \leq 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

6. Будет ли сходящимся ряд $\sum_{k=2}^{\infty} mD_k$, где mD_k - мера плоского множества, ограниченного

кривыми $x = 1$, $x = k$, $y = 0$, $y = \begin{cases} \sin x, & 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{k^2} \\ \frac{2^{-k}}{x^4}, & 1 + \frac{1}{k^2} < x \leq k \end{cases}$.

7. Вычислить криволинейный интеграл первого типа $\int_{\Gamma} (x + 4y) ds$ вдоль правой петли плоской кривой, заданной в полярных координатах условиями $r^2 = \cos 2\varphi$, $x \geq 0$.
8. При помощи криволинейных интегралов вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ и осями координат.
9. Вычислить поверхностный интеграл первого типа $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, где поверхность S характеризуется условиями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 2x$.
10. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x^3 + yz)\vec{i} + (y^3 + zx)\vec{j} + (z^3 + xy)\vec{k}$ через верхнюю сторону полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.
11. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (y - z, z - x, x - y)$ вдоль эллипса $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, пробегаемого по ходу часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z .
12. Возможен ли выбор ненулевых параметров α, β, γ так, чтобы векторное поле $\vec{a} = [\alpha e^x \sin y + (\beta - 3)z]\vec{i} + (e^x \cos y - 2y + \gamma)\vec{j} + (\alpha\beta - \gamma y)\vec{k}$ было потенциальным в \mathbf{R}^3 ?

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. ОПК1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Вопросы к экзамену	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Волкова, Т. В. Курс математического анализа для студентов-бакалавров инженерных факультетов : учебное пособие / Т.В. Волкова. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 268 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1013010. - ISBN 978-5-16-014950-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1013010> (дата обращения: 05.05.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Садовничая, И. В. Математический анализ. Дифференцирование функции одной переменной: теория и задачи : учебное пособие для студентов 1 курса университетов / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова. — Москва : Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2015. — 152 с. — ISBN 978-5-19-011094-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/97503.html> (дата обращения: 05.05.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

7.2. Дополнительная литература:

1. Абрамян, М. Э. Лекции по дифференциальному исчислению функций одной переменной : учебник / М. Э. Абрамян : Южный федеральный университет. - Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020. - 228 с. - ISBN 978-5-9275-3495-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1308345> (дата обращения: 05.05.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Шершнева, В. Г. Математический анализ : учебное пособие / В. Г. Шершнева. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 288 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-005488-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1008011> (дата обращения: 05.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

НАУЧНО-ПРОЕКТНЫЙ СЕМИНАР

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Звонарев Д.С. Научно-проектный семинар. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Звонарев Д.С., 2021.

1. Пояснительная записка

Научно-проектный семинар направлен на формирование у студентов навыков выполнения научно-исследовательской работы и написания теоретического проекта по современным направлениям математики. В рамках этого семинара студенты освоят основы проведения научного поиска по проблемам научного исследования в патентных базах, базах, депонирующих научные статьи из журналов, научатся анализировать и обобщать полученные материалы, оформлять готовый научный проект, публично защищать свой научный проект

Для выполнения выпускной квалификационной работы и дальнейшей профессиональной деятельности студентам необходимы навыки выполнения научно-исследовательских проектов. Научно-исследовательский проект включает в себя научное обоснование проблемы, выполнение экспериментальных работ. В рамках научно-проектного семинара студенты освоят навыки выполнения научно-исследовательской работы и написания теоретического проекта по современным направлениям математики. В рамках этого семинара студенты освоят основы проведения научного поиска по проблемам математики в патентных базах, базах, депонирующих научные статьи из журналов, научатся анализировать и обобщать полученные материалы, оформлять готовый научный проект, публично защищать свой научный проект. В рамках семинара студентам будет предложено избрать направление математики, по которому будет выполняться теоретический проект, спланировать научный проект, выполнить его и публично защитить его.

Цель: формирование и развитие у студентов необходимых способностей и навыков самостоятельной научно-исследовательской и практической деятельности, оформления полученных результатов в соответствии с принятыми стандартами, умения представить результаты работы в виде научного доклада и убедительно защитить их в дискуссии со специалистами

Задачи: сформировать умение выстраивать логику исследовательского поиска (формулировать проблему, тему, разработать цель и задачи исследования, определить этапы и средства поиска оптимальных решений); обеспечить развитие исследовательской компетентности студентов

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули).

Научно-исследовательская (курсовая) работа является обязательной для студентов. Она базируется на компетенциях, приобретенных в процессе изучения предшествующих дисциплин. Обучающийся должен быть способным к обобщению и анализу информации, постановке цели и выбору путей её достижения; владеть основными способами получения и переработки информации.

Знания и умения, полученные в результате научно – исследовательской работы являются необходимой основой для подготовки выпускной квалификационной работы.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОПК-1 - способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и	Знает фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. Умеет использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.

использовать их в профессиональной деятельности	
ОПК-2 - способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	Знает новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении. Умеет разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении.
ОПК-3 - способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	Знает способы использования в педагогической деятельности научных знаний в сфере математики и информатики. Умеет использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики.
ОПК-4 - способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	Знает способы решения задач профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности. Умеет решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности.
ПК-1 - способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области	Знает, как передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области Умеет передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области.
ПК-2 - способен использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях	Знает методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях. Умеет использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях.
ПК-3 - способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения;	Знает разработку и применение алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения. Умеет разрабатывать и применять алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения.

ПК-4 - способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств	Знает основы математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств. Умеет постигать основы математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств.
ПК-5 - способен пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования	Знает, как пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования. Умеет пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования.

2. Структура и трудоемкость дисциплины

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре	
			6 семестр	7 семестр
Общий объем	зач. ед.	8	4	4
	час	288	144	144
Из них:				
Часы контактной работы (всего):		104	52	52
Лекции		0	0	0
Практические занятия		100	50	50
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0	0
Консультации и иная контактная работа		4	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		184	92	92
Вид промежуточной аттестации			Экзамен	Экзамен

3. Система оценивания

Оценка формируется, исходя из следующих критериев:

- Уровень развития навыков технологической готовности к работе в современных условиях (оценивается общая дидактическая, методическая, техническая подготовка по проведению научных исследований).
- Уровень развития исследовательской деятельности студента (выполнение экспериментальных и исследовательских программ, степень самостоятельности, качество обработки полученных данных, их интерпретация, степень достижения выдвигаемых целей).
- Степень развития личностных качеств (культура общения, уровень интеллектуального, нравственного развития и др.).
- Уровень ответственного отношения к практике, к выполнению поручений руководителя.

Критерии оценивания:

Оценка «отлично» выставляется, если теоретическое содержание дисциплины освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей программой дисциплины учебные задания выполнены.

Оценка «хорошо» выставляется, если теоретическое содержание дисциплины освоено полностью, без пробелов, некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, все предусмотренные рабочей программой дисциплины учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей программой дисциплины учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, возможно, содержат ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если теоретическое содержание дисциплины не освоено. Необходимые практические навыки работы не сформированы.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины (модуля), час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
6 семестр						
1	Научный семинар	70	0	50	0	0
2	Научно-исследовательская работа	72	0	0	0	0
3	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого за 6 семестр	144	0	50	0	2
7 семестр						
1	Научный семинар	70	0	50	0	0
2	Научно-исследовательская работа	72	0	0	0	0
3	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого за 7 семестр	144	0	50	0	2
	Итого (часов)	288	0	100	0	4

4.2. Содержание дисциплины (модуля) по темам

6 семестр:

- 1) Научный семинар

Проводится серия научных семинаров, на которых преподаватели кафедры знакомят студентов с направлениями своих научных исследований.

- 2) Научно-исследовательская работа
Подготовка курсовой работы, презентации и доклада к защите курсовой работы на экзамене
- 3) Экзамен
Защита курсовой работы. На защита курсовой работы подводятся итоги защит проектов. Основанием для получения положительной оценки является выполненный готовый научный проект. Проект должен пройти защиту, должен быть представлен в оформленном виде (машинописный текст с полным библиографическим списком, оформленный в соответствии с требованиями). публичная защита проводится в форме доклада с презентацией.

7 семестр:

- 1) Научный семинар
Проводится серия научных семинаров, на которых преподаватели кафедры знакомят студентов с направлениями своих научных исследований.
- 2) Научно-исследовательская работа
Подготовка курсовой работы, презентации и доклада к защите курсовой работы на экзамене
- 3) Экзамен
Защита курсовой работы. На защита курсовой работы подводятся итоги защит проектов. Основанием для получения положительной оценки является выполненный готовый научный проект. Проект должен пройти защиту, должен быть представлен в оформленном виде (машинописный текст с полным библиографическим списком, оформленный в соответствии с требованиями). публичная защита проводится в форме доклада с презентацией.

Защита курсовой работы в 6 и 7 семестрах осуществляется публично. Форма публичной защиты определяется кафедрой (заседание кафедры, выступление на практическом занятии, выступление на научной конференции, семинаре, круглом столе).

Защита включает в себя:

- доклад обучающегося об основных результатах работы продолжительностью до 10 минут с использованием при необходимости наглядных материалов и компьютерной техники;
- вопросы присутствующих и научного руководителя к докладчику;
- ответы докладчика на вопросы;
- оглашение отзыва научного руководителя, включая сведения об оригинальности работы.

Экзамен выставляется по итогам оценки содержания работы, ее оформления, уровня доклада (логика изложения, грамотность речи и др.), качества презентационного материала, ответов на вопросы в ходе защиты.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

№ темы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
6 семестр		
1	Научный семинар	Углубленное изучение проблемы и уточнение темы исследования. Обоснование актуальности темы

		курсовой работы. Постановка цели и задач исследования, определения объекта и предмета, предполагаемых новизны и практической значимости результатов. Выполнение прикладных или теоретических задач исследования. Описание процесса исследования и обсуждение результатов.
2	Научно-исследовательская работа	Работа над рукописью исследования, оформления, курсовой работы
3	Экзамен	Защита курсовой работы
7 семестр		
1	Научный семинар	Углубленное изучение проблемы и уточнение темы исследования. Обоснование актуальности темы курсовой работы. Постановка цели и задач исследования, определения объекта и предмета, предполагаемых новизны и практической значимости результатов. Выполнение прикладных или теоретических задач исследования. Описание процесса исследования и обсуждение результатов.
2	Научно-исследовательская работа	Работа над рукописью исследования, оформления, курсовой работы
3	Экзамен	Защита курсовой работы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю)

6.1 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Защита курсовой работы в 6 и 7 семестрах осуществляется публично. Форма публичной защиты определяется кафедрой (заседание кафедры, выступление на практическом занятии, выступление на научной конференции, семинаре, круглом столе).

Защита включает в себя:

- доклад обучающегося об основных результатах работы продолжительностью до 10 минут с использованием при необходимости наглядных материалов и компьютерной техники;
- вопросы присутствующих и научного руководителя к докладчику;
- ответы докладчика на вопросы;
- оглашение отзыва научного руководителя, включая сведения об оригинальности работы.

Экзамен выставляется по итогам оценки содержания работы, ее оформления, уровня доклада (логика изложения, грамотность речи и др.), качества презентационного материала, ответов на вопросы в ходе защиты.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1	ОПК-1 - способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Защита курсовой работы	Отлично - Теоретическое содержание дисциплины освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей программой дисциплины учебные задания выполнены. Хорошо - Теоретическое содержание дисциплины освоено полностью, без пробелов, некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, все предусмотренные рабочей программой дисциплины учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Удовлетворительно - Теоретическое содержание
2	ОПК-2 - способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1. Разрабатывает новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении. ОПК-2.2. Анализирует новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении. ОПК-2.3. Внедряет новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении.		
3	ОПК-3 - способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1. Использует в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики.		

4	ОПК-4 - способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	ОПК-4.1. Решает задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности		дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство
5	ПК-1 - способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области	ПК-1.1. Осуществляет передачу результатов проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области.		предусмотренных рабочей программой дисциплины учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, возможно, содержат ошибки. Неудовлетворительно - Теоретическое содержание дисциплины не освоено. Необходимые
6	ПК-2 - способен использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях	ПК-2.1. Использует методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, экономике, бизнесе и гуманитарных областях.		практические навыки работы не сформированы.
7	ПК-3 - способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения	ПК-3.1. Разрабатывает алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения. ПК-3.2. Применяет алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения.		

8	ПК-4 - способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств	ПК-4.1. Понимает основы математических моделей реального объекта или процесса. ПК-4.2. Готов применять моделирование для построения объектов и процессов, предсказания их свойств.		
9	ПК-5 - способен пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования	ПК-5.1. Пользуется заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией. ПК-5.2. Оценивает возможный результат моделирования.		

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1 Основная литература:

- 1) Авдониная Л. Н. Письменные работы научного стиля: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Л. Н. Авдониная, Т.В. Гусева - М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 72 с.: Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=563093> (дата обращения: 30.04.2020). - Режим доступа: по подписке
- 2) Бушенева, Ю.И. Как правильно написать реферат, курсовую и дипломную работы [Электронный ресурс]/ Ю.И. Бушенева. - М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. - 140 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=415294> (дата обращения: 30.04.2020). - Режим доступа: по подписке.
- 3) Графф, Д. Как писать убедительно: Искусство аргументации в научных и научно-популярных работах / Графф Д., Биркенштайн К. - Москва :Альпина Пабл., 2016. - 258 с.: ISBN 978-5-9614-4648-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/913593> (дата обращения 30.04.2020). - Режим доступа: по подписке.

7.2 Дополнительная литература:

- 1) Кузнецов, И. Н. Рефераты, курсовые и дипломные работы. Методика подготовки и оформления : учебно-методическое пособие / И. Н. Кузнецов. - 9-е изд., перераб. — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2020. — 204 с. - ISBN 978-5-394-03673-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1093240> (дата обращения: 30.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при изучении дисциплины, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

- пакет программ Microsoft Office 2010/2013/365;
- Windows 8/10;
- Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:

- пакет программ OpenOffice;
- браузер Google Chrome (или аналогичный);

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории, оборудованные компьютерами с доступом в Интернет и мультимедиа-проектором.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук


23.06.2021

М.Н. Первалова

СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 – Математика

Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения очная

Мачулис В.В. Системы компьютерной математики. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 – Математика, профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ, форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Мачулис В.В., 2021.

1. Пояснительная записка

Современные исследования не только в области естественных, но и в области гуманитарных наук невозможны без математического моделирования и точных количественных методов исследования, широкого использования современных вычислительных средств.

Целью данного курса является знакомство студентов с одной из современных систем компьютерной математики Maple.

Задачи курса:

- 1) представление о современных инструментальных средствах научного исследования;
- 2) знакомство с математическим и компьютерным моделированием;
- 3) развитие логического и алгоритмического мышления студентов.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в блок «Б1 Дисциплины (модули). Обязательная часть» и изучается в пятом семестре.

При этом для успешного освоения дисциплины студенты должны обладать базовыми знаниями, умениями и навыками, приобретенными при изучении математики в общеобразовательной школе.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Код и наименование части компетенции (<i>при наличии паспорта компетенций</i>)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
ОПК-4: Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий с учётом основных требований информационной безопасности	–	Знает: основные операции системы Maple, их применимость Умеет: использовать систему Maple для вычислений, а также программирования различных математических задач; пользоваться справочной системой для нахождения подходящих методов решения задач.

ОПК-5: Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	–	Знает: методы разработки алгоритмов в системе Maple Умеет: применять систему Maple для программирования различных математических задач.
ПК-3: Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения	–	Знает: методы реализации различных алгоритмов в системе Maple Умеет: применять систему Maple для вычислений, а также программирования различных математических задач; пользоваться справочной системой для нахождения подходящих методов решения задач.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре (5 семестр)
Общая трудоемкость	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		0	0
Практические занятия		0	0
Лабораторные/практические занятия по подгруппам		64	64
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		78	78
Вид промежуточной аттестации			Зачет

3. Система оценивания

Оценивание достижений обучающихся в течение семестра осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы. Баллы начисляются студентам следующим образом:

1. решение задач на практическом занятии и домашняя работа – от 3-х до 8-ми баллов в зависимости от занятия;
2. контрольная работа – 8 баллов.

Студенты, получившие по итогам работы в семестре не менее 61 балла, получают зачет по дисциплине автоматически. Студенты, не получившие зачёт по дисциплине автоматически, должны сдавать зачёт.

В контрольную работу включаются типы задач, рассмотренных на практических занятиях.

Оценка студенту выставляется пропорционально числу правильно решённых в контрольной работе задач.

Оценка снижается на 3 балла при условии:

- Студент допустил одну грубую ошибку в конкретной задаче;
- Студент допустил два недочёта в конкретной задаче.

При наличии двух грубых ошибок в одной задаче задача считается нерешенной.

Ошибки и недочёты одного типа группируются и считаются за одну ошибку или недочёт.

Зачёт проводится в форме тестирования. Вопросы для подготовки к зачёту и примерный вариант тестовых заданий представлены ниже.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
5 семестр						
1	Знакомство с системой Maple.	6	0	0	3	0
2	Выражения, функции и уравнения.	8	0	0	3	0
3	Графики в различных системах координат.	8	0	0	3	0
4	Производная и приложения производной.	8	0	0	3	0
5	Интегралы от функций одной переменной, приложения интеграла.	8	0	0	3	0
6	Дифференциальные уравнения.	8	0	0	3	0
7	Программирование в Maple. Условный оператор,	8	0	0	4	0

	логические операторы, циклы, процедуры.					
8	Некоторые специальные пакеты Maple: linalg, DEtools, VecCalc.	8	0	0	6	0
9	Пакет DynamicSystems.	8	0	0	3	0
10	Начало работы в Matlab'е. Одномерные и двумерные массивы.	8	0	0	3	0
11	Математические операции с массивами. Работа с данными. Импорт и экспорт.	8	0	0	3	0
12	Графики на плоскости.	8	0	0	3	0
13	Программирование: циклы, условный оператор, команды прерывания.	8	0	0	4	0
14	Функции пользователя.	8	0	0	3	0
15	Приложения к численному анализу. Полиномы и интерполяция.	8	0	0	4	0
16	Решение дифференциальных уравнений в Matlab'е.	8	0	0	6	0
17	Трехмерные графики.	8	0	0	3	0
18	Символьная математика в Matlab'е.	8	0	0	4	0
	Зачет	2	0	0	0	2
	Итого	144	0	0	64	0

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Знакомство с системой Maple. Maple как калькулятор. Переменные. Команды алгебраических преобразований. Простейшие графики.

Тема 2. Выражения, функции и уравнения. Задание выражений и функций. Уравнения с одной неизвестной. Уравнения с двумя и более неизвестными.

Тема 3. Графики в различных системах координат. Графики функций. Различные системы координат. Изолированные точки. Параметрические кривые. Обращение функций. Кривые в полярной системе координат.

Тема 4. Производная и приложения производной. Дифференцирование функций. Дифференцирование выражений. Дифференцирование неявных функций. Линейная аппроксимация. Локальные экстремумы. Наименьшие и наибольшие значения функции на промежутке.

Тема 5. Интегралы от функций одной переменной, приложения интеграла. Интегралы от функций одной переменной. Визуализация сумм Римана. Вычисление интегралов. Интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных дробей. Приближенное вычисление интегралов. Площади, объемы. Длина кривой и площадь поверхности.

Тема 6. Дифференциальные уравнения. Точное аналитическое решение. Поле направлений. Численное решение дифференциальных уравнений. Системы дифференциальных уравнений.

Тема 7. Программирование в Maple. Условный оператор, логические операторы, циклы, процедуры. Типичные ошибки в работе с Maple. Отладка процедур. On-Line Help.

Тема 8. Некоторые специальные пакеты Maple: linalg, DEtools, VecCalc. Работа с пакетами Maple. Решение задач линейной алгебры, дифференциальных уравнений, аналитической геометрии.

Тема 9. Пакет DynamicSystems. Решение задач качественной теории дифференциальных уравнений. Построение фазовых портретов.

Тема 10. Начало работы в Matlab'е. Одномерные и двумерные массивы. Рабочее пространство. Арифметические операции с числами. Оператор присваивания. Создание массивов. Одномерные и многомерные массивы. Простейшие операции с массивами.

Тема 11. Математические операции с массивами. Работа с данными. Импорт и экспорт. Сложение, вычитание, умножение и деление. Поэлементные операции с массивами. Использование массивов как аргументов функций. Функции обработки массивов. Импорт и экспорт данных. Сохранение и загрузка. Команды вывода на экран и на принтер.

Тема 12. Графики на плоскости. Команда plot. Команда fplot. Построение нескольких графиков в одном окне. Форматирование графиков. Специальная графика системы Matlab. Полярные координаты.

Тема 13. Программирование: циклы, условный оператор, команды прерывания. Циклы for-end и while-end. Вложенные циклы и вложенные условные переходы. Команды break и continue.

Тема 14. Функции пользователя. Создание файла-функции. Локальные и глобальные переменные. Сравнение скрипт-файлов и файл-функций. Дескрипторные функции и Inline функции. Под функции и встроенные функции.

Тема 15. Приложения к численному анализу. Полиномы и интерполяция. Задание полиномов. Построение кривой по точкам с помощью полинома. Построение кривой по точкам с помощью функций, отличных от полиномов. Интерполяция. Приближенное решение уравнений с одной неизвестной. Нахождение наибольших и наименьших значений функции на отрезке. Интегрирование.

Тема 16. Решение дифференциальных уравнений в Matlab'е. Решение начальной задачи в ОДУ. Решатели дифференциальных уравнений, их сравнение. Примеры приложений.

Тема 17. Трехмерные графики. Линия в пространстве. Поверхность в пространстве. Специальная графика системы. Редактирование графиков.

Тема 18. Символьная математика в Matlab'е. Создание символьного объекта. Создание символьного выражения. Преобразование символьных выражений. Решение алгебраических уравнений. Дифференцирование и интегрирование. Решение дифференциальных уравнений. Построение графиков символьных выражений.

Средства для проведения текущего контроля

Типовые задания для контрольной работы



приближенного решения уравнения

состоит в нахождении последовательных приближений

$f(x) = 0$ применяется метод Ньютона,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Используя этот метод, найти все решения уравнений с точностью до 25 знаков после запятой:

(а) $x^3 - 13x - 7 = 0$;

(б) $4 \cos x = 0,9x$.

2. (а) Найти кубический полином $ax^3 + bx^2 + cx + d$, который имеет локальный минимум в точке $(-1; -2)$ и локальный максимум в точке $(4; 4)$. Представить график.

(б) Нарисовать график функции

$$y = \frac{x \ln x}{x^2 + x + 4} .$$

Найти экстремумы и точки перегиба.

3. Кривая $y = 3 + \cos x$ вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения на участке $0 \leq x \leq 4\pi$. Построить график поверхности.

Найти объем тела вращения как функцию от x и построить ее график при $x \in [0; 10\pi]$.

4. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases} ,$$

А также фазовый портрет системы, получающейся из данной путем поворота осей координат на угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Вывести уравнения осей координат в обоих случаях.

5. Найти разложения функции

$$y = \frac{x^4 - 15x^2 + 2x - 5}{x^2 - 6}$$

в ряд Тэйлора с 4-го по 10-й порядок в окрестности точки $x = 1$. Построить график функции и всех приближений на $[-1; 2]$. Оценить погрешность каждого приближения.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся (изменить)

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
	3 семестр	
1	Знакомство с системой Maple.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Выражения, функции и уравнения.	Выполнение домашних заданий
3	Графики в различных системах координат.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Производная и приложения производной.	Выполнение домашних заданий
5	Интегралы от функций одной переменной, приложения интеграла.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Дифференциальные уравнения.	Выполнение домашних заданий
7	Программирование в Maple. Условный оператор, логические операторы, циклы, процедуры.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Некоторые специальные пакеты Maple: linalg, DEtools, VecCalc.	Выполнение домашних заданий
9	Пакет DynamicSystems.	Выполнение домашних заданий и проектов
10	Начало работы в Matlab'e. Одномерные и двумерные массивы.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
11	Математические операции с массивами. Работа с данными. Импорт и экспорт.	Выполнение домашних заданий
12	Графики на плоскости.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
13	Программирование: циклы, условный оператор, команды прерывания.	Выполнение домашних заданий
14	Функции пользователя.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
15	Приложения к численному анализу. Полиномы и интерполяция.	Выполнение домашних заданий
16	Решение дифференциальных уравнений в Matlab'e.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
17	Трёхмерные графики.	Выполнение домашних заданий
18	Символьная математика в Matlab'e.	Выполнение домашних заданий и проектов

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Зачёт проводится в форме тестирования. Вопросы для подготовки к зачёту и примерный вариант тестовых заданий представлены ниже

Примерный вариант тестовых заданий для зачёта:

1. Найти первые 10 производных функции

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

Вычислить их в точке $x = 0$.

Если данная производная положительна в $x = 0$, то найти ее значение и в точке

$x = \frac{\pi}{2}$. Если значение производной в $x = 0$ равно 0, то не вычислять ее

в точке $x = \frac{\pi}{2}$. Если значение производной в нуле отрицательно, то не вычислять следующие производные.

2. Написать процедуру вычисления чисел Фибоначчи

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Вывести график в виде ломаной линии, соединяющей точки $(k; F_k)$ для

$k = 1, \dots, n$, если $n < 20$.

3. Для уравнения $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 48$ найти касательную в точке

$(2; 2)$. Построить на одном рисунке графики уравнения и касательной.

4. Вывести полную таблицу истинности для формулы

$$p \vee \neg q s \Rightarrow (\neg p \vee q) \neg s$$

5. Найти значение с точностью до 0.0001 и 0.000001 ближайшего к нулю положительного корня уравнения $\sin(\cos x^3) = 0$, используя метод дихотомии.

6. Найти длину дуги кривой $y = x^3$ на отрезке $[0; 1]$ и площадь поверхности тела вращения, образованного этой кривой (вокруг оси Oх). Вычисления произвести методами Симпсона и Гаусса-Лобатто с точностью до 0.0000001.

7. На параболе $y = x^2$ найти точку, ближайшую к точке $A(3; 1)$.

8. Построить приближающие полиномы 2-й, 3-й и 4-й степеней для данных

	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
	1.00	1.48	1.84	2.00	1.91	1.60	1.14

Вывести графики.

9. Найти решение задачи Коши

$$y'' - y' - 6y = 2 \cos 3t$$

$(0; 2; -1)$. Вывести графики приближенного и точного решений (использовать Maple для нахождения точного решения).

10. Найти значение суммы $\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{n+k}{n^2+k^2}$ с точностью до 0.000001.
11. Найти решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -x^2 + y = 1 \end{cases}$ с точностью до 0.000001.
12. Написать скрипт, который выводит для $N < 12$ $n!$, $n = 1, \dots, N$, а также сумму всех данных факториалов, как показано ниже для $N = 2$.
- Ввести $N < 12$: 2
 Для $n = 1$, $1! = 1$
 Для $n = 2$, $2! = 2$
 Сумма этих 2-х факториалов равна 3.
13. Написать скрипт, который строит матрицу $A(n \times n)$ с элементами +1 и -1. Элементы должны чередоваться по каждой строке и каждому столбцу. Элемент $a_{11} = 1$.
14. Рассмотреть разностное уравнение $x(n+1) = x^2(n) + 0,25$, $n = 1, \dots, N$. Для $x_0 = 0$ и $n = 0, \dots, 100$ написать два скрипта. В первом применить for-цикл, а во втором – while-цикл. Построить график отображения $x(n)$ для $n = 0, 5, 10, \dots, 100$.
15. Написать файл-функцию, которая вычисляет амплитуду, частоту и фазу колебаний $A \sin at + B \cos at$. Построить график колебаний на отрезке $[-2\pi k; 2\pi k]$.

Вопросы к зачету

1. Алгебраические преобразования.
2. Тригонометрические преобразования.
3. Решение алгебраических уравнений и неравенств.
4. Решение тригонометрических уравнений.
5. Построение графиков функций, заданных явно, неявно и параметрически.
6. Решение простейших задач аналитической геометрии.
7. Решение простейших задач линейной алгебры.
8. Создание и редактирование графиков функций двух переменных.
9. Вычисление пределов функций и исследование непрерывности.
10. Нахождение производных и неопределенных интегралов обычным и smart-способом.
11. Нахождение наибольших и наименьших значений функций.
12. Вычисление площадей фигур и объемов тел.
13. Доказательство сходимости (расходимости) несобственных интегралов.
14. Разложение функций в ряд и исследование его сходимости.

15. Аналитическое и численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.
16. Определение типа дифференциального уравнения. Построение интегральных кривых.
17. Построение фазовых траекторий на плоскости. Задание поля направлений. Исследование решений на устойчивость.
18. Основы программирования в Maple: выражения и их типы.
19. Операторы Maple.
20. Процедуры. Отличие процедуры Maple от процедур в других языках программирования.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Карта критериев оценивания компетенций

Таблица 5

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-4. Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	ОПК-4.1. Решает задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	Контрольная работа, выполнение проекта, зачет.	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий.

2.	ОПК-5: Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.1. Разрабатывает алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	Контрольная работа, выполнение проекта, зачет.	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий.
3.	ПК-3. Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения	ПК-3.1. Разрабатывает алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения ПК-3.2. Применяет алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения	Контрольная работа, выполнение проекта, зачет.	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

7.1. Основная литература:

1. Дьяконов, В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. — Москва : СОЛОН-ПРЕСС, 2017. — 720 с. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/90431.html> (дата обращения: 12.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

2. Егоров, А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple: Учебное пособие / Егоров А.И. - Москва :СОЛОН-Пр., 2016. - 392 с.: ISBN 978-5-91359-205-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/858610> (дата обращения: 12.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

3. Системы компьютерной математики: приемы работы в среде MATLAB : учебное пособие / И. М. Беспалова, К. И. Мартынчик, А. В. Марковец, А. Г. Усов. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2019. — 108 с. — ISBN 978-5-7937-1757-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

<http://www.iprbookshop.ru/102558.html> (дата обращения: 12.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/102558>

7.2. Дополнительная литература

1. Плохотников, К. Э. Базовые разделы математики для бакалавров в среде MATLAB [Электронный ресурс] / К. Э. Плохотников. - Москва : Инфра-М; Вузовский Учебник; Znanium.com, 2014. - 571 с. - ISBN 978-5-16-102366-2 (online). - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/496199> (дата обращения: 12.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

2. Кузнецова, О. С. Математический анализ. Сборник задач и решений с применением системы Maple : учебное пособие / О.С. Кузнецова, М.Н. Кирсанов. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 375 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1160964. - ISBN 978-5-16-016476-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1160964> (дата обращения: 12.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

3. Кирсанов, М. Н. Математика и программирование в Maple : учебное пособие / М. Н. Кирсанов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 164 с. — ISBN 978-5-4497-0585-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/95593.html> (дата обращения: 12.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/95593>

4. Введение в математический пакет Matlab : учебно-методическое пособие / составители Т. И. Семенова [и др.]. — Москва : Московский технический университет связи и информатики, 2016. — 88 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/61469.html> (дата обращения: 05.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>

7.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

- Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: <https://icdlib.nspu.ru/>
- Национальная электронная библиотека. - URL: <https://rusneb.ru/>
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: <https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true>
- Orbit Intelligence. - URL: <https://www.orbit.com>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:
- платформа для электронного обучения MicrosoftTeams;
 - Maple 16;

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с мультимедийным оборудованием для практических занятий по подгруппам.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Первалова

23.06.2021

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика»
Профиль: «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Мосягин В.Е. Случайные процессы. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль: «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Мосягин В.Е., 2021.

1. Пояснительная записка

Цель курса «Случайные процессы»: систематично изложить основы современной теории случайных процессов – науки, изучающей семейства случайных величин и событий.

Задачи курса. Ознакомить студентов с основными классами случайных процессов (гауссовские, марковские, стационарные, с независимыми приращениями) и обеспечить усвоение основных разделов и методов теории, а также привлечь их внимание к богатому многообразию приложений. Создать у студентов достаточную теоретическую базу и сформировать практические навыки для решения практических задач.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Случайные процессы» входит в обязательную часть Блока 1. «Дисциплины (модули)» и изучается в седьмом семестре. Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Теория вероятностей», «Дифференциальные уравнения». Освоение дисциплины «Случайные процессы» необходимо для написания выпускной квалификационной работы.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Код и наименование компетенции	Код и наименование части компетенции (при наличии паспорта компетенций)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
ОПК-1 «способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности»	–	Знает: основные понятия и определения, формулировки основных утверждений и теорем, постановки стандартных задач; возможности применения изученного теоретического материала в профессиональной деятельности. Умеет: применять полученные знания для решения различных задач.
ОПК-2 «способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении»	–	Знает: основные понятия и определения теории; постановки классических задач; формулировки важнейших утверждений, возможные сферы их приложения. Умеет: решать задачи, использовать математические методы и модели для решения прикладных задач..
ПК-4 «способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности	–	Знает: основные понятия и определения теории; постановки классических задач; основные математические модели; формулировки важнейших

применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств»		утверждений, возможные сферы их приложения. Умеет: интерпретировать результаты исследования; самостоятельно проанализировать и объяснить характер поведения моделируемых систем.
--	--	---

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы	Всего часов (академические часы)	Часов в семестре (академические часы)
		7 семестр
Общий объем зач. ед. час.	4	4
	144	144
Из них:		
Часы контактной работы (всего):	66	66
Лекции	30	30
Практические занятия	34	34
Лабораторные/практические занятия по подгруппам	0	0
Консультации и иная контактная работа	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф.зачет, экзамен)	зачет	зачет

3. Система оценивания

3.1.

Для текущего контроля применяется 100-балльная система оценивания. Баллы проставляются за выполненные письменных контрольных работы по темам дисциплины. Результаты текущего контроля учитываются при промежуточной аттестации.

Вид промежуточной аттестации – зачет.

Перевод баллов при проведении зачета осуществляется по следующей шкале: от 61 до 100 баллов – «зачтено», от 0 до 60 баллов – «не зачтено».

Обучающиеся, не набравшие достаточного количества баллов для зачета, сдают зачет в период зачетной недели. Форма проведения зачета – итоговая контрольная работа. В контрольную работу включается теоретический вопрос и задачи, аналогичные задачам, разбираемым на практических занятиях. Зачет проводится в формате ответа на вопрос и решения задач в письменном виде.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
7 семестр						
1.	Основные понятия теории случайных процессов	22	4	4	0	0
2.	Свойства траекторий. Винеровский и пуассоновский процессы	24	6	6	0	0
3.	Линейная теория случайных процессов с конечными вторыми моментами	24	6	6	0	0
4.	Дискретные цепи Маркова	24	4	6	0	0
5.	Мартингалы	24	4	6	0	0
6.	Марковские процессы с непрерывным временем	24	6	6	0	0
	Зачет	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов

Определение случайного процесса, конечномерные распределения. Траектория процесса. Стохастически эквивалентные процессы. Сигма-алгебра цилиндрических множеств. Выборочное вероятностное пространство. Неизмеримость множества непрерывных функций относительно цилиндрической сигма-алгебры. Сепарабельные процессы. Семейство конечномерных распределений процесса. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях. Ковариационная функция комплекснозначного случайного процесса. Основные типы случайных процессов. Стохастически непрерывные и непрерывные в среднеквадратичном процессы. Процессы с непрерывными траекториями. Классы случайных процессов: гауссовские, марковские, стационарные, с независимыми приращениями. Однородные процессы с независимыми приращениями. Общий вид характеристической функции стохастически непрерывного однородного процесса с независимыми приращениями.

Тема 2. Свойства траекторий. Винеровский и пуассоновский процессы

Достаточные условия существования непрерывной модификации процесса; теорема Колмогорова. Достаточные условия существования модификации процесса без разрывов второго рода; теорема Колмогорова-Ченцова. Винеровский процесс; непрерывность его траекторий с вероятностью 1. Недифференцируемость траектории винеровского процесса в любой точке. Принцип отражения. Законы повторного логарифма. Распределение

функционалов: момента первого достижения заданного уровня, максимума траектории на отрезке; первого момента достижения максимума (закон арксинуса). Пуассоновский процесс; его стохастическая непрерывность. Представление пуассоновского процесса посредством случайного вариационного ряда из равномерного распределения. Ступенчатый характер траекторий пуассоновского процесса. Совместное распределение моментов скачков пуассоновского процесса. Сложный (обобщенный) пуассоновский процесс. Простейший поток однородных событий и его связь с пуассоновским процессом. Гауссовские распределения. Гауссовские процессы. Среднее значение и ковариационная функция. Броуновский мост.

Тема 3. Линейная теория случайных процессов с конечными вторыми моментами.

Гильбертово пространство L_2 случайных функций с конечным вторым моментом. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в L_2 траекторий процесса. Необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости. Непрерывность винеровского и пуассоновского процессов в L_2 . Недифференцируемость винеровского и пуассоновского процессов в L_2 . Стационарные процессы в узком и широком смысле, примеры. Теорема Бохнера–Хинчина для стационарных процессов. Спектральная функция и спектральная плотность. Интегрирование случайных процессов по ортогональной стохастической мере (стохастический интеграл). Спектральное представление стационарных процессов. Стохастический интеграл Ито. Стохастический дифференциал. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения.

Тема 4. Дискретные цепи Маркова.

Однородные цепи Маркова, примеры. Переходные вероятности. Уравнения Колмогорова–Чепмена. Классификация состояний цепи Маркова. Случайные блуждания в Z_n . Неприводимая цепь Маркова. Эргодическая теорема. Стационарное распределение. Система уравнений для вычисления стационарного распределения.

Тема 5. Мартингалы.

Обобщение понятия условного математического ожидания, его свойства. Мартингалы (субмартингалы, супермартингалы). Теорема Дуба об остановке. Задача о разорении. Мартингалные неравенства.

Тема 6. Марковские процессы с непрерывным временем.

Марковский однородный процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний, примеры. Марковость винеровских и пуассоновских процессов. Переходные вероятностные функции. Уравнения Колмогорова–Чепмена. Интенсивность переходов. Время пребывания процесса в данном состоянии. Непрерывность и дифференцируемость переходных вероятностных функций. Системы прямых и обратных дифференциальных уравнений Колмогорова. Решение систем уравнений Колмогорова для марковского процесса с конечным множеством состояний. Система уравнений для нахождения стационарного распределения. Процессы гибели и размножения; связь с теорией массового обслуживания; применение к расчету пропускной способности технических систем.

Планы практических занятий

Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов.

Определение случайного процесса. Траектория процесса. Стохастически эквивалентные процессы. Семейство конечномерных распределений процесса. Ковариационная функция случайного процесса. Стохастически непрерывные и непрерывные в среднеквадратичном процессы. Классы случайных процессов: гауссовские,

марковские, стационарные, с независимыми приращениями. Однородные процессы с независимыми приращениями.

Тема 2. Свойства траекторий. Винеровский и пуассоновский процессы

Теоремы Колмогорова и Колмогорова-Ченцова о существовании регулярных модификаций процесса. Винеровский процесс, принцип отражения. Ковариационная функция винеровского процесса. Пуассоновский процесс, свойства траекторий, его стохастическая непрерывность и ковариационная функция. Гауссовские процессы. Среднее значение и ковариационная функция. Броуновский мост.

Тема 3. Линейная теория случайных процессов с конечными вторыми моментами.

Гильбертово пространство L_2 случайных функций с конечным вторым моментом. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в L_2 траекторий процесса. Необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости. Стационарные процессы в узком и широком смысле. Спектральная функция и спектральная плотность. Интегрирование случайных процессов по ортогональной стохастической мере (стохастический интеграл). Спектральное представление стационарных процессов. Стохастический интеграл Ито. Стохастический дифференциал. Формула Ито.

Тема 4. Дискретные цепи Маркова.

Однородные цепи Маркова, примеры. Переходные вероятности. Классификация состояний цепи Маркова. Необходимые и достаточные условия возвратности. Теорема солидарности. Эргодические классы состояний. Стационарное распределение. Система уравнений для вычисления стационарного распределения.

Тема 5. Мартингалы.

Условное математическое ожидание. Его свойства. Проверка мартингальности последовательности случайных величин.

Тема 6. Марковские процессы с непрерывным временем.

Переходные вероятностные функции. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Стохастическая непрерывность. Интенсивности переходов. Время пребывания процесса в данном состоянии. Системы прямых и обратных дифференциальных уравнения Колмогорова. Решение систем уравнений Колмогорова для марковского процесса с конечным множеством состояний. Стационарное распределение и система уравнений для его отыскания. Процессы гибели и размножения.

Образцы средств для проведения текущего контроля

Задания, используемые для проведения текущего контроля, аналогичны заданиям, разбираемым на практических занятиях.

Задания для контрольных работ

1. Пусть $\xi(t) = at + \eta$, $t \geq 0$, где случайная величина $\eta \in N(0,1)$, $a = \text{const}$.
Найти конечномерные распределения процесса $\xi(t)$.
2. Найти ковариационные функции винеровского и пуассоновского процессов.
3. Пусть $\xi(t) = 2t + \eta$, $t \geq 0$, где $\eta \in K(0,1)$. Вычислить вероятность того, что процесс $\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in (0, 1/2]$.

4. Пусть ξ, η - случайные величины, причем $P(\xi = 0) = 0$, $P(\xi > 0) = P(\xi < 0)$. Найти вероятность того, что траектории процесса $\zeta(t) = \eta + t(\xi + t)$, $t \geq 0$ возрастают.
5. Пусть $(W_1(t), W_2(t))$, $t \geq 0$ – векторный процесс, составленный из независимых винеровских процессов. Доказать, что с вероятностью единица этот процесс выйдет из круга произвольного радиуса R с центром в $(0,0)$.
6. Пусть $\xi(t), t \geq 0$ - процесс с независимыми приращениями. Доказать, что функция $f(t) = D\xi(t)$ возрастает.
7. Пусть $X(t) = e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t})$, $t \in \mathbf{R}$, где W – винеровский процесс, константа $\alpha > 0$. Доказать, что X – стационарный гауссовский процесс и найти его спектральную плотность.
8. На вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{A} – σ -алгебра борелевских множеств и \mathbf{P} – мера Лебега, заданы случайные величины $\xi(\omega) = \omega$ и

$$\eta(\omega) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{3} \\ 1, & \text{если } \omega \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ 2, & \text{если } \frac{2}{3} \leq \omega < 1 \end{cases}$$

Найти $E(\xi / \eta)$.

9. Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют пуассоновское распределение с параметром λ , $S_n = (\xi_1 - \lambda)^2 + \dots + (\xi_n - \lambda)^2$. Доказать, что последовательность $X_n = S_n - n\lambda$, $n = 1, 2, \dots$ образует мартингал.
10. Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют одно и тоже дискретное распределение: $P(\xi_1 = 1) = p$, $P(\xi_1 = x) = 1 - p$. При каком значении x

последовательность $X_n = \prod_{k=1}^n \xi_k$ будет мартингалом.

11. Пусть X_n – последовательность, состоящая из независимых случайных величин со средним 0 и дисперсией σ^2 . Найти спектральную плотность процесса $X_n = (1/4)X_{n-1} + (1/2)X_{n-3} + \varepsilon_n$, $n \in \mathbf{Z}$, где величины ε_n , $n \in \mathbf{Z}$, независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.
12. Решить стохастическое дифференциальное уравнение $dX_t = aX(t)dt + bX(t)dW_t$, где W_t , $t \geq 0$ – винеровский процесс, a, b – константы, а $X(0) = X_0$.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№ тем	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Основные понятия теории случайных процессов	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, знакомство с содержанием электронных источников, решение задач, подготовка к практическим занятиям
2.	Свойства траекторий. Винеровский и пуассоновский процессы	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, знакомство с содержанием электронных источников, решение задач, подготовка к практическим занятиям
3.	Линейная теория случайных процессов с конечными вторыми моментами	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, знакомство с содержанием электронных источников, решение задач, подготовка к практическим занятиям
4.	Дискретные цепи Маркова	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, знакомство с содержанием электронных источников, решение задач, подготовка к практическим занятиям
5.	Мартингалы	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, знакомство с содержанием электронных источников, решение задач, подготовка к практическим занятиям
6.	Марковские процессы с непрерывным временем	Проработка лекций, чтение обязательной и дополнительной литературы, знакомство с содержанием электронных источников, решение задач, подготовка к практическим занятиям

Порядок выполнения каждого вида самостоятельной работы

1. Изучение лекционного материала по теме.
2. Изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы.
3. Ответы на пункты плана для практических занятий.
4. Разбор практических примеров, продемонстрированных на лекциях и решенных на практических занятиях.

Контроль за самостоятельной работой осуществляется при выполнении обучающимся контрольной работы.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма промежуточной аттестации - зачет

Билеты к зачету формируются из перечня вопросов:

1. Определение случайного процесса. Стохастически эквивалентные процессы. Неизмеримость множества непрерывных функций относительно цилиндрической сигма-алгебры
2. Семейство конечномерных распределений процесса. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях
3. Ковариационная функция комплекснозначного случайного процесса. Основные типы случайных процессов
4. Стохастически непрерывные и непрерывные в среднеквадратичном процессы. Процессы с непрерывными траекториями
5. Классы случайных процессов: гауссовские, марковские, стационарные, с независимыми приращениями
6. Однородные процессы с независимыми приращениями. Общий вид характеристической функции стохастически непрерывного однородного процесса с независимыми приращениями
7. Достаточные условия существования непрерывной модификации процесса; теорема Колмогорова
8. Достаточные условия существования модификации процесса без разрывов второго рода; теорема Колмогорова-Ченцова
9. Винеровский процесс; непрерывность его траекторий с вероятностью 1. Недифференцируемость траектории винеровского процесса в любой точке
10. Принцип отражения
11. Законы повторного логарифма
12. Распределение момента первого достижения заданного уровня
13. Распределение максимума траектории на отрезке
14. Распределение первого момента достижения максимума (закон арксинуса)
15. Пуассоновский процесс; его стохастическая непрерывность
16. Представление пуассоновского процесса посредством случайного вариационного ряда из равномерного распределения. Ступенчатый характер траекторий пуассоновского процесса
17. Совместное распределение моментов скачков пуассоновского процесса
18. Сложный (обобщенный) пуассоновский процесс. Простейший поток однородных событий и его связь с пуассоновским процессом
19. Гауссовские распределения. Гауссовские процессы. Среднее значение и ковариационная функция. Броуновский мост
20. Гильбертово пространство L_2 случайных функций с конечным вторым моментом. Непрерывность траекторий процесса. Необходимые и достаточные условия непрерывности
21. Дифференцируемость в L_2 . Необходимые и достаточные условия дифференцируемости
22. Интегрируемость траекторий процесса.
23. Недифференцируемость винеровского и пуассоновского процессов в L_2
24. Стационарные процессы в узком и широком смысле, примеры. Теорема Бохнера-Хинчина для стационарных процессов. Спектральная функция и спектральная плотность.
25. Интегрирование случайных процессов по ортогональной стохастической мере
26. Спектральное представление стационарных процессов
27. Стохастический интеграл Ито. Стохастический дифференциал
28. Формула Ито
29. Однородные цепи Маркова, примеры. Переходные вероятности. Уравнения Колмогорова-Чепмена

30. Классификация состояний цепи Маркова. Неразложимые цепи.
31. Обобщение понятия у.м.о. Определение
32. Геометрическая интерпретация у.м.о.
33. Простейшие свойства у.м.о., включая неравенство Чебышева
34. У.м.о. величины относительно независимой от нее сигма-алгебры
35. У.м.о. произведения величин, одна из которых измерима относительно сигма-алгебры
36. Формула повторного матожидания
37. Свойства последовательного усреднения
38. Определение мартингала (полумартингала): его свойства. Естественный поток сигма-алгебр
39. Сумма независимых величин – полумартингал. Пример
40. Теорема Дуба и ее следствия
41. Классификация состояний по асимптотическим свойствам. Необходимые и достаточные условия возвратности состояния
42. Теорема солидарности
43. Случайные блуждания в Z^n
44. Эргодическая теорема. Стационарное распределение. Система уравнений для вычисления стационарного распределения
45. Марковский однородный процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний, примеры
46. Марковость винеровских и пуассоновских процессов
47. Переходные вероятностные функции. Уравнения Колмогорова-Чепмена
48. Интенсивность переходов. Время пребывания процесса в данном состоянии
49. Непрерывность и дифференцируемость переходных вероятностных функций
50. Системы прямых и обратных дифференциальных уравнений Колмогорова
51. Система уравнений для нахождения стационарного распределения
52. Процессы гибели и размножения; связь с теорией массового обслуживания; применение к расчету пропускной способности технических систем

6.2. Критерии оценивания компетенций:

Таблица 4

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1 «способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности. ОПК-1.2. Использует фундаментальные	Контрольные работы в течение семестра. Теоретические вопросы к зачету.	Оценка за выполнение контрольной работы зависит от количества правильно решенных заданий. Оценка за ответ по билету зависит от полноты ответа на вопросы. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о

	использовать их в профессиональной деятельности»	знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности.		текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»
2.	ОПК-2 «способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении»	ОПК-2.1. Демонстрирует знание методов математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности. ОПК-2.2. Применяет методы математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности.	Контрольные работы в течение семестра. Теоретические вопросы к зачету.	Оценка за выполнение контрольной работы зависит от количества правильно решенных заданий. Оценка за ответ по билету зависит от полноты ответа на вопросы. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»
3.	ПК-4 «способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств»	ПК-4.1. Понимает основы математических моделей реального объекта или процесса ПК-4.2. Готов применять моделирование для построения объектов и процессов, предсказания их свойств	Контрольные работы в течение семестра. Теоретические вопросы к зачету.	Оценка за выполнение контрольной работы зависит от количества правильно решенных заданий. Оценка за ответ по билету зависит от полноты ответа на вопросы. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература:

1. Чернова, Н. М. Основы теории вероятностей: учебное пособие / Н. М. Чернова. - 2-е изд. - Москва: ИНТУИТ, 2016. - 107 с. - Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/100350> (дата обращения: 20.05.2020). - Режим доступа: для авториз. пользователей.

7.2. Дополнительная литература:

1. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 ч. : учеб. пособие для студентов вузов, обуч. по напр. и спец. физ.-мат. профиля/ И. А. Виноградова; И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. - 3-е изд., испр.. - Москва: Дрофа. - (Высшее образование. Современный учебник). Кн. 2: Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. - 2002. - 712 с.
2. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах: Учебное пособие. / Сапожников П.Н., Макаров А.А., Радионова М.В. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=548242> (дата обращения: 20.05.2020).
3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа: [учеб.]/ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 7-е изд.. - Москва: Физматлит, 2006. - 572 с.

7.3. Интернет-ресурсы

1. Федеральный портал «Российское образование»: <http://www.edu.ru>.
2. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU: <http://elibrary.ru>.

7.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ProQuest Dissertations &Theses Global / ФГБУ «Государственная публичная научно-техническая библиотека России». URL: <https://search.proquest.com/index>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- **Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:**
 1. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.
 2. Microsoft Office.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы. Для проведения занятий лекционного типа необходимо демонстрационное оборудование. Помещения для самостоятельной работы обучающихся должны быть оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети

"Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 – Математика

Профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Форма обучения очная

Басинский К.Ю. Теоретическая механика. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

1. Пояснительная записка

Теоретическая механика – это наука, изучающая основные законы механического взаимодействия, т.е. законы изменения взаимного расположения материальных тел или частиц с течением времени. Содержанием курса теоретической механики является изучение равновесия и движения абсолютно твердых тел, материальных точек и их систем. Дисциплина иллюстрирует метод познания закономерностей окружающего нас мира - от наблюдений к математической модели, ее анализ, получение решений и их применение в практической деятельности.

Задачами изучения дисциплины «Теоретическая механика» являются:

1. овладение понятиями и определениями, изложенными в курсе теоретической механики;
2. умение изучать и анализировать механические взаимодействия различных тел;
3. изучение способов теоретической механики, необходимых для исследования практических и теоретических вопросов науки и техники

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальные уравнения».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Планируемые результаты обучения (знаниевые/функциональные):
Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	Знает: теоретические основы и практические приложения разделов теоретической механики, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать математические методы для использования их в работе и научных исследованиях
Способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области (ПК-1)	Знает: типичные постановки задач теоретической механики; основные результаты в области теоретической механики. Умеет: ставить и решать задачи теоретической механики, включая решение задач с использованием вычислительных машин.

Способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств (ПК-4)	<p>Знает: теоретические основы и практические приложения разделов теоретической механики, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами</p> <p>Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать математические методы для использования их в работе и научных исследованиях</p>
--	--

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре	
			7 семестр	8 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	8	4	4
	час	288	144	144
Из них:				
Часы контактной работы (всего):		128	66	62
Лекции		60	30	30
Практические занятия		64	34	30
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0	0
Консультации и иная контактная работа		4	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		160	78	82
Вид промежуточной аттестации			Зачет	Экзамен

3. Система оценивания

7 семестр

Для текущего контроля используются контрольные работы. Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" или "хорошо" за три контрольные работы, то он получает оценку "зачтено" без сдачи зачета. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за две другие "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдать экзамен (без сохранения оценки).

Зачет проходит в виде собеседования по билету. Билет состоит из вопроса и задачи. Ответ на вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок. Оценка "зачтено" ставится, если результирующая оценка не ниже "удовлетворительно".

8 семестр

Для текущего контроля используются контрольные работы. Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" за три контрольные работы, то он получает оценку "отлично" без сдачи экзамена. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за две другие "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдать экзамен (без сохранения оценки).

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной

системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные /практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
7 семестр						
1	Кинематика точки.	14	3	3	0	0
2	Простейшие движения твердого тела	14	3	3	0	0
3	Движение твердого тела с одной неподвижной точкой	14	3	3	0	0
4	Сложное движение точки. Теорема Кориолиса	14	3	4	0	0
5	Сложное движение твердого тела.	14	3	4	0	0
6	Плоское движение твердого тела	14	3	3	0	0
7	Введение в динамику.	14	3	3	0	0
8	Постановка и методы решения основных задач динамики точки.	14	3	3	0	0
9	Несвободное движение точки. Уравнения Эйлера и уравнения Лагранжа 1-го рода.	14	3	3	0	0
10	Относительное движение точки. Движение точки вблизи поверхности Земли	16	3	5	0	0
	Зачет	2	0	0	0	2
	Итого за 7 семестр	144	30	34	0	2
8 семестр						

11	Геометрия масс	11	2	2	0	0
12	Динамические характеристики движения механической системы	11	2	2	0	0
13	Теорема о движении центра масс	10	2	2	0	0
14	Теорема об изменении кинетического момента	10	2	2	0	0
15	Теорема об изменении кинетической энергии	11	2	2	0	0
16	Движение точки переменной массы	11	2	2	0	0
17	Принцип Даламбера - Лагранжа	11	2	2	0	0
18	Уравнения Лагранжа второго рода	11	2	2	0	0
19	Вариационные принципы механики	11	2	2	0	0
20	Устойчивость равновесия механических систем	11	2	2	0	0
21	Малые колебания систем с одной и двумя степенями свободы	11	2	2	0	0
22	Основные положения теории удара	11	4	4	0	0
23	Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Элементарная теория гироскопа	12	4	4	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого за 8 семестр	144	30	30	0	2
	Итого (часов)	288	60	64	0	4

4.2. Содержание дисциплины по темам

Кинематика точки. Основные понятия кинематики. Системы отсчета, способы определения положения и движения точки, механической системы и твердого тела. Кинематические характеристики движения. Основные задачи кинематики. Способы задания движения точки. Определение скорости и ускорения в прямоугольных декартовых и в криволинейных координатах, в естественной системе координат.

Простейшие движения твердого тела. Определение кинематических характеристик движения тела и отдельных его точек. Формула Эйлера.

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Теорема Эйлера – Даламбера. Определение мгновенной угловой скорости, мгновенного углового ускорения тела, скоростей и ускорений точек тела. Кинематические уравнения Эйлера. Аскоиды. Движение свободного твердого тела.

Сложное движение точки. Теорема Кориолиса. Классификация движений. Теоремы о сложении скоростей и ускорений точки. Ускорение Кориолиса, причины его появления.

Сложное движение твердого тела. Сложение мгновенно поступательных и вращательных движений твердого тела. Пара вращений. Кинематический винт.

Плоское движение тела. Мгновенные центры скоростей и ускорений. Определение скоростей и ускорений точек тела. Центроиды.

Введение в динамику. Основные понятия динамики. Понятие силы в механике. Классификация сил. Момент силы относительно центра и оси. Главный вектор и главный момент системы сил, приложенных к твердому телу. Свойство внутренних сил. Понятие связей в механике. Классификация связей. Активные силы и реакции связей. Аксиома связей. Аксиоматика Галилея – Ньютона в классической механике.

Постановка и методы решения основных задач динамики точки. Постановка и методы решения основных задач динамики точки. Первые интегралы уравнений движения. Случаи приводимости решения основной задачи к квадратуре.

Несвободное движение точки. Уравнения Эйлера и уравнения Лагранжа 1-го рода. Несвободное движение материальной точки. Уравнение Эйлера и уравнения Лагранжа 1-го рода. Принцип Даламбера.

Относительное движение материальной точки. Движение точки вблизи поверхности Земли. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Принципы относительности Галилея – Ньютона. Относительный покой и относительное движение. Движение точки вблизи поверхности Земли. Закон Бэра. Маятник Фуко.

Геометрия масс. Центр масс. Тензор инерции, эллипсоид инерции, главные оси инерции и их свойства.

Динамические характеристики движения механической системы. Основные динамические характеристики движения механической системы: количество движения, кинетический момент, кинетическая энергия. Теорема Кенига. Вычисление элементарной и полной работы силы. Силовое поле. Силовая функция. Потенциальное силовое поле.

Теорема о движении центра масс. Законы сохранения движения центра масс. Теоремы об изменении количества движения.

Теорема об изменении кинетического момента. Законы сохранения кинетического момента.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Следствие из теоремы. Теоремы динамики для движения относительно центра масс.

Движение материальной точки переменной массы. Уравнение Мещерского. Вертикальное движение ракеты в однородном поле силы тяжести. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой.

Принцип Даламбера – Лагранжа. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Уравнение Даламбера – Лагранжа.

Уравнения Лагранжа второго рода. Лагранжевы координаты. Обобщенные силы. Уравнения движения в обобщенных координатах. Выражение кинетической энергии в обобщенных координатах. Интеграл энергии.

Вариационные принципы механики. Классификация принципов. Кинематически возможные движения по Гауссу. Принуждение и его механический смысл. Принцип наименьшего принуждения Гаусса. Свободная механическая система в смысле Герца. Принцип прямейшего пути Герца. Сравнение дифференциальных принципов в смысле их общности. Дифференциальные принципы как исходные положения для вывода уравнений движения механических систем. Кинематически возможные движения механической системы в смысле Гамильтона. Действие по Гамильтону. Принцип стационарного действия Гамильтона – Остроградского. Кинематически возможные движения системы в смысле Лагранжа. Действие по Лагранжу. Принцип стационарного действия Мопертюи – Лагранжа.

Принцип Якоби и геометрическая интерпретация задач динамики. Принцип Ферма и оптико-механическая аналогия. Кинетические фокусы. Сравнение интегральных принципов в смысле их общности. Интегральные принципы как исходные положения для установления экстремальных свойств движения механических систем.

Устойчивость равновесия механических систем. Определение устойчивости по Ляпунову. Уравнения возмущенного движения. Условия устойчивости стационарных движений консервативных систем. Функция Рауса. Устойчивость по первому приближению. Критерий Гурвица.

Малые колебания систем с одной и двумя степенями свободы. Теория малых колебаний. Выражение кинетической и потенциальной энергии системы в обобщенных координатах. Уравнения равновесия системы в обобщенных координатах. Устойчивость равновесия механической системы. Теорема Лагранжа – Дирихле. Критерий Сильвестра. Малые колебания системы с одной степенью свободы. Правила построения фазовых траекторий. Фазовый портрет консервативной системы. Диссипативная функция. Вязкое трение. Декремент затухающих колебаний. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении. Явление резонанса. Колебания систем с двумя степенями свободы. Частотное уравнение. Коэффициенты распределения форм колебаний. Нормальные координаты.

Основные положения теории удара. Основные понятия. Общие теоремы теории удара. Теорема Карно. Удар по вращающемуся телу. Центр удара.

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Элементарная теория гироскопа. Динамические уравнения Эйлера. Первые интегралы уравнений движения. Регулярная прецессия. Основное допущение элементарной теории гироскопа. Определение прецессии. Вынужденная прецессия. Интеграл Ковалевской.

Средства для проведения текущего контроля

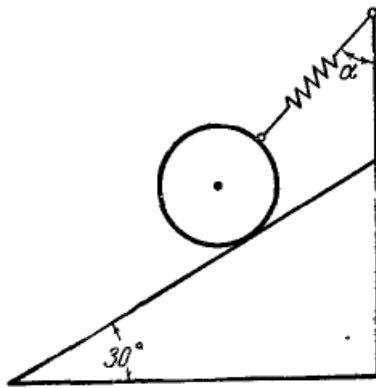
Для текущего контроля используются контрольные работы.

Примерные варианты контрольных работ

7 семестр

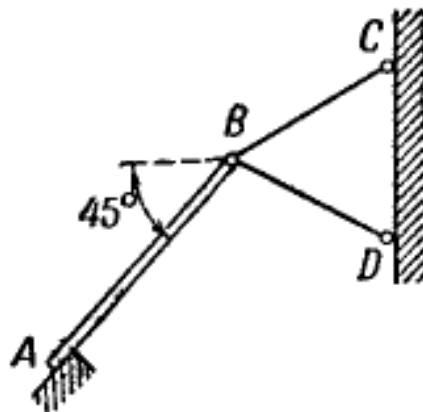
Контрольная работа № 1

1. Однородный шар веса 200 Н удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который привязан к пружинным весам, укрепленным над плоскостью; показание пружинных весов 100 Н . Угол наклона плоскости к горизонту равен 30° . Определить угол α , составляемый направлением троса с вертикалью, и давление Q шара на плоскость. Весом пружинных весов пренебречь.



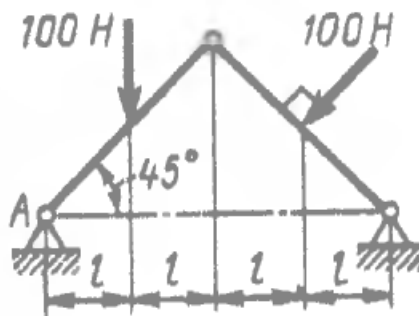
2. К однородному стержню, длина которого 3 м, а вес 6 Н, подвешены 4 груза на равных расстояниях друг от друга, причем два крайних — на концах стержня. Первый груз слева весит 2 Н, каждый последующий тяжелее предыдущего на 1 Н. На каком расстоянии x от левого конца нужно подвесить стержень, чтобы он оставался горизонтальным?

3. Однородная плита АВ веса $P=1000$ Н свободно опирается в точке А и удерживается под углом 45° к горизонту двумя стержнями ВС и BD. BCD — равносторонний треугольник. Точки С и D лежат на вертикальной прямой CD. Пренебрегая весом стержней определить реакцию опоры А и усилия в стержнях.

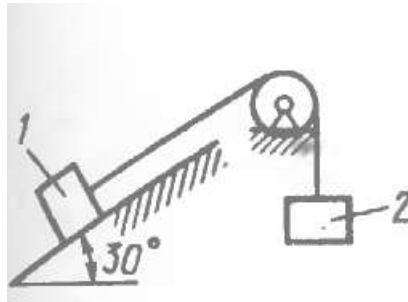


Контрольная работа № 2

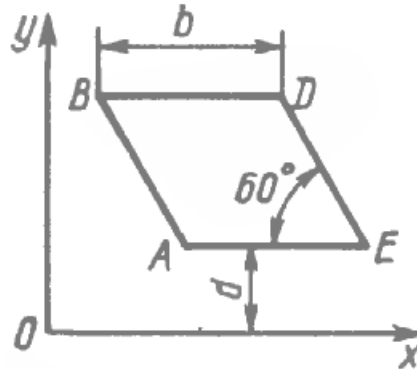
1. Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире А.



2. Каким должен быть наибольший вес груза 2, для того, чтобы груз 1 весом 100 Н оставался в покое на наклонной плоскости, если коэффициент трения скольжения $f=0,3$?



3. Однородная пластина ABDE имеет вид ромба со стороной $b=0,2$ м. Определить координату y_c центра тяжести ромба, если расстояние d от основания AE до оси Oх равно $0,1$ м.



Контрольная работа № 3

1. Колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1=20t$. Определить число оборотов, совершенных колесом 2 за время $t=3,14$ с, если радиусы колес $R_1=0,8$ м, $R_2=0,5$ м. (рис.1)
2. Тележка движется со скоростью $v_c=\sin(\pi/3)t$. Стержень O_1M длиной 1 м, закрепленный в центре тележки, движется по закону $\varphi=0,5\pi t$. Определить абсолютное ускорение конца стержня (точки M) в момент времени $t=0,5$ с. (рис.2)
3. Частота вращения коленчатого вала двигателя 4200 об/мин. Определить скорость движения поршня B, если в данный момент времени мгновенный центр скоростей P шатуна AB находится на расстояниях $AP=0,18$ м, $BP=0,1$ м; длина кривошипа $OA=0,04$ м. (рис. 3)

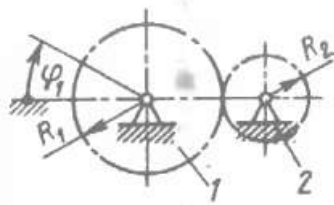


Рис. 1

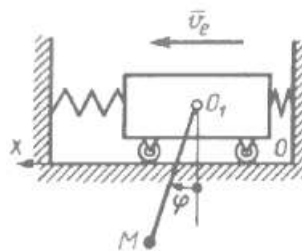


Рис. 2



Рис. 3

8 семестр

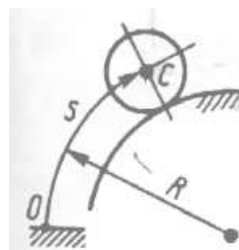
Контрольная работа № 1

1. Материальная точка движется в горизонтальной плоскости Oxy . Определить величину силы, действующей на нее в плоскости движения, если ее радиус-вектор $\mathbf{r} = 0,6t^2\mathbf{i} + 0,5t^2\mathbf{j}$, а масса $m = 9$ кг.
2. Материальная точка, масса которой $m = 250$ кг, движется по горизонтальной оси Ox . При этом на точку действует сила сопротивления движению $R = 5v^2$. Определить скорость точки через 6 с после начала движения, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ $v_{x0} = 20$ м/с.
3. Тело массой $m = 9$ кг, подвешенное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 90$ Н/м, начало совершать вертикальные колебания из положения статического равновесия. Определить начальную скорость тела, если амплитуда колебаний равна 0,1 м.

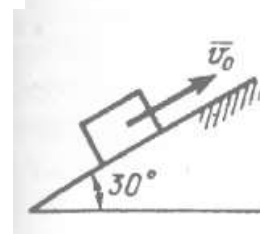
Контрольная работа № 2

Вариант 1

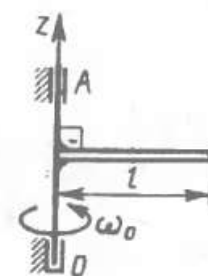
1. Определить величину главного вектора внешних сил, приложенных к колесу массой $m=15$ кг. Центр масс колеса при движении описывает окружность радиуса $R=1,3$ м, при этом его дуговая координата изменяется согласно закону $s=4t$.



2. Телу, находящемуся на шероховатой наклонной поверхности, сообщили начальную скорость $v_0=20$ м/с. Найти время, через которое тело остановилось, если коэффициент трения скольжения $f=0,1$.

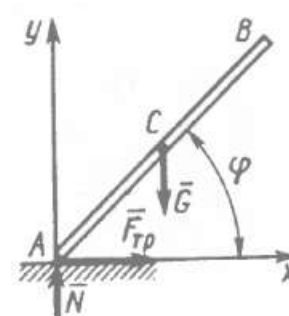


3. Однородный стержень, масса которого $m=3$ кг, а длина $l=1$ м, вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega_0=24$ рад/с. В некоторый момент времени к валу OA прикладывается постоянный момент сил торможения, и стержень останавливается через 4 с. Определить модуль этого момента.

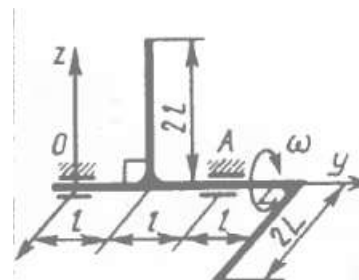


Контрольная работа № 3

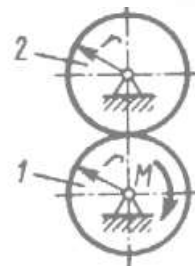
1. Однородный стержень, находясь на горизонтальной шероховатой плоскости, начинает падать в вертикальной плоскости. Определить величину нормальной реакции N , если масса стержня $m=2$ кг, угол $\varphi=45^\circ$, $a_{cy}=-5,64$ м/с². (д.у. движения)



2. Определить величину динамической реакции подшипника А, возникающей при вращении двух одинаковых стержней, если угловая скорость ω постоянна и равна 8 рад/с. Массы стержней $m=1$ кг, размер $l=0,2$ м.



3. Определить угловое ускорение диска 1, если на него действует пара сил с моментом $M=0,4$ Н*м. Массы и радиусы однородных дисков одинаковы: $m=10$ кг, $r=0,2$ м. (уравнение Лагранжа 2-го рода)



5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1	Кинематика точки.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Простейшие движения твердого тела	Проработка лекций
3	Движение твердого тела с одной неподвижной точкой	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Сложное движение точки. Теорема Кориолиса	Проработка лекций
5	Сложное движение твердого тела.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Плоское движение твердого тела	Проработка лекций
7	Введение в динамику.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Постановка и методы решения основных задач динамики точки.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
9	Несвободное движение точки. Уравнения Эйлера и уравнения Лагранжа 1-го рода.	Проработка лекций
10	Относительное движение точки. Движение точки вблизи поверхности Земли	Чтение обязательной и дополнительной литературы
11	Геометрия масс	Проработка лекций
12	Динамические характеристики движения механической системы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
13	Теорема о движении центра масс	Проработка лекций
14	Теорема об изменении кинетического момента	Чтение обязательной и дополнительной литературы

15	Теорема об изменении кинетической энергии	Чтение обязательной и дополнительной литературы
16	Движение точки переменной массы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
17	Принцип Даламбера - Лагранжа	Чтение обязательной и дополнительной литературы
18	Уравнения Лагранжа второго рода	Проработка лекций
19	Вариационные принципы механики	Чтение обязательной и дополнительной литературы
20	Устойчивость равновесия механических систем	Проработка лекций
21	Малые колебания систем с одной и двумя степенями свободы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
22	Основные положения теории удара	Проработка лекций
23	Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Элементарная теория гироскопа	Чтение обязательной и дополнительной литературы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

7 семестр

Зачет проходит в виде собеседования по билету. Билет состоит из вопроса и задачи. Ответ на вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок. Оценка "зачтено" ставится, если результирующая оценка не ниже "удовлетворительно".

8 семестр

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

Примерные вопросы для подготовки к зачету

1. Определение скорости, касательного, нормального и полного ускорений точки при естественном способе задания движения.
2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение угловой скорости, углового ускорения тела, скорости и ускорения точки тела.
3. Сложное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений. Ускорение Кориолиса.
4. Плоское движение тела. Мгновенный центр скоростей точек плоской фигуры.
5. Момент силы относительно центра и оси
6. Постановка основных задач динамики материальной точки.
7. Несвободное движение материальной точки. Уравнение Эйлера.
8. Относительное движение материальной точки
9. Моменты инерции механической системы. Осевой момент инерции кольца, диска, стержня, цилиндра. Теорема Штейнера. Главные оси инерции их свойства.
10. Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения механической системы.

11. Теоремы об изменении кинетического момента системы. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
12. Элементарная и полная работа переменной силы. Работа силы тяжести и линейной силы упругости.
13. Вычисление кинетической энергии механической системы в различных движениях. Теорема Кенига.
14. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной механической энергии
15. Принцип Даламбера для точки и ее системы. Главный вектор и главный момент сил и инерции твердого тела.

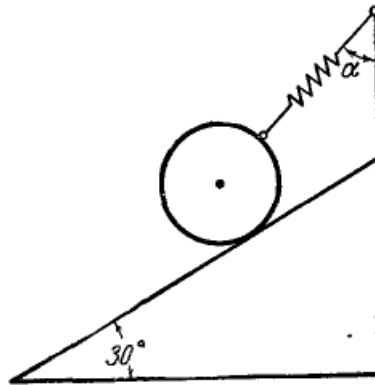
Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Определение скорости, касательного, нормального и полного ускорений точки при естественном способе задания движения.
2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение угловой скорости, углового ускорения тела, скорости и ускорения точки тела.
3. Сложное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений. Ускорение Кориолиса.
4. Плоское движение тела. Мгновенный центр скоростей точек плоской фигуры.
5. Момент силы относительно центра и оси
 6. Постановка основных задач динамики материальной точки.
 7. Несвободное движение материальной точки. Уравнение Эйлера.
 8. Относительное движение материальной точки
 9. Моменты инерции механической системы. Осевой момент инерции кольца, диска, стержня, цилиндра. Теорема Штейнера. Главные оси инерции их свойства.
 10. Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения механической системы.
 11. Теоремы об изменении кинетического момента системы. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
 12. Элементарная и полная работа переменной силы. Работа силы тяжести и линейной силы упругости.
 13. Вычисление кинетической энергии механической системы в различных движениях. Теорема Кенига.
 14. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Закон сохранения полной механической энергии
 15. Принцип Даламбера для точки и ее системы. Главный вектор и главный момент сил и инерции твердого тела.
 16. Действительные и возможные перемещения механической системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Уравнения равновесия системы в обобщенных координатах.
 17. Общее уравнение динамики
 18. Уравнение Лагранжа второго рода
 19. Обобщенные силы и способы их вычисления
 20. Устойчивость равновесия механической системы. Теорема Лагранжа – Дирихле. Критерий Сильвестра.
 21. Малые колебания механических систем с одной и двумя степенями свободы. Частота, период, амплитуда и фаза колебания. Затухающие колебания. Явление резонанса. Частотное уравнение. Коэффициенты распределения форм колебаний

Примерные задания для подготовки к зачету и экзамену

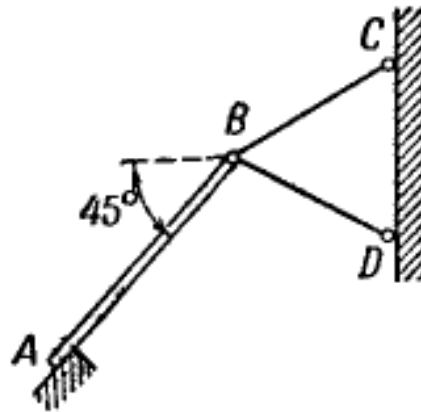
7 семестр

1. Однородный шар веса 200 Н удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который привязан к пружинным весам, укрепленным над плоскостью; показание пружинных весов 100 Н . Угол наклона плоскости к горизонту равен 30° . Определить угол α , составляемый направлением троса с вертикалью, и давление Q шара на плоскость. Весом пружинных весов пренебречь.

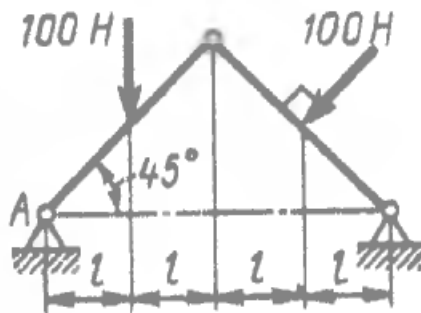


2. К однородному стержню, длина которого 3 м , а вес 6 Н , подвешены 4 груза на равных расстояниях друг от друга, причем два крайних — на концах стержня. Первый груз слева весит 2 Н , каждый последующий тяжелее предыдущего на 1 Н . На каком расстоянии x от левого конца нужно подвесить стержень, чтобы он оставался горизонтальным?

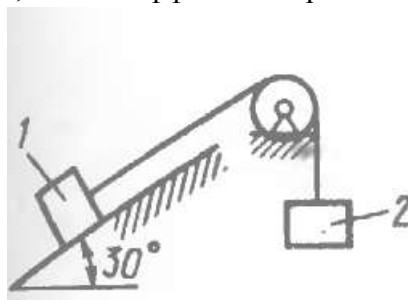
3. Однородная плита AB веса $P=1000\text{ Н}$ свободно опирается в точке A и удерживается под углом 45° к горизонту двумя стержнями BC и BD . BCD — равносторонний треугольник. Точки C и D лежат на вертикальной прямой CD . Пренебрегая весом стержней определить реакцию опоры A и усилия в стержнях.



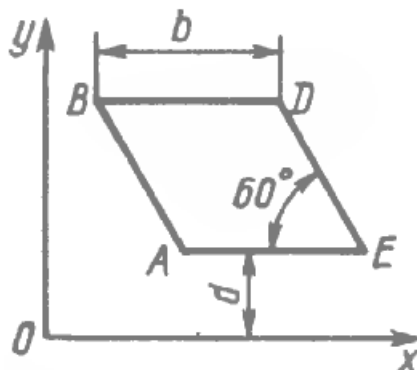
4. Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире A .



5. Каким должен быть наибольший вес груза 2, для того, чтобы груз 1 весом 100 Н оставался в покое на наклонной плоскости, если коэффициент трения скольжения $f=0,3$?



6. Однородная пластина ABDE имеет вид ромба со стороной $b=0,2$ м. Определить координату y_c центра тяжести ромба, если расстояние d от основания AE до оси Oх равно 0,1 м.



7. Колесо 1 вращается согласно закону $\phi_1=20t$. Определить число оборотов, совершенных колесом 2 за время $t=3,14$ с, если радиусы колес $R_1=0,8$ м, $R_2=0,5$ м. (рис.1)

8. Тележка движется со скоростью $v_e=\sin(\pi/3)t$. Стержень O_1M длиной 1 м, закрепленный в центре тележки, движется по закону $\phi=0,5 \pi t$. Определить абсолютное ускорение конца стержня (точки M) в момент времени $t=0,5$ с. (рис.2)

9. Частота вращения коленчатого вала двигателя 4200 об/мин. Определить скорость движения поршня В, если в данный момент времени мгновенный центр скоростей Р шатуна АВ находится на расстояниях $AP=0,18$ м, $BP=0,1$ м; длина кривошипа $OA=0,04$ м. (рис. 3)

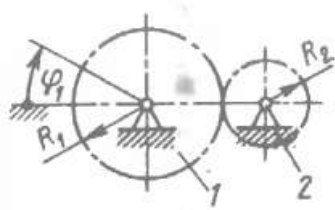


Рис. 1

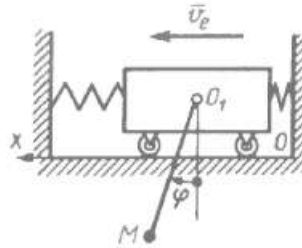


Рис. 2



Рис. 3

8 семестр

1. Материальная точка движется в горизонтальной плоскости Oxy . Определить величину силы, действующей на нее в плоскости движения, если ее радиус-вектор $\mathbf{r} = 0,6t^2\mathbf{i} + 0,5t^2\mathbf{j}$, а масса $m = 9$ кг.

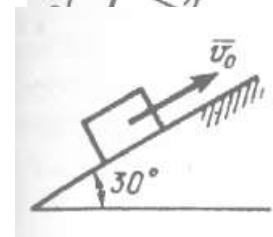
2. Материальная точка, масса которой $m = 250$ кг, движется по горизонтальной оси Ox . При этом на точку действует сила сопротивления движению $R = 5v^2$. Определить скорость точки через 6 с после начала движения, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ $v_{x0} = 20$ м/с.

3. Тело массой $m = 9$ кг, подвешенное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 90$ Н/м, начало совершать вертикальные колебания из положения статического равновесия. Определить начальную скорость тела, если амплитуда колебаний равна 0,1 м.

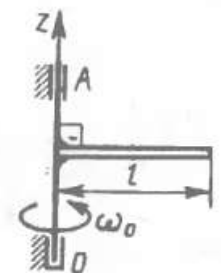
4. Определить величину главного вектора внешних сил, приложенных к колесу массой $m=15$ кг. Центр масс колеса при движении описывает окружность радиуса $R=1,3$ м, при этом его дуговая координата изменяется согласно закону $s=4t$.



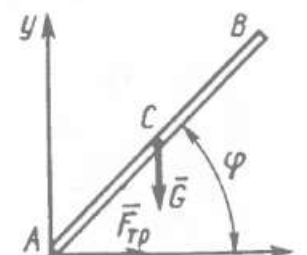
5. Телу, находящемуся на шероховатой наклонной поверхности, сообщили начальную скорость $v_0=20$ м/с. Найти время, через которое тело остановилось, если коэффициент трения скольжения $f=0,1$.



6. Однородный стержень, масса которого $m=3$ кг, а длина $l=1$ м, вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega_0=24$ рад/с. В некоторый момент времени к валу OA прикладывается постоянный момент сил торможения, и стержень останавливается через 4 с. Определить модуль этого момента.

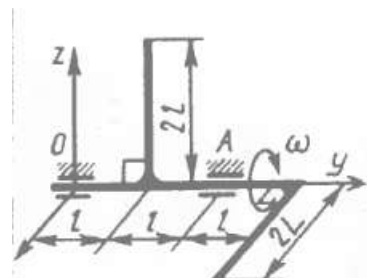


7. Однородный стержень, находясь на горизонтальной шероховатой плоскости, начинает падать в вертикальной плоскости. Определить

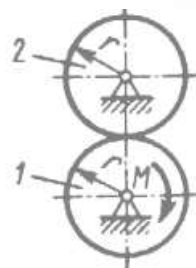


величину нормальной реакции N , если масса стержня $m=2$ кг, угол $\varphi=45^\circ$, $a_{cy}=-5,64$ м/с². (д.у. движения)

8. Определить величину динамической реакции подшипника А, возникающей при вращении двух одинаковых стержней, если угловая скорость ω постоянна и равна 8 рад/с. Массы стержней $m=1$ кг, размер $l=0,2$ м.



39. Определить угловое ускорение диска 1, если на него действует пара сил с моментом $M=0,4$ Н*м. Массы и радиусы однородных дисков одинаковы: $m=10$ кг, $r=0,2$ м. (уравнение Лагранжа 2-го рода)



6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	<p>ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук</p> <p>ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.</p>	Контрольная работа, зачет, экзамен	<p>Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок.</p> <p>Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий.</p> <p>Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.</p>
2	Способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в	ПК-1.1. Осуществляет передачу результатов проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и	Контрольная работа, зачет, экзамен	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок.

	<p>виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области (ПК-1)</p>	<p>организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области.</p>		<p>Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий.</p> <p>Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.</p>
3	<p>Способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств (ПК-4)</p>	<p>ПК-4.1. Понимает основы математических моделей реального объекта или процесса</p> <p>ПК-4.2. Готов применять моделирование для построения объектов и процессов, предсказания их свойств</p>	<p>Контрольная работа, зачет, Экзамен</p>	<p>Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок.</p> <p>Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий.</p> <p>Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения</p>

				текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.
--	--	--	--	--

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Цывильский, В. Л. Теоретическая механика: Учебник / Цывильский В.Л., - 5-е изд., перераб. и доп. - Москва :КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 368 с.:. - ISBN 978-5-906923-71-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/939531> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Белов, М. И. Теоретическая механика / М. И. Белов, Б. В. Пылаев. - 2-е изд. - Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2020. - 336 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-01574-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1048445> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
3. Бурчак, Г. П. Теоретическая механика : учеб. пособие / Г.П. Бурчак, Л.В. Винник. — Москва : ИНФРА-М, 2018. — 271 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — www.dx.doi.org/10.12737/9955. - ISBN 978-5-16-009648-3. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/942814> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Литвинова, Э. В. Теоретическая механика: Учебно-методическое пособие для выполнения расчетно-графической работы по статике / Литвинова Э.В., Пшеничная-Ажермачёва К.С. - Москва :НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 74 с. (Крымский федеральный университет 100 лет)ISBN 978-5-16-106881-6 (online). - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/978523> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Кирсанов, М. Н. Решения задач по теоретической механике : учеб. пособие / М.Н. Кирсанов. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 216 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-010558-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1021962> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
3. Медведев, Б. В. Начала теоретической физики. Механика, теория поля, элементы квантовой механики : учебное пособие / Б. В. Медведев. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 600 с. - ISBN 978-5-9221-0770-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544710> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Maple.
5. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Первалова

23.06.2021

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика»
Профиль: «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Бутакова Н.Н. Теория вероятностей. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль: «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Бутакова Н.Н., 2021.

1. Пояснительная записка

Цель курса «Теория вероятностей»: систематическое изложение основ современной теории вероятностей на базе теории меры и интеграла Лебега.

Основные задачи дисциплины состоят в создании достаточной теоретической базы; в выработке практических навыков решения задач; воспитании у студентов культуры мышления и доказательства математических утверждений; развитии математической культуры и интуиции.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей» входит в обязательную часть Блока 1. «Дисциплины (модули)» и изучается в шестом семестре. Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Комплексный анализ». Освоение дисциплины «Теория вероятностей» необходимо для изучения дисциплины «Случайные процессы» и написания выпускной квалификационной работы.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Код и наименование компетенции	Код и наименование части компетенции (при наличии паспорта компетенций)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
ОПК-1 «способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности»	–	Знает: основные понятия и определения, формулировки основных утверждений и теорем, постановки стандартных задач; возможности применения изученного теоретического материала в профессиональной деятельности. Умеет: применять полученные знания для решения различных задач.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы	Всего часов (академические часы)	Часов в семестре (академические часы)
		6 семестр
Общий объем зач. ед. час.	4	4
	144	144
Из них:		
Часы контактной работы (всего):	66	66
Лекции	30	30
Практические занятия	34	34

Лабораторные/практические занятия по подгруппам	0	0
Консультации и иная контактная работа	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф.зачет, экзамен)	экзамен	экзамен

3. Система оценивания

3.1.

Для текущего контроля применяется 100-балльная система оценивания. Баллы проставляются за выполненные письменных контрольных работы по каждой теме дисциплины. Результаты текущего контроля учитываются при промежуточной аттестации. Вид промежуточной аттестации – экзамен.

Обучающиеся, набравшие в течение семестра: от 61 до 75 баллов, получают оценку «удовлетворительно»; от 76 до 90 баллов – «хорошо»; 91 балл и выше – «отлично». Обучающиеся, не набравшие достаточное количество баллов или желающие повысить оценку, сдают экзамен.

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи. На подготовку к ответу отводится не более 60-90 минут. Ответы на теоретические вопросы и решение задачи оцениваются по 100-балльной шкале. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое оценок за ответы на вопросы и решение задачи. При результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «неудовлетворительно». Студенты, набравшие от 61 до 75 баллов, получают оценку «удовлетворительно»; от 76 до 90 баллов – «хорошо»; 91 балл и выше – «отлично».

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
6 семестр						
1.	Элементы комбинаторики	16	2	4	0	0
2.	Вероятностное пространство	16	4	4	0	0

3.	Условные вероятности. Независимость событий	18	4	4	0	0
4.	Независимые испытания	20	4	4	0	0
5.	Случайные величины и случайные векторы	20	4	6	0	0
6.	Числовые характеристики конечномерных распределений	20	4	4	0	0
7.	Характеристические и производящие функции	16	4	4		
8.	Предельные теоремы	16	4	4		
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Элементы комбинаторики.

Выборки из конечной генеральной совокупности: упорядоченные и неупорядоченные, с возвращением и без возвращения. Принцип умножения. Основные комбинаторные понятия и формулы. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты. Бином Ньютона. Полиномиальная схема.

Тема 2. Вероятностное пространство.

Случайный эксперимент и пространство элементарных исходов. Случайные события и операции над ними; сигма-алгебра событий. Закон устойчивости относительных частот. Статистическое определение вероятности. Аксиоматика Колмогорова. Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Свойства вероятностей; теорема об эквивалентности аксиом аддитивности и непрерывности вероятности. Дискретное вероятностное пространство. Распределение вероятностей. Классическая вероятность. Континуальное вероятностное пространство. Геометрическая вероятность, как непрерывный аналог классической вероятности.

Тема 3. Условные вероятности. Независимость событий.

Условная вероятность. Независимость событий (попарная и в совокупности). Формула полной вероятности. Задача о разорении игрока. Формула полной вероятности для условных вероятностей. Формула Байеса для апостериорной вероятности.

Тема 4. Независимые испытания.

Прямое произведение вероятностных пространств. Определение независимых испытаний. Биномиальная и полиномиальная схемы независимых испытаний. Связь биномиального и гипергеометрического распределений. Предельные теоремы для биномиальной и полиномиальной схем (теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона).

Тема 5. Случайные величины и случайные векторы.

Сигма-алгебра борелевских множеств на прямой. Измеримые отображения и борелевские функции. Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины; ее свойства. Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной. Теорема о продолжении меры с алгебры интервалов на сигма-алгебру борелевских множеств. Взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами на

числовой прямой и функциями распределения. Дискретные, абсолютно непрерывные и сингулярные распределения. Смеси распределений. Теорема Лебега о представлении произвольного распределения. Плотность распределения относительно σ -конечной меры (Теорема Радона-Никодима). Плотность дискретного распределения относительно считающей меры. Классические дискретные и абсолютно непрерывные распределения: биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, пуассоновское, нормальное, показательное, равномерное, гамма, бета, Коши, хи-квадрат, Стьюдента, Фишера. Конечномерные случайные векторы и их распределения. Дискретные и абсолютно непрерывные многомерные распределения. Классические примеры многомерных распределений: полиномиальное, равномерное, гауссовское (нормальное). Независимость конечной совокупности случайных величин. Критерии независимости. Распределение функции от случайных величин и векторов. Свертка распределений. Моделирование случайных величин с помощью квантильных преобразований. Существование последовательностей независимых случайных величин. Условные распределения (дискретные и абсолютно непрерывные). Независимость случайных величин в терминах условных распределений.

Тема 6. Числовые характеристики конечномерных распределений.

Математическое ожидание случайной величины как абстрактный интеграл Лебега. Замена переменной в интеграле Лебега, приводящая к интегралу Лебега-Стилтьеса. Формулы для вычисления математических ожиданий дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Свойства математического ожидания. Дисперсия случайной величины и ее свойства. Математические ожидания и дисперсии классических распределений. Моменты случайных величин. Основные неравенства для моментов: неравенства Ляпунова, Маркова, Чебышева, Гельдера. Числовые характеристики двумерных распределений: ковариация и корреляция. Корреляция как мера линейной зависимости случайных величин. Задача об оптимальном среднеквадратичном линейном прогнозе. Матрица ковариаций случайного вектора. Вероятностный смысл параметров многомерного нормального распределения. Условное математическое ожидание относительно событий ненулевой вероятности, его свойства. Обобщение понятия условного математического ожидания. Формула повторного математического ожидания.

Тема 7. Характеристические и производящие функции.

Распределение суммы большого числа независимых случайных величин. Характеристическая функция случайной величины, ее аналитические свойства. Характеристические функции классических распределений. Формула обращения. Теорема о взаимно однозначном соответствии. Слабая сходимость распределений. Теорема непрерывности для характеристических функций. Производящая функция и ее свойства. Характеристическая функция случайного вектора и ее свойства. Независимость некоррелированных компонент гауссовского случайного вектора.

Тема 8. Предельные теоремы.

Основные виды сходимости последовательностей случайных величин (с вероятностью 1, по вероятности, в среднем, по распределению) и связь между ними. Закон больших чисел в форме Чебышева для независимых и слабо зависимых случайных величин с конечными дисперсиями. Закон больших чисел в форме Хинчина. Следствие для схемы Бернулли. Неравенства Колмогорова. Усиленный закон больших чисел Колмогорова. Центральная предельная теорема для независимых и одинаково распределенных случайных величин. Оценка скорости сходимости. Центральная предельная теорема для разнораспределенных независимых величин (теорема Линдберга). Достаточное условие

выполнимости условия Линдеберга (теорема Ляпунова). Обобщение теоремы Пуассона. Оценка скорости сходимости в теореме Пуассона.

Планы практических занятий

Тема 1. Элементы комбинаторики.

Расчет числа выборов из конечной генеральной совокупности: упорядоченных и неупорядоченных, с возвращением и без возвращения. Принцип умножения. Основные комбинаторные понятия и формулы. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты. Бином Ньютона. Полиномиальная схема.

Тема 2. Вероятностное пространство.

Случайные события и операции над ними. Вычисление вероятностей в классической и геометрической модели вероятностного пространства. Свойства вероятностей.

Тема 3. Условные вероятности. Независимость событий.

Условная вероятность. Независимость событий (парная и в совокупности). Формула умножения вероятностей. Полная вероятность. Формула Байеса.

Тема 4. Независимые испытания.

Биномиальная и полиномиальная схемы независимых испытаний. Связь биномиального и гипергеометрического распределений. Теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Решение задач с использованием таблиц вероятностных распределений.

Тема 5. Случайные величины и случайные векторы.

Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины; ее свойства. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения. Случайные векторы и их распределения. Дискретные и абсолютно непрерывные многомерные распределения. Нахождение маргинальных распределений. Проверка независимости конечной совокупности случайных величин. Нахождение распределение функции от случайных величин и векторов. Свертка распределений. Условные распределения. Независимость случайных величин в терминах условных распределений.

Тема 6. Числовые характеристики конечномерных распределений.

Нахождение математических ожиданий и дисперсий дискретных и абсолютно непрерывных распределений. Свойства математического ожидания и дисперсии. Моменты случайных величин. Неравенства для моментов. Числовые характеристики двумерных распределений: ковариация и корреляция. Матрица ковариаций случайного вектора. Независимость некоррелированных компонент гауссовского случайного вектора. Условное математическое ожидание.

Тема 7. Характеристические и производящие функции.

Характеристическая функция случайной величины, ее аналитические свойства. Нахождение распределений по их характеристическим функциям (формула обращения). Применение теоремы непрерывности для нахождения предельных распределений. Производящая функция и ее свойства. Характеристическая функция случайного вектора и ее свойства.

Тема 8. Предельные теоремы.

Основные виды сходимости последовательностей случайных величин (с вероятностью 1, по вероятности, в среднем, по распределению). Различные варианты законов больших чисел и их усиленные модификации. Проверка применимости закона больших чисел к последовательности независимых и слабо зависимых случайных величин. Центральная предельная теорема. Теоремы Пуассона. Численные задачи на применение центральной предельной теоремы и теоремы Пуассона с оценкой скорости сходимости.

Образцы средств для проведения текущего контроля

Задания, используемые для проведения текущего контроля, аналогичны заданиям, разбираемым на практических занятиях.

Контрольная работа №1 (примерный вариант)

1. В каждой упаковке товара есть наклейка одного из трех цветов (красного, синего и зеленого) равновероятно. Найти вероятность собрать наклейки всех цветов, купив 5 упаковок.
2. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 белых и 2 черных шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?
3. При 14400 бросаниях монеты герб выпал 7428 раз. Насколько вероятно столь большое или еще большее отклонение числа выпадений герба от половины случаев?
4. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятности следующих событий: а) при аварии не сработает ни один сигнализатор; б) при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

Контрольная работа №2 (примерный вариант)

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} C \cos x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

. Найти: а) постоянный параметр C ; б) дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

2. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	η	1	0	1
ξ				
-1		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	
1		$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

Найти частные распределения случайных величин ξ и η , их математические ожидания и дисперсии. Проверить ξ и η на зависимость. Найти распределение $\xi+\eta$.

3. Пусть ξ и η независимы и имеют показательные распределения с параметром 1. Найти распределения $\xi+\eta$ и ξ/η . Верно ли, что $\xi+\eta$ и ξ/η независимы?

Контрольная работа №3 (примерный вариант)

1. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике с вершинами $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$. Найти частные распределения случайных величин ξ и η , их математические ожидания и дисперсии. Проверить ξ и η на зависимость. Найти $\text{cov}(\xi, \eta)$.

$$\frac{1 + 3 \cos 2t}{4}$$

2. Найти распределение, соответствующее характеристической функции
3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ --независимые случайные величины с одним и тем же нормальным распределением $N(a, \sigma^2)$. Известно, что $P(S_n < 0) = p$. Найти среднее значение нормального распределения, если $\sigma = 2$, $p = 0,029$.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№ тем ы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Элементы комбинаторики	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
2.	Вероятностное пространство	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
3.	Условные вероятности. Независимость событий	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
4.	Независимые испытания	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
5.	Случайные величины и случайные векторы	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
6.	Числовые характеристики конечномерных распределений	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
7.	Характеристические и производящие функции	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.

8.	Предельные теоремы	Изучение теоретического материала; подготовка к практическим занятиям, контрольной работе; выполнение домашнего задания; работа с литературой.
----	--------------------	--

Порядок выполнения каждого вида самостоятельной работы

1. Изучение лекционного материала по теме.
2. Изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы.
3. Ответы на пункты плана для практических занятий.
4. Разбор практических примеров, продемонстрированных на лекциях и решенных на практических занятиях.

Контроль за самостоятельной работой осуществляется при выполнении обучающимся контрольной работы.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма проведения экзамена – собеседование по вопросам билета и решению задачи. Билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи.

Примерные задачи

1. Найти вероятность, что среди 7 случайно выбранных цифр встретится хотя бы одна из двух цифр: 1 или 2. Рассмотреть случаи выбора с возвращением и без возвращения.
2. Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 3 монет. Найти вероятность, что хотя бы в одном подбрасывании появятся три герба.
3. На полке стоят 15 книг, из них 5 в кожаном переплете. Наудачу берут три книги. Какова вероятность того, что две из них в кожаном переплете?
4. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятности следующих событий: а) при аварии сработает только один сигнализатор; б) при аварии сработают оба сигнализатора.
5. Стрелок делает три выстрела по удаляющейся цели. Вероятности попадания в цель равны 0,8; 0,7 и 0,6 при первом, втором и третьем выстрелах соответственно. Случайная величина X – число попаданий в цель. Найти закон распределения случайной величины X . Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение X . Найти $P(1 \leq X \leq 3)$.
6. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа

возвращенных в срок кредитов из 3 выданных. Построить многоугольник распределения и график функции распределения. Найти вероятность $P\{\xi > 1\}$.

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} C \cos x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

. Найти: а) постоянный параметр C ; б) математическое ожидание.

8. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	η	1	0	1
ξ				
-1		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	
1		$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

Найти частные распределения случайных величин ξ и η , их математические ожидания и дисперсии. Проверить ξ и η на зависимость. Найти $\text{cov}(\xi, \eta)$.

9. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ ax & 0 < x \leq 6, \\ 0 & x > 6. \end{cases}$$

Найти коэффициент a , функцию распределения $F_{\xi}(x)$, $P(0 \leq \xi \leq 5)$, построить графики $f_{\xi}(x)$, $F_{\xi}(x)$.

10. Распределение случайной величины ξ имеет плотность $p(x)=2/x^3$ при $x \geq 1$, $p(x)=0$ при $x < 1$. Найти математическое ожидание ξ и распределение $\eta=1/\xi$.

11. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике с вершинами $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$. Найти частные распределения случайных величин ξ и η , их математические ожидания и дисперсии. Проверить ξ и η на зависимость. Найти распределение $\xi-\eta$.

12. Найти распределение, соответствующее характеристической функции $\frac{\sin t}{t}$

13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -- независимые случайные величины с одним и тем же распределением Пуассона с параметром λ . Найти точное значение вероятности $P(S_n \geq x)$, используя свойство пуассоновского распределения и таблицы, а затем сравнить это значение с приближенным результатом, полученным после применения ЦПТ. Вычисления провести при $n=10$, $\lambda=0,2$, $x=3$.

Теоретические вопросы

1. Выборки из конечной генеральной совокупности: упорядоченные и неупорядоченные, с возвращением и без возвращения.
2. Основные комбинаторные понятия и формулы.
3. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты. Бином Ньютона. Полиномиальная схема.
4. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство.
5. Дискретное вероятностное пространство. Распределение вероятностей. Классическая вероятность.
6. Геометрическое вероятностное пространство. Геометрическая вероятность.
7. Свойства вероятностей. Свойства непрерывности вероятностей.
8. Теорема об эквивалентности аксиом аддитивности и непрерывности вероятности.
9. Условная вероятность. Независимость конечного числа событий: попарная и в совокупности. Независимости последовательности событий.
10. Формулы полной вероятности. Формула Байеса.
11. Независимые испытания. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
12. Гипергеометрическое распределение. Связь биномиального и гипергеометрического распределений.
13. Полиномиальная схема независимых испытаний. Полиномиальное распределение.
14. Предельные теоремы для биномиального распределения. Теорема Муавра Лапласа. Оценка скорости сходимости.
15. Предельные теоремы для биномиального распределения. Теорема Пуассона. Оценка скорости сходимости.
16. Определение случайной величины и функции распределения. Свойства, определяющие функцию распределения.
17. Дискретные, абсолютно непрерывные и сингулярные распределения. Теорема Лебега о представлении произвольного распределения.
18. Плотность распределения относительно σ -конечной меры (теорема Радона-Никодима). Плотность дискретного распределения относительно считающей меры.
19. Классические вероятностные распределения.
20. Векторная случайная величина. Дискретные и абсолютно непрерывные многомерные распределения. Условия согласованности.
21. Нахождение маргинальных дискретных и абсолютно непрерывных распределений.
22. Классические примеры многомерных распределений: полиномиальное, равномерное, гауссовское (нормальное).
23. Независимость конечной совокупности случайных величин. Критерии независимости.
24. Распределение функции от случайных величин и векторов. Свертка распределений.
25. Условные распределения (дискретные и абсолютно непрерывные). Независимость случайных величин в терминах условных распределений.
26. Математическое ожидание случайной величины как абстрактный интеграл Лебега. Замена переменной в интеграле Лебега, приводящая к интегралу Лебега-Стилтьеса.
27. Формулы для вычисления математических ожиданий дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Свойства математического ожидания.
28. Дисперсия случайной величины и ее свойства.
29. Математические ожидания и дисперсии классических распределений.
30. Моменты случайных величин. Основные неравенства для моментов: неравенства Ляпунова, Маркова, Чебышева, Гельдера.
31. Числовые характеристики двумерных распределений: ковариация и корреляция. Корреляция как мера линейной зависимости случайных величин.
32. Задача об оптимальном среднеквадратичном линейном прогнозе.

33. Матрица ковариаций случайного вектора. Вероятностный смысл параметров многомерного нормального распределения.
34. Условное математическое ожидание относительно событий ненулевой вероятности, его свойства.
35. Обобщение понятия условного математического ожидания. Формула повторного математического ожидания.
36. Характеристическая функция случайной величины, ее аналитические свойства.
37. Характеристические функции классических распределений.
38. Формула обращения. Теорема о взаимно однозначном соответствии.
39. Слабая сходимость распределений. Теорема непрерывности для характеристических функций.
40. Производящая функция и ее свойства.
41. Характеристическая функция случайного вектора и ее свойства. Независимость некоррелированных компонент гауссовского случайного вектора.
42. Основные виды сходимости последовательностей случайных величин (с вероятностью 1, по вероятности, в среднем, по распределению) и связь между ними.
43. Закон больших чисел в форме Чебышева для независимых и слабо зависимых случайных величин с конечными дисперсиями.
44. Закон больших чисел в форме Хинчина. Следствие для схемы Бернулли.
45. Усиленный закон больших чисел Колмогорова.
46. Центральная предельная теорема для независимых и одинаково распределенных случайных величин. Оценка скорости сходимости.
47. Центральная предельная теорема для разнораспределенных независимых величин (теорема Линдеберга).
48. Достаточное условие выполнимости условия Линдеберга (теорема Ляпунова).
49. Обобщение теоремы Пуассона. Оценка скорости сходимости в теореме Пуассона.

6.2. Критерии оценивания компетенций:

Таблица 4

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1 «способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности»	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности. ОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности.	Контрольные работы в течение семестра. Теоретические вопросы и задания к экзамену.	Оценка за выполнение контрольной работы зависит от количества правильно решенных заданий. Оценка за ответ по билету зависит от полноты ответа на вопросы. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и

	ьной деятельности »			промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»
--	---------------------------	--	--	---

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература:

1. Чернова, Н. М. Основы теории вероятностей: учебное пособие / Н. М. Чернова. — 2-е изд. — Москва: ИНТУИТ, 2016. — 107 с. — Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/100350> (дата обращения: 20.05.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

7.2. Дополнительная литература:

1. Уточкина, Е. О. Математика. Теория вероятностей: Учебное пособие / Уточкина Е.О., Смирнова Е.В., Зенина В.В. - Воронеж:ВГЛУ им. Г.Ф. Морозова, 2014. - 102 с. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/858597> (дата обращения: 20.05.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Палий, И. А. Теория вероятностей: Учебное пособие / И.А. Палий. - М.: ИНФРА-М, 2019. - 236 с. (Высшее образование). ISBN 978-5-16-004940-3. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1002617> (дата обращения: 20.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3. Интернет-ресурсы

1. Федеральный портал «Российское образование»: <http://www.edu.ru>.
2. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU: <http://elibrary.ru>.

7.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. ProQuest Dissertations & Theses Global / ФГБУ «Государственная публичная научно-техническая библиотека России». URL: <https://search.proquest.com/index>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

– Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.
2. Microsoft Office.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы. Для проведения занятий лекционного типа необходимо демонстрационное оборудование. Помещения для самостоятельной работы обучающихся

должны быть оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Шалагинов С. Д. Теория обобщенных функций. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Шалагинов С.Д., 2021.

1. Пояснительная записка

1.1. Цели и задачи дисциплины

Целями освоения дисциплины «Теория обобщенных функций» являются:

- 1) специальная подготовка в области теории обобщенных функций;
- 2) овладение аналитическими методами теории обобщенных функций;
- 3) овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего

использования в научных исследованиях и приложениях.

Задачами освоения дисциплины «Теория обобщенных функций» являются:

- 1) Обеспечение усвоения студентами данной дисциплины;
- 2) создание базы для изучения завершающих разделов курса и специальных дисциплин;

3) формирование способностей будущих специалистов-математиков к ведению исследовательской работы и решению практических задач.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Учебная дисциплина «Теория обобщенных функций» является дисциплиной обязательной части блока Б1 Дисциплины (модули). Для успешного усвоения дисциплины «Теория обобщенных функций» студент обязан свободно владеть методами математического анализа, линейной алгебры, теорией функций комплексного переменного, теорией меры и интеграла Лебега и особенно методами функционального анализа; данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: пространства Соболева, p -адический анализ.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Знает: – типичные постановки задач; – основные результаты в области теории обобщенных функций. Умеет: – ставить и решать задачи.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре
			8 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Часы контактной работы (всего):		62	62
Лекции		30	30

Практические занятия	30	30
Лабораторные/практические занятия по подгруппам	0	0
Консультации и иная контактная работа	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	82	82
Вид промежуточной аттестации		Экзамен

3. Система оценивания

Для текущего контроля применяется 100-балльная система оценивания. Баллы проставляются за активную работу на практических занятиях. Результаты текущего контроля учитываются при промежуточной аттестации. Обучающиеся, набравшие в течение семестра 61 балл, получают оценку «зачтено». Обучающиеся, не набравшие достаточное количество баллов, сдают зачет.

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
8 семестр						
1	Основные функции	16	2	2	0	0
2	Обобщенные функции	18	4	4	0	0
3	Дифференцирование обобщенных функций	18	4	4	0	0
4	Прямое произведение обобщенных функций	18	4	4	0	0
5	Свертка обобщенных функций	18	4	4	0	0
6	Обобщенные функции медленного роста	18	4	4	0	0

7	Преобразование Фурье обобщенных функций	18	4	4	0	0
8	Преобразование Лапласа обобщенных функций	18	4	4	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	30	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

1. Основные функции

Введение. Множества в пространстве R^n . Классы функций $C^p(G)$ и $C^p(\overline{G})$. Пространство непрерывных функций $C(T)$. Пространство основных функций D .

2. Обобщенные функции

Пространство обобщенных функций D' . Полнота пространства обобщенных функций D' . Носитель обобщенной функции. Регулярные обобщенные функции. Сингулярные обобщенные функции. Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенных функций.

3. Дифференцирование обобщенных функций

Производные обобщенной функции. Свойства обобщенных производных. Первообразная обобщенной функции. Примеры.

4. Прямое произведение обобщенных функций

Определение прямого произведения. Коммутативность прямого произведения. Другие свойства прямого произведения.

5. Свертка обобщенных функций

Свертка обобщенных функций. Свойства свертки. Существование свертки. Примеры сверток.

6. Обобщенные функции медленного роста

Пространство основных функций. Пространство обобщенных функций медленного роста. Структура обобщенных функций с точечным носителем. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста. Свертка обобщенных функций медленного роста.

7. Преобразование Фурье обобщенных функций

Преобразование Фурье основных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем. Преобразование Фурье свертки. Примеры.

8. Преобразование Лапласа обобщенных функций

Преобразование Лапласа локально интегрируемых функций. Преобразование Лапласа обобщенных функций. Свойства преобразования Лапласа. Обратное Преобразование Лапласа. Примеры и применения.

Для текущего контроля применяется 100-балльная система оценивания. Баллы проставляются за активную работу на практических занятиях.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ темы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	<p>Основные функции</p> <p>Введение. Множества в пространстве R^n.</p> <p>Классы функций $C^p(G)$ и $C^p(\bar{G})$.</p> <p>Пространство непрерывных функций $C(T)$. Пространство основных функций D.</p>	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2.	<p>Обобщенные функции</p> <p>Пространство обобщенных функций D'.</p> <p>Полнота пространства обобщенных функций D'. Носитель обобщенной функции. Регулярные обобщенные функции. Сингулярные обобщенные функции. Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенных функций.</p>	Чтение обязательной и дополнительной литературы
3	<p>Дифференцирование обобщенных функций</p> <p>Производные обобщенной функции. Свойства обобщенных производных. Первообразная обобщенной функции. Примеры.</p>	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	<p>Прямое произведение обобщенных функций</p> <p>Определение прямого произведения. Коммутативность прямого произведения. Другие свойства прямого произведения.</p>	Чтение обязательной и дополнительной литературы
5	<p>Свертка обобщенных функций</p> <p>Свертка обобщенных функций. Свойства свертки. Существование свертки. Примеры сверток.</p>	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	<p>Обобщенные функции медленного роста</p> <p>Пространство основных функций. Пространство обобщенных функций медленного роста. Структура обобщенных функций с точечным носителем. Прямое произведение</p>	Чтение обязательной и дополнительной литературы

	обобщенных функций медленного роста. Свертка обобщенных функций медленного роста.	
7	Преобразование Фурье обобщенных функций Преобразование Фурье основных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем. Преобразование Фурье свертки. Примеры.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Преобразование Лапласа обобщенных функций Преобразование Лапласа локально интегрируемых функций. Преобразование Лапласа обобщенных функций. Свойства преобразования Лапласа. Обратное Преобразование Лапласа. Примеры и применения.	Чтение обязательной и дополнительной литературы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма промежуточной аттестации – экзамен (8 семестр).

Вопросы к экзамену

1. Пространство основных функций D .
2. Пространство обобщенных функций D' .
3. Полнота пространства обобщенных функций D' .
4. Регулярные обобщенные функции.
5. Сингулярные обобщенные функции.
6. Линейная замена переменных в обобщенных функциях.
7. Умножение обобщенных функций.
8. Производные обобщенной функции. Примеры.
9. Первообразная обобщенной функции. Примеры.
10. Прямое произведение обобщенных функций и его свойства.
11. Свертка обобщенных функций и ее свойства.
12. Существование свертки обобщенных функций.
13. Обобщенные функции медленного роста.
14. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста.
15. Свертка обобщенных функций медленного роста.
16. Преобразование Фурье основных функций.
17. Преобразование Фурье обобщенных функций.
18. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем.
19. Преобразование Фурье свертки. Примеры.

20. Преобразование Лапласа локально интегрируемых функций.
21. Преобразование Лапласа обобщенных функций.
22. Свойства преобразования Лапласа.
23. Обратное преобразование Лапласа.
24. Примеры преобразования Лапласа.
25. Применения преобразования Лапласа.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<p>ОПК1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук</p> <p>ОПК1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.</p>	Вопросы к экзамену	Промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Сухинов, А. И. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие / А.И. Сухинов, И.П. Фирсов. - Ростов н/Д: Издательство ЮФУ, 2009. - 189 с. ISBN 978-5-9275-0671-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/549858> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах [Электронный ресурс] / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544632> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Ревина, С. В. Функциональный анализ в примерах и задачах: учеб. пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов-на-Дону:Издательство ЮФУ, 2009. - 120 с. ISBN 978-5-9275-0683-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/556115> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Бородина К.А. Уравнения в частных производных. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ:
<https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Бородина К.А., 2021.

1. Пояснительная записка

Целью изучения дисциплины «Уравнения в частных производных» является овладение аналитическими методами математической физики, применяемыми в областях, где математическая модель описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Краткое содержание дисциплины.

Уравнения в частных производных первого порядка. Классификация линейных уравнений 2-го порядка. Классификация линейных уравнений 2-го порядка с двумя переменными. Характеристики. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от нескольких переменных. Уравнения и краевые задачи математической физики. Классификация краевых задач математической физики. Корректность постановки задач математической физики. Уравнения гиперболического типа. Решение начальной задачи методом Даламбера. Решение однородной краевой задачи для волнового уравнения методом Фурье. Устойчивость решения Фурье однородной задачи для волнового уравнения. Физическая интерпретация решения однородной задачи для волнового уравнения. Решение общей краевой задачи для волнового уравнения. Уравнения параболического типа. Решение однородной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности методом Фурье. Решение общей краевой задачи для уравнения теплопроводности. Построение функции Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой. Решение неоднородной задачи на прямой. Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа методом Фурье. Типы краевых задач для эллиптических уравнений. Решение задачи Дирихле для прямоугольника. Решение задачи Дирихле методом Фурье для круга. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. Гармонические функции. Формулы Грина. Интегральная формула Грина краевых задач для уравнений эллиптического типа.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальные уравнения». Освоение дисциплины «Уравнения в частных производных» необходимо при последующем изучении дисциплин «Вычислительные методы математической физики», «Математическое моделирование природных процессов», «Вариационное исчисление и оптимальное управление».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении (ОПК-2)	Знает: – основные понятия теории уравнений в частных производных; – определения и свойства математических объектов в изученной области. Умеет: – корректно ставить краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных
Способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств (ПК-4)	Знает: – формулировки утверждений, методы их доказательства; – возможные сферы приложения знаний в области уравнений математической физики. Умеет: – решать учебные и типовые задачи в области уравнений математической физики.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре	
			5 семестр	6 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	8	4	4
	час	288	144	144
Из них:				
Часы контактной работы (всего):		132	66	66
Лекции		60	30	30
Практические занятия		68	34	34
Лабораторные / практические занятия по подгруппам		0	0	0
Консультации и иная контактная работа		4	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		156	78	78
Вид промежуточной аттестации			Зачет	Экзамен

3. Система оценивания

Для текущего контроля применяется 100-балльная система оценивания. Баллы проставляются за активную работу на практических занятиях, а также за выполненные контрольные работы. Результаты текущего контроля учитываются при промежуточной аттестации.

Зачет (5 семестр) проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из вопроса и задачи. На подготовку к ответу отводится не более 60 минут. Ответ на вопрос и решение задачи оцениваются по 100-бальной шкале. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок. При результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «не зачтено»; от 61 до 100 – «зачтено». Если в семестре студент набрал не менее 61 балла, то он получает отметку «зачтено» без сдачи зачета.

Экзамен (6 семестр) проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из вопроса и задачи. На подготовку к ответу отводится не более 60 минут. Ответ на вопрос и решение задачи оцениваются по 100-бальной шкале. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок. При результате 61-75 баллов выставляется оценка «удовлетворительно», 76-90 баллов - «хорошо», 91-100 баллов - «отлично». Если в семестре студент набрал 61-75 баллов, то он получает оценку «удовлетворительно», 76-90 баллов - «хорошо», 91-100 баллов - «отлично» без сдачи экзамена); если студента не удовлетворяет оценка, полученная по результатам работы в семестре, он может сдать экзамен.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
5 семестр						
1	Уравнения в частных производных первого порядка	34	7	8	0	
2	Классификация линейных уравнений 2-го порядка	36	7	8	0	0
3	Уравнения и краевые задачи математической физики	36	8	9	0	0
4	Уравнения гиперболического типа	36	8	9	0	0
	Зачет	2	0	0	0	2
	Итого за 5 семестр	144	30	34	0	2
6 семестр						

5	Уравнения параболического типа	36	7	8	0	0
6	Обобщение метода Фурье	36	7	8	0	0
7	Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа методом Фурье	36	8	9	0	0
8	Функции Грина краевых задач для уравнений эллиптического типа	34	8	9	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого за 6 семестр	144	30	34	0	2
	Итого (часов)	288	60	68	0	4

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Уравнения в частных производных первого порядка. Основные понятия и определения уравнений в частных производных (УЧП) 1-го порядка (линейное, нелинейное, квазилинейное, однородное и неоднородное, частное и общее решение, задача Коши). Общее решение линейного однородного УЧП 1-го порядка. Общее решение линейного неоднородного УЧП 1-го порядка. Решение задачи Коши для УЧП 1-го порядка. Решение системы двух нелинейных УЧП 1-го порядка, разрешенных относительно производных. Уравнение Пфаффа и его решение. Геометрическая интерпретация квазилинейного УЧП 1-го порядка и его характеристики.

Тема 2. Классификация линейных уравнений 2-го порядка. Классификация линейных уравнений 2-го порядка с двумя переменными. Характеристики. Приведение уравнений гиперболического типа к каноническому виду. Приведение уравнений параболического типа к каноническому виду. Приведение уравнений эллиптического типа к каноническому виду. Классификация линейных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от нескольких переменных.

Тема 3. Уравнения и краевые задачи математической физики. Физический вывод уравнения колебания струны. Уравнение колебания упругого стержня. Гиперболические уравнения в общем виде. Уравнение распространения электромагнитного поля. Физический вывод уравнения распространения тепла. Уравнения параболического типа в общем виде. Эллиптические уравнения как стационарные уравнения. Типы краевых условий. Классификация краевых задач математической физики. Корректность постановки задач математической физики. Теорема Ковалевской.

Тема 4. Уравнения гиперболического типа. Решение начальной задачи методом Даламбера. Физический смысл формулы Даламбера. Устойчивость решения Даламбера. Задача для полуограниченной прямой. Метод продолжений. Решение однородной краевой задачи для волнового уравнения методом Фурье. Устойчивость решения Фурье однородной задачи для волнового уравнения. Физическая интерпретация решения однородной задачи для волнового уравнения. Решение краевой задачи для неоднородного волнового уравнения методом Фурье. Физический смысл решения. Решение общей краевой задачи для волнового уравнения.

Тема 5. Уравнения параболического типа. Решение однородной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье. Равномерная сходимость решения однородной задачи для уравнения теплопроводности. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности методом Фурье. Решение общей краевой задачи для уравнения

теплопроводности. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Построение функции Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой. Решение неоднородной задачи на прямой.

Тема 6. Обобщение метода Фурье. Обобщение метода Фурье. Свойства собственных функций. Свойства оператора $L(\Phi)$ и собственных значений. Теорема Стеклова.

Тема 7. Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа методом Фурье. Уравнения эллиптического типа в общем виде, примеры уравнений. Типы краевых задач для эллиптических уравнений. Условие применимости метода разделения переменных для задач с уравнениями эллиптического типа. Решение задачи Дирихле для прямоугольника. Решение задачи Дирихле методом Фурье (внутренней и внешней) для круга.

Тема 8. Функции Грина краевых задач для уравнений эллиптического типа. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. Гармонические функции. Фундаментальные частные решения уравнения Лапласа. Формулы Грина. Интегральная формула Грина краевых задач для уравнений эллиптического типа. Условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа. Теорема о среднем значении гармонической функции. Принцип максимума. Единственность решения задачи Дирихле для гармонической функции. Функция Грина для краевых задач уравнений. Функции Грина первой и второй краевой задачи для уравнения Пуассона. Функция Грина задачи Дирихле для шара и круга. Формула Пуассона и Кирхгофа.

Средства для проведения текущего контроля

Для текущего контроля применяется 100-балльная система оценивания. Баллы проставляются за активную работу на практических занятиях, а также за выполненные контрольные работы.

Примерные задания для подготовки к контрольным работам

1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

2. Найти форму струны, определяемую уравнением $u_{tt} = 4u_{xx}$ в момент времени $t = \frac{\pi}{4}$, если в начальный момент заданы условия $u(0, x) = \sin \sin x$, $u_t(0, x) = 1$.

3. Решить задачу о колебании струны длины l с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму параболы

$$\frac{4}{l^2} x(l - x).$$

4. Решить краевую задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} = 16^2 u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad x \in [0; 12]; \# \\ \{u(t, 0) = 0 \quad u(t, 12) = 0 \} \#$$

5. Решить задачу о распространении тепла по бесконечному стержню при наличии источника тепла и заданном распределении температуры

$$u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \quad t \geq 0, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad u(0, x) = 2.$$

6. Решить краевую задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y \in [0; 1], \\ u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = 2x(1 - x), \quad u(x, 1) = x^2(1 - x).$$

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
5 семестр		
1	Уравнения в частных производных первого порядка	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Классификация линейных уравнений 2-го порядка	Проработка лекций
3	Уравнения и краевые задачи математической физики	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Уравнения гиперболического типа	Проработка лекций
6 семестр		
5	Уравнения параболического типа	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Обобщение метода Фурье	Проработка лекций
7	Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа методом Фурье	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Функции Грина краевых задач для уравнений эллиптического типа	Чтение обязательной и дополнительной литературы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Зачет (5 семестр) проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из вопроса и задачи. На подготовку к ответу отводится не более 60 минут. Ответ на вопрос и решение задачи оцениваются по 100-бальной шкале. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок. При результате от 0 до 60 баллов выставляется оценка «не зачтено»; от 61 до 100 – «зачтено». Если в семестре студент набрал не менее 61 балла, то он получает отметку «зачтено» без сдачи зачета.

Экзамен (6 семестр) проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из вопроса и задачи. На подготовку к ответу отводится не более 60 минут. Ответ на вопрос и решение задачи оцениваются по 100-бальной шкале. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок. При результате 61-75 баллов выставляется оценка «удовлетворительно», 76-90 баллов - «хорошо», 91-100 баллов - «отлично». Если в семестре студент набрал 61-75 баллов, то он получает оценку «удовлетворительно», 76-90 баллов - «хорошо», 91-100 баллов - «отлично» без сдачи экзамена); если студента не удовлетворяет оценка, полученная по результатам работы в семестре, он может сдать экзамен.

Вопросы к зачету (5 семестр)

1. Общее решение линейного однородного УЧП 1-го порядка.
2. Общее решение линейного неоднородного УЧП 1-го порядка.
3. Решение задачи Коши для УЧП 1-го порядка.
4. Решение системы двух нелинейных УЧП 1-го порядка, разрешенных относительно производных.
5. Уравнение Пфаффа и его решение.
6. Геометрическая интерпретация квазилинейного УЧП 1-го порядка и его характеристики.
7. Классификация линейных уравнений 2-го порядка с двумя переменными. Характеристики.
8. Приведение уравнений гиперболического типа к каноническому виду.
9. Приведение уравнений параболического типа к каноническому виду.
10. Приведение уравнений эллиптического типа к каноническому виду.
11. Физический вывод уравнения колебания струны.
12. Уравнение распространения электромагнитного поля.
13. Физический вывод уравнения распространения тепла.
14. Типы краевых условий. Классификация краевых задач математической физики.
15. Корректность постановки задач математической физики. Теорема Ковалевской.
16. Решение начальной задачи методом Даламбера.
17. Устойчивость решения Даламбера.
18. Решение однородной краевой задачи для волнового уравнения методом Фурье.
19. Устойчивость решения Фурье однородной задачи для волнового уравнения.
20. Физическая интерпретация решения однородной задачи для волнового уравнения.
21. Решение краевой задачи для неоднородного волнового уравнения методом Фурье.
22. Решение общей краевой задачи для волнового уравнения.

Вопросы к экзамену (6 семестр)

1. Общее решение линейного однородного УЧП 1-го порядка.
2. Общее решение линейного неоднородного УЧП 1-го порядка.
3. Решение задачи Коши для УЧП 1-го порядка.
4. Решение системы двух нелинейных УЧП 1-го порядка, разрешенных относительно производных.
5. Уравнение Пфаффа и его решение.
6. Геометрическая интерпретация квазилинейного УЧП 1-го порядка и его характеристики.
7. Классификация линейных уравнений 2-го порядка с двумя переменными. Характеристики.
8. Приведение уравнений гиперболического типа к каноническому виду.
9. Приведение уравнений параболического типа к каноническому виду.
10. Приведение уравнений эллиптического типа к каноническому виду.
11. Физический вывод уравнения колебания струны.
12. Уравнение распространения электромагнитного поля.
13. Физический вывод уравнения распространения тепла.
14. Типы краевых условий. Классификация краевых задач математической физики.
15. Корректность постановки задач математической физики. Теорема Ковалевской.
16. Решение начальной задачи методом Даламбера.
17. Устойчивость решения Даламбера.
18. Решение однородной краевой задачи для волнового уравнения методом Фурье.
19. Устойчивость решения Фурье однородной задачи для волнового уравнения.
20. Физическая интерпретация решения однородной задачи для волнового уравнения.
21. Решение краевой задачи для неоднородного волнового уравнения методом Фурье.
22. Решение общей краевой задачи для волнового уравнения.
23. Решение однородной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.

24. Равномерная сходимость решения однородной задачи для уравнения теплопроводности.
25. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности методом Фурье.
26. Решение общей краевой задачи для уравнения теплопроводности.
27. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
28. Построение функции Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности.
29. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.
30. Обобщение метода Фурье. Свойства собственных функций.
31. Свойства оператора $L(\Phi)$ и собственных значений. Теорема Стеклова.
32. Уравнения эллиптического типа в общем виде, примеры уравнений. Типы краевых задач для эллиптических уравнений.
33. Условие применимости метода разделения переменных для задач с уравнениями эллиптического типа.
34. Решение задачи Дирихле методом Фурье для прямоугольника.
35. Решение задачи Дирихле методом Фурье (внутренней и внешней) для круга.
36. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.
37. Фундаментальные частные решения уравнения Лапласа.
38. Гармонические функции и их свойства.
39. Формулы Грина. Интегральная формула Грина краевых задач для уравнений эллиптического типа.
40. Условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа.
41. Теорема о среднем значении гармонической функции.
42. Принцип максимума. Единственность решения задачи Дирихле для гармонической функции.
43. Функции Грина первой и второй краевой задачи для уравнения Пуассона.
44. Функция Грина задачи Дирихле для шара и круга. Формула Пуассона.
45. Объемный потенциал и его свойства.
46. Потенциал простого слоя и его свойства.
47. Потенциал двойного слоя и его свойства.
48. Применение потенциалов к решению краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Примерные задания для подготовки к зачету и экзамену

1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

2. Найти форму струны, определяемую уравнением $u_{tt} = 4u_{xx}$ в момент времени $t = \frac{\pi}{4}$, если в начальный момент заданы условия $u(0, x) = \sin x$, $u_t(0, x) = 1$.

3. Решить задачу о колебании струны длины l с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму параболы

$$\frac{4}{l^2} x(l - x).$$

4. Решить краевую задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} = 16^2 u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad x \in [0; 12]; \# \\ \{u(t, 0) = 0 \quad u(t, 12) = 0 \} \#$$

5. Решить задачу о распространении тепла по бесконечному стержню при наличии источника тепла и заданном распределении температуры

$$u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \quad t \geq 0, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad u(0, x) = 2.$$

6. Решить краевую задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y \in [0; 1],$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = 2x(1 - x), \quad u(x, 1) = x^2(1 - x).$$

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности (ОПК-2)	ОПК-2.1 Демонстрирует знание методов математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности. ОПК-2.2 Применяет методы математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности.	Контрольные работы, зачет, экзамен	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках 100-балльной системы оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий. Оценка выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.

2.	Способен к постижению основ математических моделей реального объекта или процесса, готовности применения моделирования для построения объектов и процессов, предсказания их свойств (ПК-4)	ПК-4.1 Понимает основы математических моделей реального объекта или процесса ПК-4.2 Готов применять моделирование для построения объектов и процессов, предсказания их свойств	Контрольные работы, зачет, экзамен	
----	--	---	------------------------------------	--

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Алексеев, А. Д. Уравнения с частными производными в примерах и задачах: учеб. пособие / Алексеев А.Д., Кудряшов С.Н., Радченко Т.Н. - Ростов-на-Дону:Издательство ЮФУ, 2009. - 80 с. ISBN 978-5-9275-0609-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/553133> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Райтманн, Ф. Прикладная теория уравнений в частных производных : учебное пособие / Ф. Райтманн. - СПб : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2019. - 204 с. - ISBN 978-5-288-05931-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1080943> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

- Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: <https://icdlib.nspu.ru/>
- Национальная электронная библиотека. - URL: <https://rusneb.ru/>
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: <https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true>
- Orbit Intelligence. - URL: <https://www.orbit.com>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Maple.
5. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Первалова

23.06.2021

ФИЗИКА МАКРОСИСТЕМ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Форма обучения очная

Татосов А.В. Физика макросистем. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения общая. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины «Физика макросистем» опубликована на сайте ТюмГУ: <https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Татосов А.В., 2021.

1. Пояснительная записка

Целью изучения дисциплины «Физика макросистем» является получение теоретических знаний и практических навыков решения задач в объеме, необходимом для изучения последующих дисциплин учебного плана направления «Механика и математическое моделирование», а также в дальнейшей профессиональной деятельности; формирование навыков самостоятельной работы со специальной литературой. В результате изучения курса студент должен получить представление об основных элементах современного метода познания явлений природы.

Краткое содержание дисциплины.

Элементы тензорного исчисления. Тензорные поля и их дифференцирование. Анализ напряженного состояния. Кинематика сплошной среды. Движение и течение. Основные законы динамики жидкости. Процесс. Первое начало термодинамики. Идеальный газ. Второе начало термодинамики. Энтропия. Третье начало термодинамики.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	Знает: теоретические основы и практические приложения физических основ механики, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами
	Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать математические методы для использования их в работе и научных исследованиях

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов (академические часы)	Часов в семестре (академические часы)
			4 семестр
Общий объем	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			

Часы контактной работы (всего):	66	66
Лекции	30	30
Практические занятия	34	34
Лабораторные / практические занятия по подгруппам	0	0
Консультации и иная контактная работа	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф. зачет, экзамен)		Экзамен

3. Система оценивания

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок с учетом ответов на дополнительные вопросы.

Досрочная оценка без сдачи экзамена может быть выведена по результатам работы в течение всего семестра и опроса студента в полном объеме дисциплины.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
4 семестр						
1	Математические основы	45	10	10	0	0
2	Общие законы движения жидкости и газа	45	10	10	0	0
3	Уравнения и функции состояния макросистем	52	10	14	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Математические основы

Элементы тензорного исчисления. Диадное произведение. Диады и диадики. Линейные векторные функции и диадики. Соглашение о суммировании в символических обозначениях. Тензорные обозначения. Ортогональные преобразования декартовых координат. Общее понятие декартова (ортогонального) тензора. Скалярное умножение тензоров. Матричное представление тензоров первого и второго рангов. Симметрия тензоров. Векторное произведение.

Тензорные поля и их дифференцирование. Наиболее часто употребляемые дифференциальные операторы. Формула Стокса. Формула Остроградского-Гаусса.

Тема 2. Общие законы движения жидкости и газа

Анализ напряженного состояния. Понятие сплошной среды. Однородность. Изотропия. Массовые и поверхностные силы. Вектор и тензор напряжения, связь между ними. Симметрия тензора напряжений.

Кинематика сплошной среды. Лагранжево и Эйлерово описание движения. Деформационное движение элементарного объема среды. Тензор градиента скорости. Тензор скоростей деформаций. Тензор завихренности. Теорема Гельмгольца.

Движение и течение. Материальная производная. Скорость и ускорение. Оператор материального дифференцирования по времени. Траектории. Линии тока. Установившееся течение. Скорость относительного объемного расширения. Материальная производная по времени от интеграла по объему.

Основные законы динамики жидкости. Сохранение массы. Уравнение неразрывности в Эйлеровой и Лангранжевой формах. Уравнение движения в напряжениях. Уравнение энергии и теорема живых сил.

Тема 3. Уравнения и функции состояния макросистем

Процесс. Количество вещества. Температура. Равновесные и неравновесные состояния. Уравнение состояния простой системы. Процесс. Работа.

Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия. Теплообмен. Первое начало. Теплоемкость. Изохорический процесс. Изобарический процесс. Энтальпия.

Идеальный газ. Уравнение состояния. Внутренняя энергия идеального газа. Процессы в идеальном газе. Термодинамические соотношения для политропного газа в удельных переменных.

Второе начало термодинамики. Формулировка второго начала. Циклы. Тепловой двигатель. Холодильная установка. Цикл Карно. Теоремы Карно. Неравенство Клаузиуса.

Энтропия. Определение энтропии. Основное термодинамическое тождество (соотношение Гиббса). Примеры вычисления энтропии. Направление неравновесных процессов. Статистический смысл энтропии.

Третье начало термодинамики. Теорема Нернста.

Средства для проведения текущего контроля

Примерные задания для подготовки к контрольным работам

1. Определить постоянную адиабаты γ для газовой смеси, состоящей из ν_1 молей газа с постоянной адиабаты γ_1 и ν_2 молей газа с постоянной адиабаты γ_2 .
2. Найти максимально возможную температуру одного моля идеального газа, совершающего процесс $p = p_0 - \alpha V^2$, где p_0 и α – положительные постоянные.

3. В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится один моль идеального газа при температуре T . Пространство над поршнем сообщается с атмосферой. Какую работу необходимо совершить, чтобы, медленно поднимая поршень, изотермически увеличить объем газа под ним в n раз.
4. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширили в η раз по закону $p = \alpha V$, где α – постоянная. Первоначальный объем газа V_1 . Найти: приращение внутренней энергии газа; работу, совершенную газом; молярную теплоемкость газа в этом процессе.
5. Показать, что процесс, при котором работа идеального газа пропорциональна соответствующему приращению его внутренней энергии, описывается уравнением $pV^n = const$, где n – постоянная.
6. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширяют так, что сообщенное газу тепло равно убыли его внутренней энергии. Найти: молярную теплоемкость газа в этом процессе; уравнение процесса в переменных T и V .
7. Найти приращение энтропии идеального газа при его переходе от состояния (P_1, V_1) в состояние (P_2, V_2) .
8. Определить приращение энтропии идеального газа при его необратимом расширении в пустоту от объема V_1 до объема V_2 .
9. Определить приращение энтропии при смешении двух различных идеальных газов, каждый из которых первоначально занимал половину объема сосуда.
10. Выяснить, в каком случае КПД цикла Карно повышается больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину.
11. Идеальный газ совершает прямой цикл, состоящий из изотермы, политропы и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла. Найти КПД такого цикла, если температура T в его пределах изменяется в τ раз.
12. Вывести уравнение движения (импульсов) для модели идеальной жидкости в которой теплообмен отсутствует, а тензор напряжений имеет шаровой вид $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, где p – давление.
13. Записать замкнутую систему уравнений движения идеальной однородной несжимаемой жидкости.
14. Записать замкнутую систему уравнений изэнтропического течения идеального совершенного газа.
15. Вывести уравнения для полной энергии, энтропии и энтальпии течения идеальной жидкости.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
4 семестр		
1	Математические основы	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Общие законы движения жидкости и газа	Проработка лекций

3	Уравнения и функции состояния макросистем	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Экзамен	Самостоятельное изучение материала

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма промежуточной аттестации – экзамен. Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи.

Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. *Элементы тензорного исчисления.* Диадное произведение. Диады и диадики. Линейные векторные функции и диадики. Соглашение о суммировании в символических обозначениях. Тензорные обозначения. Ортогональные преобразования декартовых координат. Общее понятие декартова (ортогонального) тензора. Скалярное умножение тензоров. Матричное представление тензоров первого и второго рангов. Симметрия тензоров. Векторное произведение.
2. *Тензорные поля и их дифференцирование.* Наиболее часто употребляемые дифференциальные операторы. Формула Стокса. Формула Остроградского-Гаусса.
3. *Анализ напряженного состояния.* Понятие сплошной среды. Однородность. Изотропия. Массовые и поверхностные силы. Вектор и тензор напряжения, связь между ними. Симметрия тензора напряжений.
4. *Кинематика сплошной среды.* Лагранжево и Эйлерово описание движения. Деформационное движение элементарного объема среды. Тензор градиента скорости. Тензор скоростей деформаций. Тензор завихренности. Теорема Гельмгольца.
5. *Движение и течение.* Материальная производная. Скорость и ускорение. Оператор материального дифференцирования по времени. Траектории. Линии тока. Установившееся течение. Скорость относительного объемного расширения. Материальная производная по времени от интеграла по объему.
6. *Основные законы механики сплошных сред.* Сохранение массы. Уравнение неразрывности в Эйлеровой и Лагранжевой формах. Уравнение движения в напряжениях. Уравнение энергии и теорема живых сил.
7. *Процесс.* Количество вещества. Температура. Равновесные и неравновесные состояния. Уравнение состояния простой системы. Процесс. Работа.
8. *Первое начало термодинамики.* Внутренняя энергия. Теплообмен. Первое начало. Теплоемкость. Изохорический процесс. Изобарический процесс. Энтальпия.
9. *Идеальный газ.* Уравнение состояния. Внутренняя энергия идеального газа. Процессы в идеальном газе. Термодинамические соотношения для политропного газа в удельных переменных.
10. *Второе начало термодинамики.* Формулировка второго начала. Циклы. Тепловой двигатель. Холодильная установка. Цикл Карно. Теоремы Карно. Неравенство Клаузиуса.
11. *Энтропия.* Определение энтропии. Основное термодинамическое тождество (соотношение Гиббса). Примеры вычисления энтропии. Направление неравновесных процессов. Статистический смысл энтропии. Третье начало термодинамики. Теорема Нернста.

Примерные задания для подготовки к экзамену

1. Определить постоянную адиабаты γ для газовой смеси, состоящей из ν_1 молей газа с постоянной адиабаты γ_1 и ν_2 молей газа с постоянной адиабаты γ_2 .
2. Найти максимально возможную температуру одного моля идеального газа, совершающего процесс $p = p_0 - \alpha V^2$, где p_0 и α – положительные постоянные.
3. В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится один моль идеального газа при температуре T . Пространство над поршнем сообщается с атмосферой. Какую работу необходимо совершить, чтобы, медленно поднимая поршень, изотермически увеличить объем газа под ним в n раз.
4. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширили в η раз по закону $p = \alpha V$, где α – постоянная. Первоначальный объем газа V_1 . Найти: приращение внутренней энергии газа; работу, совершенную газом; молярную теплоемкость газа в этом процессе.
5. Показать, что процесс, при котором работа идеального газа пропорциональна соответствующему приращению его внутренней энергии, описывается уравнением $pV^n = const$, где n – постоянная.
6. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширяют так, что сообщенное газу тепло равно убыли его внутренней энергии. Найти: молярную теплоемкость газа в этом процессе; уравнение процесса в переменных T и V .
7. Найти приращение энтропии идеального газа при его переходе от состояния (P_1, V_1) в состояние (P_2, V_2) .
8. Определить приращение энтропии идеального газа при его необратимом расширении в пустоту от объема V_1 до объема V_2 .
9. Определить приращение энтропии при смешении двух различных идеальных газов, каждый из которых первоначально занимал половину объема сосуда.
10. Выяснить, в каком случае КПД цикла Карно повышается больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину.
11. Идеальный газ совершает прямой цикл, состоящий из изотермы, политропы и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла. Найти КПД такого цикла, если температура T в его пределах изменяется в τ раз.
12. Вывести уравнение движения (импульсов) для модели идеальной жидкости в которой теплообмен отсутствует, а тензор напряжений имеет шаровой вид $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, где p – давление.
13. Записать замкнутую систему уравнений движения идеальной однородной несжимаемой жидкости.
14. Записать замкнутую систему уравнений изэнтропического течения идеального совершенного газа.
15. Вывести уравнения для полной энергии, энтропии и энтальпии течения идеальной жидкости.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности ОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности	Контрольные работы, экзамен	Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок с учетом ответов на дополнительные вопросы. Досрочная оценка без сдачи экзамена может быть выведена по результатам работы в течение всего семестра и опроса студента в полном объеме дисциплины.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Канн, К. Б. Курс общей физики: Учебное пособие / К.Б. Канн. - Москва : КУРС: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 360 с. - ISBN 978-5-905554-47-6. - Текст : электронный. - URL:

<https://znanium.com/catalog/product/956758> (дата обращения: 02.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

2. Победря, Б. Е. Основы механики сплошной среды. Курс лекций / Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. - Москва :ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 272 с.: ISBN 5-9221-0649-X. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544635> (дата обращения: 02.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Бровко, Г. Л. Элементы математического аппарата механики сплошной среды: Учебное пособие / Бровко Г.Л. - Москва :ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 424 с.: ISBN 978-5-9221-1634-3. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/854330> (дата обращения: 02.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

2. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учебное пособие для вузов : в 10 т. Том 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под. ред. Л. П. Питаевского. — 6-е изд., испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 728 с. - ISBN 978-5-9221-1625-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1223539> (дата обращения: 02.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

- Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: <https://icdlib.nspu.ru/>
- Национальная электронная библиотека. - URL: <https://rusneb.ru/>
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: <https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true>
- Orbit Intelligence. - URL: <https://www.orbit.com>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Maple.
5. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Форма обучения очная

Татосов А.В. Физические основы механики. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины «Физические основы механики» опубликована на сайте ТюмГУ: <https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Татосов А.В., 2021.

1. Пояснительная записка

Целью изучения дисциплины «Физические основы механики» является получение теоретических знаний и практических навыков решения задач в объеме, необходимом для изучения последующих дисциплин учебного плана направления «Механика и математическое моделирование», а также в дальнейшей профессиональной деятельности; формирование навыков самостоятельной работы со специальной литературой. В результате изучения курса студент должен получить представление об основных элементах современного метода познания явлений природы.

Краткое содержание дисциплины.

Кинематика точки. Кинематика твердого тела. Относительность движения. Законы Ньютона. Поле. Силы природы. Законы сохранения и фундаментальные свойства времени и пространства. Динамика твердого тела. Закон всемирного тяготения. Потенциал и напряженность поля, Законы Кеплера. Введение в релятивистскую механику.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	Знает: теоретические основы и практические приложения физических основ механики, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами
	Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать математические методы для использования их в работе и научных исследованиях

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов (академические часы)	Часов в семестре (академические часы)
			3 семестр
Общий объем	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			

Часы контактной работы (всего):	66	66
Лекции	30	30
Практические занятия	34	34
Лабораторные / практические занятия по подгруппам	0	0
Консультации и иная контактная работа	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	78	78
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф. зачет, экзамен)		Экзамен

3. Система оценивания

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок с учетом ответов на дополнительные вопросы.

Досрочная оценка без сдачи экзамена может быть выведена по результатам работы в течение всего семестра и опроса студента в полном объеме дисциплины.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
3 семестр						
1	Кинематика	14	3	3	0	0
2	Основное уравнение динамики	22	6	6	0	0
3	Закон сохранения импульса	16	3	3	0	0
4	Закон сохранения энергии	22	6	6	0	0
5	Закон сохранения момента импульса	16	3	3	0	0

6	Динамика твердого тела	16	3	3	0	0
7	Всемирное тяготение	16	3	3	0	0
8	Введение в релятивистскую механику	20	3	7	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	34	0	2

4.2. Содержание дисциплины по темам

Тема 1. Кинематика. Кинематика точки. Кинематика твердого тела. Относительность движения.

Тема 2. Основное уравнение динамики. Законы Ньютона. Принцип суперпозиции. Дальнодействие и причинность. Поле. Силы природы. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Уравнение динамики в неинерциальных системах. Силы инерции. Принцип эквивалентности.

Тема 3. Закон сохранения импульса. Законы сохранения и фундаментальные свойства времени и пространства. Импульс частицы. Импульс системы частиц. Закон сохранения импульса. Центр масс. C -система. Движение тела переменной массы.

Тема 4. Закон сохранения энергии. Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии. Консервативные силы. Потенциальное поле. Потенциальные кривые. Устойчивость.

Кинетическая энергия системы частиц. Теорема Кенига. Механическая энергия системы. Закон сохранения механической энергии. Закон сохранения полной энергии. Формальное введение внутренней энергии.

Столкновение двух частиц. Абсолютно неупругое столкновение. Абсолютно упругое столкновение. Нецентральный удар. Векторная диаграмма импульсов.

Тема 5. Закон сохранения момента импульса. Момент импульса частицы. Момент силы. Уравнение моментов. Момент импульса и момент силы относительно неподвижной оси. Момент импульса системы частиц. Закон сохранения момента импульса. Собственный момент импульса. Уравнение моментов в C -системе.

Тема 6. Динамика твердого тела. Уравнения движения твердого тела. Условия равновесия. Вращение вокруг неподвижной оси. Теорема Штейнера. Плоское движение твердого тела. Кинетическая энергия при плоском движении.

Тема 7. Всемирное тяготение. Закон всемирного тяготения. Потенциал и напряженность поля материальной точки, сферического слоя, однородного шара. Сила тяжести. Космические скорости. Законы Кеплера. Постановка задачи Кеплера в полярных координатах.

Тема 8. Введение в релятивистскую механику. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца. Сокращение длины. Замедление времени. Интервал. Закон сложения скоростей. Импульс и энергия в релятивистской механике.

Средства для проведения текущего контроля

Примерные задания для подготовки к контрольным работам

1. Найти закон движения точки $r = r(t)$ при постоянном ускорении

$$a = a_0 = \text{const},$$

$$t = 0: r = r_0, v = v_0.$$

2. Известна функция $r(t)$ для частицы, движущейся по криволинейной траектории. Убедиться, что радиус кривизны R траектории определяется формулой

$$R = \frac{|r'|^3}{|r' \times r''|}.$$

3. Известны: функция $f(s)$, определяющая зависимость производной $\frac{dv}{dt}$ от пройденного частицей пути s , модуль скорости v_0 в начале пути. Написать выражение для $v(s)$ – модуля скорости, которую имеет частица, пройдя путь s .

4. Постоянный по модулю вектор a вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг фиксированной перпендикулярной к нему оси. Выразить производные \dot{a} и \ddot{a} через векторы a и ω .

5. Вывести уравнение циклоиды – траектории точки M окружности радиуса a , катящейся по прямой

6. Небольшому телу сообщают начальный импульс. В результате чего оно начинает двигаться поступательно без трения вверх по наклонной плоскости со скоростью $v_0 = 3 \frac{m}{c}$. Плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 20^\circ$. Определить: а) на какую высоту h поднимется тело, б) сколько времени τ тело будет двигаться вверх до остановки.

7. Однородный круглый конус имеет высоту h . На каком расстоянии l от вершины находится его центр масс?

8. Система взаимодействующих тел находится в поле сил тяжести вблизи поверхности Земли. Как ведет себя центр масс системы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

9. Потенциальная энергия частицы в силовом поле имеет вид

$$U = \frac{kr^2}{2},$$

найти силу F действующую на частицу.

10. Частица находится в силовом поле

$$F = -\gamma \frac{r}{r^3},$$

определить потенциальную энергию U частицы в данном силовом поле.

11. Потенциальная энергия частицы определяется выражением $U = a(x^2 + y^2 + z^2)$, где a – положительная размерная константа. Частица начинает двигаться из точки с координатами $(3; 3; 3)$ (м). Найти ее кинетическую энергию T в момент, когда частица находится в точке с координатами $(1; 1; 1)$ (м).

12. На гладкой горизонтальной плоскости лежат две небольшие шайбы, каждая массы m , которые соединены между собой невесомой пружинкой. Одной из шайб сообщили начальную горизонтальную скорость v_0 . Найти внутреннюю механическую энергию данной системы в процессе ее движения.

13. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры. Масса и скорость первого шара равны 4 кг и $8 \frac{m}{c}$, второго шара – 6 кг и $2 \frac{m}{c}$. Как будут двигаться шары после абсолютно неупругого соударения?

14. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль оси x . Масса первого шара $m_1 = 0.2$ кг, масса второго шара $m_2 = 0.3$ кг. До столкновения проекции скоростей шаров на ось равны: $v_{10} = 1 \frac{m}{c}$, $v_{20} = -1 \frac{m}{c}$. Найти проекции скоростей шаров v_{1x} и v_{2x} после их центрального абсолютно упругого соударения?
15. Некоторая планета A движется в поле тяготения Солнца S . Относительно какой точки гелиоцентрической системы отсчета момент импульса данной планеты будет сохраняться во времени? Сохраняется ли импульс p ?
16. Две частицы с массами m_1 и m_2 соединены жестким невесомым стержнем длины l . Найти момент инерции I этой системы относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через центр масс.
17. Однородному цилиндру сообщают начальный импульс, в результате чего он начинает катиться без скольжения вверх по наклонной плоскости со скоростью v_0 . Плоскость образует с горизонтом угол α .
- а) Сколько времени t_1 будет двигаться цилиндр до остановки?
- б) На какую высоту h поднимется цилиндр?
- в) Сколько времени t_2 затратит цилиндр на скатывание вниз до исходного положения?
- г) Какую скорость v имеет цилиндр в момент возвращения в исходное положение?

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
	3 семестр	
	Физические основы механики	
1	Кинематика	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Основное уравнение динамики	Проработка лекций
3	Закон сохранения импульса	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Закон сохранения энергии	Проработка лекций
5	Закон сохранения момента импульса	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Динамика твердого тела	Проработка лекций
7	Всемирное тяготение	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Введение в релятивистскую механику	Проработка лекций
9	Экзамен	Самостоятельное изучение материала

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма промежуточной аттестации – экзамен. Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи.

Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Кинематика точки. Прямая и обратная задачи кинематики. Движение по окружности.
2. Кинематика твердого тела. Вектор угловой скорости. Плоское движение твердого тела. Мгновенная ось вращения. Сложение угловых скоростей.
3. Относительность движения. Поступательное движение системы координат. Движение относительно вращающейся системы отсчета.
4. Динамика. Законы Ньютона. Принцип суперпозиции. Дальнодействие и причинность. Поле. Силы природы. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Уравнение динамики в неинерциальных системах. Силы инерции. Принцип эквивалентности.
5. Законы сохранения и фундаментальные свойства времени и пространства. Импульс частицы. Импульс системы частиц. Закон сохранения импульса. Центр масс. C -система. Движение тела переменной массы.
6. Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии. Консервативные силы. Потенциальное поле. Потенциальные кривые. Устойчивость. Кинетическая энергия системы частиц. Теорема Кенига. Механическая энергия системы. Закон сохранения механической энергии. Закон сохранения полной энергии. Формальное введение внутренней энергии.
7. Столкновение двух частиц. Абсолютно неупругое столкновение. Абсолютно упругое столкновение. Нецентральный удар. Векторная диаграмма импульсов.
8. Момент импульса частицы. Момент силы. Уравнение моментов. Момент импульса и момент силы относительно неподвижной оси. Момент импульса системы частиц. Закон сохранения момента импульса. Собственный момент импульса. Уравнение моментов в C -системе.
9. Динамика твердого тела. Условия равновесия. Вращение вокруг неподвижной оси. Теорема Штейнера. Плоское движение твердого тела. Кинетическая энергия при плоском движении.
10. Закон всемирного тяготения. Потенциал и напряженность поля материальной точки, сферического слоя, однородного шара. Сила тяжести. Космические скорости. Законы Кеплера. Постановка задачи Кеплера в полярных координатах.
11. Введение в релятивистскую механику. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца. Сокращение длины. Замедление времени. Интервал. Закон сложения скоростей. Импульс и энергия в релятивистской механике.

Примерные задания для подготовки к экзамену

1. Найти закон движения точки $r = r(t)$ при постоянном ускорении

$$a = a_0 = \text{const},$$

$$t = 0: r = r_0, v = v_0.$$

2. Известна функция $r(t)$ для частицы, движущейся по криволинейной траектории. Убедиться, что радиус кривизны R траектории определяется формулой

$$R = \frac{|r'|^3}{|r' \times r''|}.$$

3. Известны: функция $f(s)$, определяющая зависимость производной $\frac{dv}{dt}$ от пройденного частицей пути s , модуль скорости v_0 в начале пути. Написать выражение для $v(s)$ – модуля скорости, которую имеет частица, пройдя путь s .

4. Постоянный по модулю вектор a вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг фиксированной перпендикулярной к нему оси. Выразить производные \dot{a} и \ddot{a} через векторы a и ω .

5. Вывести уравнение циклоиды – траектории точки M окружности радиуса a , катящейся по прямой

6. Небольшому телу сообщают начальный импульс. В результате чего оно начинает двигаться поступательно без трения вверх по наклонной плоскости со скоростью $v_0 = 3 \frac{m}{c}$. Плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 20^\circ$. Определить: а) на какую высоту h поднимется тело, б) сколько времени τ тело будет двигаться вверх до остановки.

7. Однородный круглый конус имеет высоту h . На каком расстоянии l от вершины находится его центр масс?

8. Система взаимодействующих тел находится в поле сил тяжести вблизи поверхности Земли. Как ведет себя центр масс системы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

9. Потенциальная энергия частицы в силовом поле имеет вид

$$U = \frac{kr^2}{2},$$

найти силу F действующую на частицу.

10. Частица находится в силовом поле

$$F = -\gamma \frac{r}{r^3},$$

определить потенциальную энергию U частицы в данном силовом поле.

11. Потенциальная энергия частицы определяется выражением $U = a(x^2 + y^2 + z^2)$, где a – положительная размерная константа. Частица начинает двигаться из точки с координатами $(3; 3; 3)$ (м). Найти ее кинетическую энергию T в момент, когда частица находится в точке с координатами $(1; 1; 1)$ (м).

12. На гладкой горизонтальной плоскости лежат две небольшие шайбы, каждая массы m , которые соединены между собой невесомой пружинкой. Одной из шайб сообщили начальную горизонтальную скорость v_0 . Найти внутреннюю механическую энергию данной системы в процессе ее движения.

13. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры. Масса и скорость первого шара равны 4 кг и $8 \frac{m}{c}$, второго шара – 6 кг и $2 \frac{m}{c}$. Как будут двигаться шары после абсолютно неупругого соударения?

14. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль оси x . Масса первого шара $m_1 = 0.2$ кг, масса второго шара $m_2 = 0.3$ кг. До столкновения проекции скоростей шаров на ось равны: $v_{10} = 1 \frac{m}{c}$, $v_{20} = -1 \frac{m}{c}$. Найти проекции скоростей шаров v_{1x} и v_{2x} после их центрального абсолютно упругого соударения?

15. Некоторая планета A движется в поле тяготения Солнца S . Относительно какой точки гелиоцентрической системы отсчета момент импульса данной планеты будет сохраняться во времени? Сохраняется ли импульс p ?

16. Две частицы с массами m_1 и m_2 соединены жестким невесомым стержнем длины l . Найти момент инерции I этой системы относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через центр масс.

17. Однородному цилиндру сообщают начальный импульс, в результате чего он начинает катиться без скольжения вверх по наклонной плоскости со скоростью v_0 . Плоскость образует с горизонтом угол α .

а) Сколько времени t_1 будет двигаться цилиндр до остановки?

б) На какую высоту h поднимется цилиндр?

в) Сколько времени t_2 затратит цилиндр на скатывание вниз до исходного положения?

г) Какую скорость v имеет цилиндр в момент возвращения в исходное положение?

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности ОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности	Контрольные работы, экзамен	Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок с учетом ответов на дополнительные вопросы. Досрочная оценка без сдачи экзамена может быть выведена по результатам работы в течение всего семестра и опроса студента в

				полном дисциплины.	объеме
--	--	--	--	-----------------------	--------

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Канн, К. Б. Курс общей физики: Учебное пособие / К.Б. Канн. - Москва : КУРС: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 360 с. - ISBN 978-5-905554-47-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/956758> (дата обращения: 02.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Копылова, О. С. Курс общей физики: Учебное пособие / Копылова О.С. - Москва :СтГАУ - "Агрус", 2017. - 300 с.: ISBN 978-5-9596-1290-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/975925> (дата обращения: 02.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Антошина, Л. Г. Общая физика: Сб. задач: Учеб. пособие / Л.Г. Антошина, С.В. Павлов, Л.А. Скипетрова; Под ред. Б.А. Струкова. - Москва : ИНФРА-М, 2008. - 336 с. (Высшее образование). ISBN 5-16-002494-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/141416> (дата обращения: 02.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Егоров, А. И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] / А. И. Егоров. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 256 с. - ISBN 978-5-9221-0942-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544694> (дата обращения: 02.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
3. Киселев, Д. М. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебно-методическое пособие / Д. М. Киселев. - Москва : МГАВТ, 2001. - 39 с. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/522813> (дата обращения: 02.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
4. Белов, Ю. Я. Аппроксимация и корректность краевых задач для дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учеб. пос. / Ю. Я. Белов, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков. - Красноярск: Сиб. Федер. ун-т, 2012. - 172 с. - ISBN 978-5-7638-2499-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/491959> (дата обращения: 02.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

- Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: <https://icdlib.nspu.ru/>
- Национальная электронная библиотека. - URL: <https://rusneb.ru/>
- Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: <https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true>
- Orbit Intelligence. - URL: <https://www.orbit.com>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Maple.
5. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Первалова

23.06.2021

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 – Математика

Профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Форма обучения очная

Басинский К.Ю. Функциональный анализ. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» опубликована на сайте ТюмГУ: Функциональный анализ [электронный ресурс] / Режим доступа: <https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

1. Пояснительная записка

Целью изучения функционального анализа является овладение основными теоретическими и практическими знаниями и умениями данного раздела математики. Ядро курса составляют классические положения фундаментальных общеобразовательных дисциплин.

Основные задачи дисциплины состоят в следующем:

- показать, что, объединяя алгебраический и геометрический подходы к исследованию множеств функций и более общих множеств, можно получить достаточно общие и содержательные результаты;
 - указать возможность применения результатов функционального анализа к исследованию дифференциальных и интегральных уравнений;
- выявить и продемонстрировать существующую связь между собой ряда теорем классического математического анализа, отобразив их на основные принципы функционального анализа.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Планируемые результаты обучения (знаниевые/функциональные):
Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	Знает: теоретические основы и практические приложения разделов функционального анализа, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами
	Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать математические методы для использования их в работе и научных исследованиях

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре	
			5 семестр	6 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	8	4	4
	час	288	144	144
Из них:				
Часы контактной работы (всего):		132	66	66
Лекции		60	30	30
Практические занятия		68	34	34

Лабораторные / практические занятия по подгруппам	0	0	0
Консультации и иная контактная работа	4	2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	156	78	78
Вид промежуточной аттестации		Экзамен	Экзамен

3. Система оценивания

Экзамен (5, 6 семестр) проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

Для текущего контроля используются контрольные работы. Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" за две контрольные работы, то он получает оценку "отлично" без сдачи экзамена. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за другую "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдавать экзамен (без сохранения оценки).

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные /практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
5 семестр						
1	Метрические и топологические пространства	48	10	12	0	0
2	Линейные операторы в нормированных пространствах.	48	10	12	0	0
3	Гильбертовы пространства	46	10	10	0	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого за 5 семестр	144	30	34	0	2
6 семестр						

5	Основные принципы функционального анализа.	48	10	12		
6	Компактные операторы.	48	10	12		
7	Обобщенные функции и нелинейный анализ	46	10	10		2
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого за 6 семестр	144	30	34	0	2
	Итого (часов)	288	60	68	0	4

4.2. Содержание дисциплины по темам

Семестр 5.

Метрические и топологические пространства.

- 1.1 Множества, метрические пространства.
Индикаторы множеств. Открытые и замкнутые множества. Полные пространства. Сепарабельные пространства.
- 1.2. Нормированные пространства.
Примеры нормированных пространств. Банаховы пространства. Лемма Ф. Рисса.
- 1,3 Топологические пространства. Топологические векторные пространства, примеры..
Ненормируемые топологические векторные пространства.

Линейные операторы в нормированных пространствах.

- 2.1 Пространство линейных ограниченных операторов. Норма оператора. Виды сходимости последовательностей операторов.
- 2.2 Сопряженные пространства. Общий вид линейного ограниченного функционала в некоторых нормированных пространствах. Полнота сопряженных пространств.
- 2.3 Сопряженные операторы.

Гильбертовы пространства.

- 3.1 Скалярное произведение. Примеры. Неравенство Бесселя и равенство Парсевала. Предгильбертово и гильбертово пространства.
- 3.2 Ортогональные системы. Базисы. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение множества.
- 3.3 Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств.
- 3.4 Спектральная теорема. Неограниченные самосопряженные операторы. Полярное разложение оператора. Диагональные и диагонализуемые операторы в гильбертовых пространствах.

Семестр 6.

Основные принципы функционального анализа.

- 1.1 Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Четыре следствия из теоремы Хана-Банаха.
- 1.2 Обратимые операторы. Критерий обратимости оператора. Левый обратный и правый обратный операторы. Теорема Неймана об обратном операторе. Спектр оператора. Классификация точек спектра. Теорема Банаха об обратном операторе.

- 1.3 Принцип равномерной ограниченности. Следствия принципа равномерной ограниченности для сходящихся последовательностей линейных ограниченных операторов.

Компактные операторы.

- 2.1 Примеры компактных операторов. Некомпактность тождественного оператора в бесконечномерных нормированных пространствах.
- 2.2 Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами. Ядро и образ компактного оператора, связь между ними. Альтернатива Фредгольма.
- 2.3 Теоремы Фредгольма и их применение. Алгоритмы решения уравнений с компактными операторами. Линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.

Обобщенные функции и нелинейный анализ.

- 3.1 Обобщенные функции. Пространства основных функций. Примеры пространств обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Преобразования Фурье обобщенных функций.
- 3.2 Дифференциальное и интегральное исчисление в нормированных пространствах. Производные по Фреше и по Гато. Общие правила дифференцирования. Производные высших порядков. Формула Тейлора. Несуществование в бесконечномерных нормированных пространствах меры, согласованной с векторной структурой. Интегрирование по конечномерным множествам. Интеграл по кривой. Первообразная.
- 3.3 Экстремумы функционалов. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов функционалов. Примеры.

Средства для проведения текущего контроля

Для текущего контроля используются контрольные работы.

5 семестр

Контрольная работа №1

- 1) Метрика ли ρ в l_1 ?

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k-1} - y_{2k-1}|$$

- 2) Проверить полноту пространства X .

$$X = C[0;1], \quad \|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

- 3) Пусть $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция и M – замкнутое подмножество $[a;b]$. Доказать замкнутость множества $B = f(M)$.

- 4) Найти норму вектора $x(t) = 2t^3 + 21t^2 + 72t$ в пространствах $C[-5;5]$, $C^1[-5;5]$, $L[-5;5]$, $L_2[-5;5]$.

Контрольная работа №2

Найти норму оператора $Ax(t)=(1-3t^2)x(t)$

- 1) $A: C[0;2] \rightarrow C[0;2]$,
- 2) $A: C[0;2] \rightarrow L_2[0;2]$.
- 3) $A: L_2[0;2] \rightarrow L_2[0;2]$,

4) Найти норму функционала $f \in l_2^*$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n / 2^n + (2/3)^n x_{n+1})$$

5) Найти продолжение функционала $f \in l^*$, $l = \{(x; y) \in R^2: y = 5x\}$, $f(x, y) = 2x$ на все пространство R^2 .

Контрольная работа №3

1) В пространстве $L_2[0;3]$ найти вектор, ортогональный вектору $a(t) = t^2 + e^t$.

2) В пространстве $L_2[0;3]$ найти ортогональную проекцию вектора $x(t) = \sin(\pi t) + t^3$ на подпространство, порожденное векторами $a(t) = t$, $b(t) = t^2$, $c(t) = t^3$.

3) Привести к каноническому виду (представить как скалярное произведение) линейный функционал $f \in L_2^*[0;3]$,

$$f(x) = \int_1^2 \arctg t^2 x(t) dt$$

4) Привести к каноническому виду (представить как скалярное произведение) линейный функционал $f \in l_2^*$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + 2x_{n+2}$$

5) В пространстве R^4 найти ортогональное дополнение ко множеству, состоящему из трех точек $a=(1,2,3,4)$, $b=(5,6,7,8)$, $c=(3,6,9,12)$.

6 семестр

Контрольная работа №4

1) Найти продолжение функционала $f \in l^*$, $l = \{(x; y) \in R^2: y = 5x\}$, $f(x, y) = 2x$ на все пространство R^2 с сохранением нормы.

2) Объяснить существование обратного оператора к оператору $I-A: C[0;1] \rightarrow C[0;1]$ и представить обратный оператор в виде ряда.

$$Ax(t) = \frac{x(1-t)}{5} + \frac{x(t)}{7}$$

3) Найти обратный оператор к оператору $A: L_3[0;1] \rightarrow L_3[0;1]$, $A(x)(t) = e^t x(t/2)$.

4) Найти резольвенту оператора $A: C[0;1] \rightarrow C[0;1]$ при $\lambda = 100$,

$$A(x) = \int_0^1 (s^2 + st^3)x(s)ds.$$

5) Решить интегральное уравнение (записать решение в виде ряда)

$$0,1 \int_0^1 \sin(st)x(s)ds + x(t) = \sin t$$

Контрольная работа №5

1. Найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds - x(t) = -3 \sin t + 5 \cos t$$

2. Найти те функции $y(t)$, с которыми уравнение

$$\int_0^1 (-23ts + 624s^2)x(s)ds - x(t) = y(t)$$

имеет решение.

3. Записать решение уравнения Вольтерра в виде ряда

$$\int_0^t (ts + s^2)x(s)ds - x(t) = t$$

4. Найти спектр оператора

$$A(x) = \int_0^1 (s^2 + st^3)x(s)ds.$$

5. Найти спектр оператора

$$A: l_2 \rightarrow l_2, \quad A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots).$$

Контрольная работа №6

1) Найти производную Фреше оператора $f: C[0;1] \rightarrow C[0;1]$

$$f(x)(t) = \cos(x(t) + t^2) + \int_0^1 \frac{e^{s+t}}{t^2 + 1} x(s)ds.$$

2) Найти производную Фреше оператора $:C[0;1] \rightarrow C[0;1]$

$$f(x)(t) = \cos(x(t) + t^2) + \int_0^1 \frac{e^{s+t}}{t^2 + 1} x(s)ds.$$

3) Найти производную обобщенной функции $f \in D^*(\mathbb{R})$

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\pi/6} \sin x \varphi(x) dx + \sin(\pi/6) \varphi(1).$$

4) Найти вторую производную обобщенной функции $f \in D^*(\mathbb{R})$

$$f(\varphi) = \varphi(3) + \int_1^{\infty} \operatorname{arctg} x \varphi(x) dx.$$

5) Решить дифференциальное уравнение $y = f$, в пространстве обобщенных функций, где

$$f(\varphi) = \int_{-2}^3 (x + 3x^4) \varphi(x) dx$$

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ Темы	Тема	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
5 семестр		
1	Метрические и топологические пространства	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2	Линейные операторы в нормированных пространствах.	Проработка лекций
3	Гильбертовы пространства	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6 семестр		
4	Основные принципы функционального анализа.	Проработка лекций
5	Компактные операторы.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Обобщенные функции и нелинейный анализ	Проработка лекций

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Для текущего контроля используются контрольные работы. Если в течение семестра студент получил оценки "отлично" за три контрольные работы, то он получает оценку "отлично" без сдачи экзамена. Если за одну работу получена оценка "хорошо", а за две другие "отлично", то студент может на выбор: получить оценку "хорошо" или сдавать экзамен (без сохранения оценки).

Экзамен проходит в виде собеседования по вопросам билета. Билет состоит из двух вопросов и задачи. Ответ на каждый вопрос и решение задачи оценивается по пятибалльной системе. Результирующая оценка рассчитывается как среднее арифметическое полученных оценок.

Примерные вопросы для подготовки к экзаменам

5 семестр

Вопросы к экзамену

1. Примеры нормированных пространств.
2. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора.
3. Компактные операторы, примеры.
4. Линейные уравнения с компактными операторами.
5. Условия разрешимости линейного уравнения с компактным оператором.
6. Альтернатива Фредгольма для линейных уравнений с компактным оператором.
7. Спектр линейного оператора, его замкнутость и ограниченность.
8. Спектр компактного оператора.
9. Интегральные уравнения 2 рода (Фредгольма и Вольтерра).
10. Решение интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.
11. Решение интегрального уравнения Фредгольма с малым ядром (оператор имеет малую норму).
12. Решение интегрального уравнения Вольтерра.
13. Производная Фреше, примеры.
14. Производная Гато, примеры.
15. Пространство основных функций.
16. Обобщенные функции (регулярные и нерегулярные).
17. Дифференцирование обобщенных функций.
18. Первообразная обобщенной функции.
19. Пространства Соболева.
20. Обобщенные функции медленного Роста.
21. Преобразование Фурье обобщенных функций.

6 семестр

1. Продолжение линейных операторов. Продолжение линейных функционалов в гильбертовом пространстве с сохранением нормы.
2. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах.
3. Обратимые операторы. Теорема Неймана об обратных операторах.
4. Спектр оператора, классификация точек спектра.
5. Теорема Банаха об обратном операторе.
6. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза).
7. Компактные операторы, примеры.
8. Уравнения с компактными операторами.
9. Понятие об индексе оператора. Теорема Фредгольма.
10. Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами.
11. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода.
12. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
13. Методы решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода.
14. Задача Штурма-Лиувилля.
15. Пространство основных функций.
16. Обобщенные функции (регулярные и сингулярные).
17. Дифференцирование обобщенных функций.
18. Решение дифференциальных уравнений в обобщенных функциях.
19. Дифференцирование по Фреше и по Гато.
20. Интегрирование в нормированном пространстве.

21. Экстремальные задачи для функционалов, примеры.

Примерные задания для подготовки к экзаменам

5 семестр

1) Метрика ли ρ в l_1 ?

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k-1} - y_{2k-1}|$$

2) Проверить полноту пространства X .

$$X = C[0;1], \quad \|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

3) Пусть $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция и M – замкнутое подмножество $[a;b]$. Доказать замкнутость множества $B = f(M)$.

4) Найти норму вектора $x(t) = 2t^3 + 21t^2 + 72t$ в пространствах $C[-5;5]$, $C^1[-5;5]$, $L[-5;5]$, $L_2[-5;5]$.

5) Найти норму оператора $Ax(t) = (1-3t^2)x(t)$

1) $A: C[0;2] \rightarrow C[0;2]$,

2) $A: C[0;2] \rightarrow L_2[0;2]$.

3) $A: L_2[0;2] \rightarrow L_2[0;2]$,

6) Найти норму функционала $f \in l_2^*$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n / 2^n + (2/3)^n x_{n+1})$$

7) Найти продолжение функционала $f \in l^*$, $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y = 5x\}$, $f(x,y) = 2x$ на все пространство \mathbb{R}^2 .

8) В пространстве $L_2[0;3]$ найти вектор, ортогональный вектору $a(t) = t^2 + e^t$.

9) В пространстве $L_2[0;3]$ найти ортогональную проекцию вектора $x(t) = \sin(\pi t) + t^3$ на подпространство, порожденное векторами $a(t) = t$, $b(t) = t^2$, $c(t) = t^3$.

10) Привести к каноническому виду (представить как скалярное произведение) линейный функционал $f \in L_2^*[0;3]$,

$$f(x) = \int_1^2 \arctg t^2 x(t) dt$$

11) Привести к каноническому виду (представить как скалярное произведение) линейный функционал $f \in l_2^*$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + 2x_{n+2}$$

12) В пространстве \mathbb{R}^4 найти ортогональное дополнение ко множеству, состоящему из трех точек $a=(1,2,3,4)$, $b=(5,6,7,8)$, $c=(3,6,9,12)$.

6 семестр

1) Найти продолжение функционала $f \in l^*$, $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y = 5x\}$, $f(x,y) = 2x$ на все пространство \mathbb{R}^2 с сохранением нормы.

2) Объяснить существование обратного оператора к оператору $I-A: C[0;1] \rightarrow C[0;1]$ и представить обратный оператор в виде ряда.

$$Ax(t) = \frac{x(1-t)}{5} + \frac{x(t)}{7}$$

3) Найти обратный оператор к оператору $A: L_3[0;1] \rightarrow L_3[0;1]$, $A(x)(t) = e^t x(t/2)$.

4) Найти резольвенту оператора $A: C[0;1] \rightarrow C[0;1]$ при $\lambda = 100$,

$$A(x) = \int_0^1 (s^2 + st^3)x(s)ds.$$

5) Решить интегральное уравнение (записать решение в виде ряда)

$$0,1 \int_0^1 \sin(st)x(s)ds + x(t) = \sin t$$

6) Найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds - x(t) = -3\sin t + 5\cos t$$

7) Найти те функции $y(t)$, с которыми уравнение

$$\int_0^1 (-23ts + 624s^2)x(s)ds - x(t) = y(t)$$

имеет решение.

8) Записать решение уравнения Вольтерра в виде ряда

$$\int_0^t (ts + s^2)x(s)ds - x(t) = t$$

9) Найти спектр оператора

$$A(x) = \int_0^1 (s^2 + st^3)x(s)ds.$$

10) Найти спектр оператора

$$A: I_2 \rightarrow I_2, \quad A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots).$$

11) Найти производную Фреше оператора $f: C[0;1] \rightarrow C[0;1]$

$$f(x)(t) = \cos(x(t) + t^2) + \int_0^1 \frac{e^{s+t}}{t^2 + 1} x(s) ds.$$

12) Найти производную Фреше оператора $:C[0;1] \rightarrow C[0;1]$

$$f(x)(t) = \cos(x(t) + t^2) + \int_0^1 \frac{e^{s+t}}{t^2 + 1} x(s) ds.$$

13) Найти производную обобщенной функции $f \in D^*(R)$

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\pi/6} \sin x \varphi(x) dx + \sin(\pi/6) \varphi(1).$$

14) Найти вторую производную обобщенной функции $f \in D^*(R)$

$$f(\varphi) = \varphi(3) + \int_1^{\infty} \arctg x \varphi(x) dx.$$

15) Решить дифференциальное уравнение $y = f$, в пространстве обобщенных функций, где

$$f(\varphi) = \int_{-2}^3 (x + 3x^4) \varphi(x) dx$$

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотношенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания

1.	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1)	ОПК-1.1. Демонстрирует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использует их в профессиональной деятельности.	Контрольная работа, Экзамен	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка выполнения студентом контрольной работы зависит от числа правильно выполненных заданий. Экзаменационная оценка студента в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы и решения задач и/или тестовых заданий, примерный уровень которых соответствует уровню задач, приведенных в п. «Средства для проведения текущего контроля». Эта оценка характеризует уровень знаний, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.
----	---	---	-----------------------------	--

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Сухинов, А. И. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие / А.И. Сухинов, И.П. Фирсов. - Ростов н/Д: Издательство ЮФУ, 2009. - 189 с. ISBN 978-5-9275-0671-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/549858> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Ревина, С. В. Функциональный анализ в примерах и задачах: учеб. пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2009. - 120 с. ISBN 978-5-9275-0683-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/556115> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах [Электронный ресурс] / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544632> (дата обращения: 15.04.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.
2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Maple.
5. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н.

Перевалова

23.06.2021

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 «Математика»
Профиль: Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Форма обучения очная

Гаврилова Н.М. Численные методы. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины Численные методы опубликована на сайте ТюмГУ: <http://www.utmn.ru/sveden/education/#>.

1. Пояснительная записка:

Цель дисциплины «Численные методы» - обеспечение изучения теоретических основ численных методов, основных приемов и методик разработки моделирующих алгоритмов, реализации их с использованием современных языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования.

Задачи дисциплины:

- обучить студентов основным методам решения задач вычислительной математики;
- привить студентам устойчивые навыки математического моделирования с использованием современных языков программирования и пакетов прикладных программ;
- дать опыт проведения вычислительных экспериментов.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Численные методы» входит в блок Б1 Дисциплины (модули). Обязательная часть. Для изучения и освоения дисциплины нужны первоначальные знания из курсов математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики.

Знания и умения, практические навыки, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении курсов математического моделирования, вычислительного практикума, при выполнении курсовых и дипломных работ, связанных с математическим моделированием и обработкой наборов данных, решением конкретных задач из механики, физики и т.п.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Код и наименование компетенции	Код и наименование части компетенции (при наличии паспорта компетенций)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
ОПК-4. Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	-----	<p>Знает: основные методы численного анализа; имеет четкое представление о способах реализации математических моделей, основанных на численных методах.</p> <p>Умеет: использовать основные понятия и методы вычислительной математики, самостоятельно разрабатывать и реализовывать численные методы и алгоритмы на языке программирования высокого уровня; практически решать достаточно сложные в вычислительном отношении задачи, требующие численной реализации на ЭВМ</p>

ПК-3. Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения	-----	Знает основные понятия и методы вычислительной математики, способен реализовывать численные методы и алгоритмы на языке программирования высокого уровня. Умеет разрабатывать и самостоятельно реализовывать численные алгоритмы практических задач с помощью инструментальных средств и прикладных программ; давать полный анализ результатов решения и оценивать границы применимости выбранного метода
---	-------	--

2. Структура и трудоемкость дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре
			5 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		30	30
Практические занятия			
Лабораторные/практические занятия по подгруппам		34	34
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		78	78
Вид промежуточной аттестации (экзамен)			Экзамен

3. Система оценивания

3.1. Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках модульно-рейтинговой (100-балльной) и традиционной (4-балльной) систем оценок.

Студент получает экзамен автоматически в случае выполнения практических работ и набора в течение семестра количества баллов:

61 – 75 баллов – «удовлетворительно»;

76 – 90 баллов – «хорошо»;

91 – 100 баллов – «отлично».

Студент набирает в течение семестра менее 61 балла. Для сдачи экзамена студент должен явиться на экзамен. Экзамен проводится в устно-письменной форме. Вариант экзаменационного билета содержит 4 задания из разных разделов курса (2 вопроса теоретические, 2 задания – практические). Оценка выставляется по итогам ответа на экзаменационный вопрос.

Студент набирает в течение семестра менее 35 баллов. Для сдачи экзамена студент должен явиться на экзамен. Экзамен проводится в устно-письменной форме. Билет содержит 4 задания из разных разделов курса (2 вопроса теоретические, 2 задания – практические). Также студенту задаются дополнительные вопросы по несданным разделам дисциплины. Оценка выставляется по итогам ответа на экзаменационный вопрос и ответа на дополнительные вопросы.

Студент, желающий исправить экзаменационную оценку, полученную в рамках модульно-рейтинговой системы, имеет право на сдачу экзамена. Для этого студент должен явиться на экзамен. Экзамен проводится в устно-письменной форме. Билет содержит 4 вопроса из разных разделов курса. В случае, если студент отказывается от сдачи экзамена или не смог повысить оценку, ему выставляется оценка, полученная автоматически по итогам семестра.

- Шкала оценивания при проведении текущего контроля (по итогам выполнения практических заданий):

0 баллов - задание не выполнено.

5 баллов - при выполнении задания изучен лекционный материал, программно задание не выполнено;

8 баллов - при выполнении задания допущены существенные ошибки;

10 баллов - отсутствие общей идеи, системы, частичное выполнение задания.

12 баллов - выполнение задания с несущественными 1-2 ошибками.

14 баллов - выполнение без ошибок в соответствии с заданием.

16 баллов - выполнение без ошибок, предложен творческий подход, содержание шире задания.

- Шкала оценивания по билетам (вариантам контрольной работы):

Экзаменационный билет содержит 4 вопроса. Преподаватель вправе задать уточняющий вопрос по каждому из вопросов.

Ответ на каждый из вопросов оценивается по следующей шкале:

2 («неудовлетворительно») - студент не ответил на вопрос либо содержание ответа не раскрывает сути вопроса.

3 («удовлетворительно») - студент отвечает по существу, но не демонстрирует целостного представления по вопросу, не может аргументировать свой ответ.

4 («хорошо») - студент отвечает по существу, демонстрирует целостное представление по вопросу; не может аргументировать свой ответ либо аргументация не обоснована.

5 («отлично») - студент дает полный, развернутый, аргументированный ответ на вопрос.

Итоговая оценка выводится как средняя арифметическая из оценок по вопросам билета.

Преподаватель может использовать систему штрафов, уменьшая набранные баллы за пропуски занятий без уважительных причин, за нарушение сроков выполнения учебных заданий, за систематический отказ отвечать на занятиях и т.д. Возможно также начисление премиальных баллов за работы, выполненные студентом на высоком уровне.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№ п/ п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины (модуля), час.				
		Всего	Виды аудиторной работы			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные/практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
5 семестр						
1.	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	20	4		6	0
2.	Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	20	4	0	6	0
3.	Элементы теории разностных схем	20	4	0	2	0
4.	Разностные схемы для уравнений параболического типа	28	6	0	8	0
5.	Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	28	6	0	6	0
6.	Разностные схемы для уравнений гиперболического типа	26	6	0	6	0
	Экзамен	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	144	30	0	34	2

4.2. Содержание дисциплины (модуля) по темам

Тема 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Разностная схема задачи. Порядок аппроксимации разностной схемы. Методы Эйлера. Метод Рунге-Кутты. Методы решения дифференциальных уравнений высших порядков. О проблемах численной устойчивости.

Тема 2. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разностная схема линейной краевой задачи. Метод прогонки. Исследование устойчивости прогонки. Метод стрельбы для решения краевой задачи.

Тема 3. Элементы теории разностных схем

Понятие аппроксимации, сходимости, и устойчивости разностной схемы. Теорема Лакса о сходимости решения разностной задачи. Каноническая запись разностной схемы. Дифференциальное приближение разностной схемы. Необходимый спектральный признак устойчивости. Примеры применения спектрального признака для исследования устойчивости разностных схем.

Тема 4. Разностные схемы для уравнений параболического типа

Постановка дифференциальной задачи. Переход к разностной схеме. Реализация разностных схем. Разностные схемы для уравнений с постоянными коэффициентами: явная схема, неявная схема, метод Кранка-Николсона, схема Ричардсона, схема Дюфорта-Франкела, схема с весами.

Тема 5. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа

Постановка дифференциальной задачи. Переход к разностной схеме. Реализация разностных схем. Пятиточечная схема. Девятиточечная схема. Метод последовательной верхней релаксации.

Тема 6. Разностные схемы для решения уравнений гиперболического типа

Постановка дифференциальной задачи. Переход к разностной схеме. Реализация разностных схем. Разностные схемы для уравнения второго порядка: явная схема, неявная схема. Разностные схемы для уравнения переноса: явные методы Эйлера, разности против потока, схема Лакса. Неявный метод Эйлера. Метод с перешагиванием. Метод Лакса-Вендроффа (одношаговый, двухшаговый). Метод Мак-Кормака. Центрированная по времени неявная схема.

Темы практических работ**Тема 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**

1. Приближенное решение задачи Коши методом:
 - a) Эйлера,
 - b) Хойна,
 - c) Эйлера-Коши на полуцелой сетке,
 - d) Рунге-Кутта 4-го порядка.

Тема 2. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Численное решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом:

- a) прогонки,
- b) методом стрельбы.

Тема 3. Элементы теории разностных схем

1. Аппроксимация производных.
2. Дифференциальное приближение разностной схемы.
3. Спектральный признак устойчивости разностных схем.
4. Исследование устойчивости разностных схем спектральным признаком.

Тема 4. Разностные схемы для уравнений параболического типа

Разностные схемы для уравнений с постоянными коэффициентами:

1. явная схема,
2. неявная схема,
3. метод Кранка-Николсона,
4. схема Ричардсона,
5. схема Дюфорта-Франкела,
6. схема с весами.

Тема 5. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа

Реализация разностных схем:

1. Пятиточечная схема.
2. Девятиточечная схема.
3. Метод последовательной верхней релаксации.

Тема 6. Разностные схемы для решения уравнений гиперболического типа

Разностные схемы для уравнения второго порядка: явная схема, неявная схема.

Разностные схемы для уравнения первого порядка (уравнения переноса):

1. Разности против потока.
2. Схема Лакса.
3. Неявный метод Эйлера.
4. Метод с перешагиванием.
5. Метод Лакса-Вендроффа (одношаговый, двухшаговый).
6. Метод Мак-Кормака.
7. Центрированная по времени неявная схема.

Образцы средств для проведения текущего контроля**Тема 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**

1. Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\{y' = f(t, y), y(t_0) = y_0. \quad \text{на отрезке } [t_0, T], \text{ с шагом } h = \frac{T-t_0}{n}.$$

- а) методом Эйлера;
- б) методом Эйлера-Коши;
- в) методом Эйлера-Коши на полуцелой сетке;

Найти точное решение задачи. Построить на одном чертеже графики точного и приближенных решений.

Тема 2. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Дано дифференциальное уравнение второго порядка, поставлена смешанная краевая задача на отрезке $[a, b]$

$$y'' + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x)$$

$$c_0 y(a) + c_1 y'(a) = c_2 y(b) + d_1 y'(b) = d_2$$

Построить приближенное решение конечно-разностным методом первого порядка на выбранной сетке. Результаты решений сравнить с точным решением.

Тема 3. Элементы теории разностных схем

1. Найти порядок аппроксимации разностных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j = \frac{-u_{i+2j} + 8u_{i+1j} - 8u_{i-1j} + u_{i-2j}}{12\Delta x}$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} \Big|_j = \frac{-u_{j+3} + 4u_{j+2} - 5u_{j+1} + 2u_j}{\Delta y^2}$$

2. Для уравнения $u_t + u_x = f(x, t)$ исследовать разностные схемы на аппроксимацию и устойчивость (с использованием спектрального признака):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = f_i^n$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = f_i^n$$

Тема 4. Разностные схемы для уравнений параболического типа

1. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \quad u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = \varphi(x) \right.$$

Для решения использовать явную схему.

Взять $h = (b - a)/10$; шаг τ выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots, T$.

УКАЗАНИЕ. Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид $\tau \leq 0.5(h^2/k)$.

Тема 5. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа

1. Найти приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(0, y) = f_1(y), \quad u(a, y) = f_2(y), \quad u(x, 0) = f_3(x), \quad u(x, b) = f_4(x), \quad x \in [0, a]$$

Реализовать разностные схемы:

- Пятиточечная схема.
- Девятиточечная схема.

Тема 6. Разностные схемы для решения уравнений гиперболического типа

Решить начальную задачу для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq X, \quad u(0, t) = f(-t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Рассмотреть конечно-разностные схемы:

- Схема Эйлера (разности против потока);
- Схема Лакса;
- Метод Мак-Кормака.

Сравнить приближенное решение с точным аналитическим решением $u(x, t) = f(x - ct)$, использовать различные значения параметров сетки τ и h , вывести число Куранта r . Сравнить полученные решения (графически и в виде таблицы значений u_i^n).

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
---	------	---

темы		
1.	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	Работа с учебной литературой, знакомство с содержанием электронных источников, самостоятельное изучение заданного материала. Выполнение практических заданий, подготовка к практическим занятиям.
2.	Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	Работа с учебной литературой, знакомство с содержанием электронных источников, самостоятельное изучение заданного материала. Выполнение практических заданий, подготовка к практическим занятиям.
3.	Элементы теории разностных схем	Работа с учебной литературой, знакомство с содержанием электронных источников, самостоятельное изучение заданного материала. Выполнение практических заданий, подготовка к практическим занятиям.
4.	Разностные схемы для уравнений параболического типа	Работа с учебной литературой, знакомство с содержанием электронных источников, самостоятельное изучение заданного материала. Выполнение практических заданий, подготовка к практическим занятиям.
5	Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	Работа с учебной литературой, знакомство с содержанием электронных источников, самостоятельное изучение заданного материала. Выполнение практических заданий, подготовка к практическим занятиям.
6	Разностные схемы для уравнений гиперболического типа	Работа с учебной литературой, знакомство с содержанием электронных источников, самостоятельное изучение заданного материала. Выполнение практических заданий, подготовка к практическим занятиям.
7	Промежуточная аттестация (экзамен)	Подготовка к промежуточной аттестации (экзамену)

Порядок выполнения каждого вида самостоятельной работы:

1. Изучение лекционного материала по теме
2. Изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы
3. Разбор практических примеров, продемонстрированных на лекциях и решенных на практических занятиях

6. Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю)

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Форма проведения промежуточной аттестации – экзамен.

Пример заданий экзаменационного билета.

Задание 1.

Метод Эйлера и его модификации решения задачи Коши для ОДУ.

Задание 2.

Постановка начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Явная схема, дисперсионное уравнение, вывод условия устойчивости.

Задание 3.

Найти порядок аппроксимации разностной производной.

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_j = \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2\Delta y}$$

Задание 4.

Для уравнения $u_t + u_x = f(x, t)$ исследовать разностную схему на устойчивость (с использованием спектрального признака).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = f_i^n$$

Примерные вопросы к экзамену

1. Метод разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши для ОДУ.
2. Метод Эйлера и его модификации.
3. Методы Рунге- Кутты.
4. Численное решение линейного уравнения 2-го порядка (метод прогонки, метод стрельбы)
5. Понятие конечно - разностной сетки. Аппроксимация производных на конечно-разностной сетке.
6. Конечно - разностные аппроксимации производных, использующие больше трех узлов разностной сетки.
7. Понятие сходимости разностной схемы, проверка сходимости разностной схемы.
8. Определение аппроксимации разностной схемы.
9. Определение устойчивости разностной схемы.
10. Сходимость как следствие аппроксимации и устойчивости (теорема Лакса).
11. Дифференциальное приближение разностной схемы.
12. Каноническая запись разностной схемы.
13. Устойчивость как ограниченность норм степеней оператора перехода.
14. Необходимый спектральный признак устойчивости. Алгоритм применения признака.
15. Устойчивость по начальным данным, примеры исследования устойчивости по начальным данным
16. Разностные схемы для уравнений гиперболического типа. Явные методы Эйлера. Разности против потока. Схема Лакса. Неявный метод Эйлера. Метод с перешагиванием. Метод Лакса-Вендроффа (одношаговый, двухшаговый). Метод Мак-Кормака. Центрированная по времени неявная схема.
17. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Пятиточечная схема. Девятиточечная схема. Метод последовательной верхней релаксации.
18. Разностные схемы для уравнений параболического типа. Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Явная схема. Неявная схема. Метод Кранка-Николсона. Схема Ричардсона. Схема Дюфорта-Франкела. Схема с весами.

6.2. Критерии оценивания компетенций:

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-4. Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	ОПК-4.1. Решает задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	Теоретическая часть- Задания 1,2 Практическая часть – Задания 3,4 Вопросы к аттестации	Компетенция сформирована при правильности и полноте ответов на теоретические вопросы, при глубине понимания вопроса и правильности выполнения предложенных заданий. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»
1.	ПК-3. Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения	ПК-3.1. Разрабатывает алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения ПК-3.2. Применяет алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения	Теоретическая часть- Задания 1,2 Практическая часть – Задания 3,4 Вопросы к аттестации	Компетенция сформирована при правильности и полноте ответов на теоретические вопросы, при глубине понимания вопроса и правильности выполнения предложенных заданий. Шкала критериев согласно требованиям п.4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Гильмутдинов, Р. Ф. Численные методы: учебное пособие / Р. Ф. Гильмутдинов, К. Р. Хабибуллина. — Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2018. — 92 с. — ISBN 978-5-7882-2427-5. — Текст:

электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/95068.html> (дата обращения: 11.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

7.2. Дополнительная литература:

1. Вагер, Б. Г. Численные методы: учебное пособие / Б. Г. Вагер. — Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2017. — 152 с. — ISBN 978-5-9227-0786-2. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/78584.html> (дата обращения: 11.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей
2. Олегин, И. П. Введение в численные методы: учебное пособие / И. П. Олегин, Д. А. Красноруцкий. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2018. — 115 с. — ISBN 978-5-7782-3632-5. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/91332.html> (дата обращения: 11.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

7.3. Интернет-ресурсы

1. Научная электронная библиотека. URL: <http://elibrary.ru/>.
2. Электронные ресурсы ИБЦ ТюмГУ. URL: <https://bmk.utmn.ru/ru/>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.
2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

- Microsoft Imagine Academy (ранее Dreamspark): MS Visual Studio, ОС семейства MS Windows, MS Visio;
- MATLAB Classroom + Academic (Simulink, Statistics, Symbolic, Optimization, Partial Differential Equation);
- Maple 16;
- платформа для электронного обучения Microsoft Teams.

Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:

- Программная платформа Moodle <https://docs.moodle.org/dev/License>
- Реализация языка программирования Python CPython <https://docs.python.org/3/license.html>
- Среда разработки Spyder <https://github.com/spyder-ide/spyder/blob/master/LICENSE.txt>
- Дистрибутив Python Anaconda <https://www.anaconda.com/eula-anaconda-individual-edition>
- Java Development Kit <https://openjdk.java.net/legal/gplv2+ce.html>

- Среда разработки IntelliJ IDEA Community Edition <https://github.com/JetBrains/intellij-community/blob/master/LICENSE.txt>
- Среда разработки Code::Blocks <http://www.codeblocks.org/license>
- Текстовый редактор Notepad++ <https://github.com/notepad-plus-plus/notepad-plus-plus/blob/v7.9.2/LICENSE>
- Система описания бизнес-процессов Business Studio https://www.businessstudio.ru/promo/for_institutes/conditions/
- Файловый менеджер FAR Manager <https://farmanager.com/license.php?l=ru>
- Система автоматизированного проектирования T-FlexCAD <https://www.tflexcad.ru/download/t-flex-cad-free/license.php>
- Локальный веб-сервер Denwer <https://github.com/liberborn/denwer#%D0%B4%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BB%D1%8C%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9-%D0%BD%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80-web-%D1%80%D0%B0%D0%B7%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D1%87%D0%B8%D0%BA%D0%B0>

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине необходимы:

- для проведения лекционных занятий учебная аудитория, оснащённая мультимедийным оборудованием;
- для проведения практических занятий по подгруппам работ классы персональных компьютеров (1 студент на компьютер) с установленными программными продуктами.
- для проведения самостоятельной работы студентов – аудитории, оснащенные компьютерами с выходом в интернет.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки

01.03.01 – Математика

Профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Форма обучения очная

Басинский К.Ю. Численные методы математической физики. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины «Численные методы математической физики» опубликована на сайте ТюмГУ: <https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

© Тюменский государственный университет, 2021.

© Басинский К.Ю., 2021.

1. Пояснительная записка

Цель дисциплины «Численные методы в механике сплошных сред» заключается в изучении математических методов, схем и средств математического моделирования в математической физике с учётом математического и физического подходов.

Основные задачи дисциплины:

1. Изучение студентом теории математического моделирования применительно к задачам математической физики;
 2. Освоение студентом постановки задач математической физики, приобретение навыка выбора наиболее эффективного численного метода их решения и его реализации;
- Овладение студентом методами математического моделирования на примерах задач математической физики.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для ее успешного изучения необходимы знания, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Численные методы», Дифференциальные уравнения, «Уравнения в частных производных».

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Таблица 1

Код и наименование компетенции (из ФГОС ВО)	Планируемые результаты обучения: (знаниевые/функциональные)
ОПК-4. Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	Знает: методику применения информационных технологий при решении прикладных задач. Умеет: применять информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности.
ПК-1. Способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области	Знает: теоретические основы и практические приложения численных методов, их взаимосвязь и связь с другими дисциплинами Умеет: применять полученные знания при решении прикладных задач, самостоятельно осваивать численные методы для использования их в работе и научных исследованиях

ПК-3. Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения	Знает: основные численные методы и алгоритмы решения математических задач Умеет: использовать основные понятия и методы вычислительной математики, разрабатывать и реализовывать численные методы и алгоритмы на языке программирования высокого уровня; практически решать типичные задачи, требующие численной реализации на ЭВМ
ПК-5. Способен пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования	Знает: типичные постановки задач, основные результаты в области численных методов. Умеет: ставить и решать задачи, включая решение задач с использованием вычислительных машин.

2. Структура и объем дисциплины

Таблица 2

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре
			6 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	4	4
	час	144	144
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		0	0
Практические занятия		0	0
Лабораторные/практические занятия по подгруппам		64	64
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		78	78
Вид промежуточной аттестации			Зачет

3. Система оценивания

Оценивание знаний, умений и навыков студентов, полученных ими в ходе изучения дисциплины, производится в соответствии с «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Тюменский государственный университет» (утверждено Решением Ученого совета от 31.08.2020, протокол №10).

Текущий контроль освоения материала дисциплины осуществляется в рамках модульно-рейтинговой (100-балльной) системы оценок. Оценивается выполнение практических работ. Студенты, набравшие по итогам семестра 75 и более баллов, получают «зачтено».

Зачёт проходит в устной форме – в виде собеседования по теоретическому вопросу. Критерий освоения дисциплины: выполнение не менее 90% практических работ. Если студент в течение семестра не сдавал отчеты по практическим работам, то перед ответом на вопрос зачетного билета, он должен ответить на вопросы по практическим работам.

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины, час.				
		Всего	Виды аудиторной работы (академические часы)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные /практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
6 семестр						
1	Введение в математическое моделирование. Приближенные числа и действия над ними	6			2	
2	Интерполяция функций	12			4	
3	Численное решение систем линейных уравнений	18			12	
4	Численное решение систем нелинейных уравнений	12			6	
5	Численное интегрирование	12			6	
6	Численное дифференцирование	12			6	
7	Численные методы решения ОДУ. Задача Коши.	16			10	
8	Численные методы решения ОДУ. Краевая задача	14			6	
9	Разностные схемы для уравнений с частными производными. Устойчивость разностных схем	16			4	
10	Интегральные уравнения и методы оптимизации	12			4	
11	Разностные схемы для уравнений с частными	12			4	

производными. Устойчивость разностных схем						
Зачет	2	0	0	0	0	2
Итого (часов)	144	0	0	0	64	0

4.2. Содержание дисциплины по темам

1. «Введение в математическое моделирование. Приближенные числа и действия над ними»

- Простейшие математические модели;
- Фундаментальные законы природы;
- Вариационные принципы;
- Применение аналогий при построении моделей;
- О численных методах;
- Иерархический подход к построению моделей;
- О нелинейности математических моделей;
- Предварительные выводы о принципах построения математических моделей;
- Дискретизация;
- Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная);
- Обусловленность;
- Вычисление значений простейших функций;
- О методах вычислений.

2. «Интерполяция функций»

- Основные понятия;
- Приближение функций интерполяционными полиномами;
- Погрешность интерполяции;
- Возможные обобщения приближения функций;
- Кусочная интерполяция;
- Среднеквадратичное приближение;
- Метод сплайнов;
- Ортогональные многочлены;
- Интерполяция функций двух переменных.

3. «Численное решение систем линейных уравнений»

- Численное решение систем линейных уравнений;
- Вычислительные методы линейной алгебры;
- Прямые методы;
- Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонки, квадратного корня;
- Итерационные методы, Якоби, Зейделя, оптимизации параметра;
- Плохо обусловленные системы;
- Задачи на собственные векторы и собственные значения;
- Методы отражения, вращений для эрмитовых матриц;
- Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений;
- Число обусловленности матрицы;
- Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений и псевдообратные матрицы;
- Сингулярное разложение.

4. «Численное решение систем нелинейных уравнений»

- Численное решение нелинейных уравнений;
 - Методы отделения корней, сканирования, деления отрезка пополам, хорд, Ньютона, простых итераций, релаксаций;
 - Графическая интерпретация рассмотренных методов;
 - Погрешности методов.
5. **«Численное интегрирование»**
- Численное интегрирование;
 - Квадратурные формулы;
 - Погрешности квадратурных формул и их устойчивость;
 - Алгоритм Ромберга;
 - Возможности переменного шага;
 - Метод Гаусса;
 - Несобственные интегралы;
 - Многомерные интегралы;
 - Метод Монте-Карло.
6. **«Численное дифференцирование»**
- Построение формул для приближенного вычисления производных;
 - Анализ погрешности;
 - Неустойчивость численного дифференцирования.
7. **«Численные методы решения ОДУ. Задача Коши»**
- Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных;
 - Методы Эйлера (явный и неявный);
 - Представление о методах, как о разностных схемах, аппроксимирующих исходную задачу;
 - Анализ погрешности;
 - Модифицированный метод Эйлера предиктор-корректор, метод Рунге-Кутты;
 - Представление о многошаговых методах, методы Адамса;
 - Метод Милна, метод Пикара, специальные методы;
 - Интегрирование уравнений второго и высших порядков.
8. **«Численные методы решения ОДУ. Краевая задача»**
- Численное решение краевых задач;
 - Линейный случай: непосредственная аппроксимация исходной задачи, сведение её к последовательности задач Коши;
 - Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод “стрельбы”;
 - Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений;
 - Аппроксимация, устойчивость, сходимости;
 - Теорема о сходимости численного решения к решению исходной задачи;
 - Элементы теории разностных уравнений;
 - Примеры аналитических решений разностных задач.
9. **«Разностные схемы для уравнений с частными производными. Устойчивость разностных схем»**
- Модельные уравнений (переноса, теплопроводности, Пуассона);
 - Эволюционная задача, типичные формулировки задач для уравнений переноса и теплопроводности;
 - Аппроксимация;
 - Примеры разностных схем для модельных задач;
 - Явные и неявные схемы;

- Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем, аппроксимирующих законы сохранения;
- Устойчивость линейных разностных схем. Устойчивость по начальным данным, правым частям, краевым условиям;
- Примеры анализа устойчивости простейших схем;
- Метод гармоник;
- Принцип “замороженных коэффициентов”;
- Конструирование явной схемы для системы гиперболических уравнений;
- Пример исследования устойчивости нелинейной схемы.

10. «Интегральные уравнения и методы оптимизации»

- Численные методы решения интегральных уравнений;
- Метод регуляризации решений линейных интегральных уравнений первого рода, алгоритм нахождения приближенных решений;
- Поиск экстремума, одномерная и многомерная оптимизация.

11. «Разностные схемы для уравнений с частными производными. Устойчивость разностных схем»

- Устойчивость линейных разностных схем. Устойчивость по начальным данным, правым частям, краевым условиям;
- Метод гармоник.

Текущий контроль освоения материала дисциплины осуществляется в рамках модульно-рейтинговой (100-балльной) системы оценок. Оценивается выполнение практических работ.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 4

№ темы	Темы	Формы СРС, включая требования к подготовке к занятиям
1.	Введение в математическое моделирование. Приближенные числа и действия над ними	Чтение обязательной и дополнительной литературы
2.	Интерполяция функций	Чтение обязательной и дополнительной литературы
3	Численное решение систем линейных уравнений	Чтение обязательной и дополнительной литературы
4	Численное решение систем нелинейных уравнений	Чтение обязательной и дополнительной литературы
5	Численное интегрирование	Чтение обязательной и дополнительной литературы
6	Численное дифференцирование	Чтение обязательной и дополнительной литературы
7	Численные методы решения ОДУ. Задача Коши.	Чтение обязательной и дополнительной литературы
8	Численные методы решения ОДУ. Краевая задача	Чтение обязательной и дополнительной литературы

9	Разностные схемы для уравнений с частными производными. Устойчивость разностных схем	Чтение обязательной и дополнительной литературы
10	Интегральные уравнения и методы оптимизации	Чтение обязательной и дополнительной литературы
11	Разностные схемы для уравнений с частными производными. Устойчивость разностных схем	Чтение обязательной и дополнительной литературы

6. Промежуточная аттестация по дисциплине

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

Студенты, набравшие по итогам семестра 75 и более баллов, получают «зачтено». Зачёт проходит в устной форме – в виде собеседования по теоретическому вопросу.

Вопросы для подготовки к зачёту

1. Простейшие математические модели. Применение аналогий при построении моделей.
2. Дискретизация. Приближенные числа, погрешности (абсолютная и относительная). Обусловленность.
3. Интерполяция функций. Приближение функций интерполяционными полиномами.
4. Кусочная интерполяция.
5. Интерполяция функций двух переменных.
6. Методы отделения корней, сканирования, деления отрезка пополам, хорд, Ньютона, простых итераций, релаксаций.
7. Численное решение систем линейных уравнений.
8. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые методы.
9. Методы Гаусса, главного элемента, Жордана, прогонки, квадратного корня. Итерационные методы, Якоби, Зейделя, оптимизация параметра.
10. Методы отражения, вращений для эрмитовых частиц.
11. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений. Число обусловленности матрицы.
12. Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений и псевдообратные матрицы.
13. Численное решение систем нелинейных уравнений. Формулировка задачи.
14. Метод Ньютона. Метод простых итераций.
15. Численное интегрирование.
16. Квадратурные формулы. Погрешности квадратурных формул и их устойчивость.
17. Алгоритм Ромберга. Возможности переменного шага.
18. Метод Гаусса.
19. Метод Монте-Карло.
20. Построение формул для приближенного вычисления производных. Анализ погрешности.
21. Неустойчивость численного дифференцирования.

22. Задача Коши для системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных.
23. Методы Эйлера (явный и неявный).
24. Модифицированный метод Эйлера предиктор-корректор. Метод Рунге-Кутты.
25. Представление о многошаговых методах, методы Адамса. Метод Милна, метод Пикара, специальные методы.
26. Интегрирование уравнений второго и высших порядков.
27. Численное решение краевых задач.
28. Линейный случай: непосредственная аппроксимация исходной задачи, сведение её к последовательности задач Коши.
29. Нелинейные задачи: прогонка с итерациями (для уравнений второго порядка), метод «стрельбы».
30. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.
31. Примеры аналитических решений разностных задач.
32. Модельные уравнения (переноса, теплопроводности, Пуассона). Примеры разностных схем для модельных задач.
33. Явные и неявные схемы.
34. Интегро-итерполяционный метод построения разностных схем, аппроксимирующих законы сохранения.
35. Устойчивость линейных разностных схем.
36. Метод гармоник. Принцип «замороженных коэффициентов».
37. Численные методы решения интегральных уравнений.

6.2 Критерии оценивания компетенций

Таблица 5

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесенные с планируемыми результатами обучения	Оценочные материалы	Критерии оценивания
1.	ОПК-4. Способен решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	ОПК-4.1. Решает задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	Выполнение практических работ	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка на зачете в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы

2.	ПК-1. Способен передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области	ПК-1.1. Осуществляет передачу результатов проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде рекомендаций по планированию и организации производственных процессов, выраженных в терминах предметной области	Выполнение практических работ	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка на зачете в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы
3.	ПК-3. Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области прикладного программного обеспечения	ПК-3.1. Разрабатывает алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения ПК-3.2. Применяет алгоритмические и программные решения в области прикладного программного обеспечения	Выполнение практических работ	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка на зачете в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе ответа студентом на теоретические вопросы
4.	ПК-5. Способен пользоваться заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией, оценивать возможный результат моделирования	ПК-5.1. Пользуется заданной математической моделью, формулой, алгоритмом, геометрической конфигурацией. ПК-5.2. Оценивает возможный результат моделирования.	Выполнение практических работ	Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках традиционной (4-балльной) систем оценок. Оценка на зачете в рамках традиционной системы оценок выставляется на основе

				ответа студентом на теоретические вопросы
--	--	--	--	---

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Основная литература:

1. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А.В. Пантелеев, И.А. Кудрявцева. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 512 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-012333-2. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1028969> (дата обращения: 12.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

2. Гулин, А. В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие / Гулин А.В., Мажорова О.С., Морозова В.А. - Москва : АРГАМАК-МЕДИА, НИЦ ИНФРА-М, 2019- 368с.:- (Прикладная математика, информатика, информ.технологии). - ISBN 978-5-16-012876-4. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1032671> (дата обращения: 12.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Дополнительная литература:

1. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семёнов. - 2-е изд. - Москва : Физматлит, 2012. - 656 с. - ISBN 978-5-9221-1198-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544780> (дата обращения: 12.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

2. Давыдов, А. П. Методы математической физики. Классификация уравнений и постановка задач. Метод Даламбера: Курс лекций / Давыдов А.П., Злыднева Т.П. - Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 100 с. ISBN 978-5-16-105499-4 (online). - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/884637> (дата обращения: 12.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

3. Тарасик, В. П. Математическое моделирование технических систем : учебник / В.П. Тарасик. — Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2020. — 592 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-011996-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1042658> (дата обращения: 12.05.2020). – Режим доступа: по подписке.

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета <http://lib.mexmat.ru>.

2. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва) <http://elibrary.ru>.

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). URL: <https://icdlib.nspu.ru/>.

2. Национальная электронная библиотека. URL: <https://rusneb.ru/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:

1. Microsoft Word.
2. Microsoft Excel.
3. Microsoft PowerPoint.
4. Maple.
5. Платформа для электронного обучения Microsoft Teams.
6. Matlab

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория с доской и мультимедийным оборудованием для лекционных и практических занятий.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
Института математики и
компьютерных наук



М.Н. Перевалова

23.06.2021

ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рабочая программа дисциплины
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.01 Математика

профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»,
форма обучения очная

Павлова Е. А. Языки программирования. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль подготовки «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», форма обучения очная. Тюмень, 2021.

Рабочая программа дисциплины Языки программирования опубликована на сайте ТюмГУ: <https://www.utmn.ru/sveden/education/#>

1. Пояснительная записка

Актуальность дисциплины обусловлена тем, что при изучении дисциплины студент получает знания о приёмах алгоритмизации, о формальной постановке задачи, об основных этапах реализации программ на компьютере.

В рамках освоения дисциплины студенты знакомятся с возможностями среды программирования на языке высокого уровня (редактором текста, компилятором, отладчиком), изучают основные приемы решения задач обработки текстовой и числовой информации, изучают средства описания данных, средства описания действий.

Цели и задачи освоения дисциплины

Программа дисциплины ориентирована на достижение следующих целей: освоение базовых конструкций языка программирования высокого уровня; изучение стандартных типов данных языка программирования высокого уровня; овладение умением конструирования пользовательских типов данных; получение знаний о приёмах алгоритмизации, о формальной постановке задачи, об основных этапах реализации программ на компьютере; формирование готовности использовать приобретенные знания в профессиональной деятельности.

Исходя из целей, в программе дисциплины предусматриваются задачи: сформировать у обучающегося необходимый объем знаний об основных типах данных и алгоритмических конструкциях языка программирования высокого уровня; научить читать код и разрабатывать программы в процедурном стиле программирования; сформировать умения разбивать задачу на подзадачи, выстраивать архитектуру простого приложения; разрабатывать и записывать на языке программирования высокого уровня алгоритмы решения классических и прикладных задач программирования.

1.1. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 Дисциплины (модули). Для освоения данной дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные обучающимися в результате освоения следующих, предшествующих данной, дисциплин: школьный курс Информатики и ИКТ.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины (модуля)

Код и наименование компетенции	Код и наименование части компетенции (при наличии паспорта компетенций)	Планируемые результаты обучения (знаниевые/функциональные)
ОПК-4: способность решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных	-----	Знает: основные направления развития технологий программирования, виды основных структур данных, их особенности, основные методы решения типовых численных задач, методы решения прикладных задач.

технологий и с учётом основных требований информационной безопасности.		Умеет: формализовать вычислительную задачу и выбрать необходимый типовой алгоритм для ее решения; выявить типовые, а также нестандартные задачи, разработать метод решения поставленной задачи с использованием типовых алгоритмов.
ОПК-5: Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	-----	Знает: методы разработки алгоритмов и компьютерных программ. Умеет: разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения.

2. Структура и трудоемкость дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы		Всего часов	Часов в семестре
			3 семестр
Общая трудоемкость	зач. ед.	5	5
	час	180	180
Из них:			
Часы контактной работы (всего):		66	66
Лекции		30	30
Практические занятия		0	0
Лабораторные/практические занятия по подгруппам		34	34
Консультации и иная контактная работа		2	2
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося		114	114
Вид промежуточной аттестации			зачёт

3. Система оценивания

3.1. Текущий и промежуточный контроль освоения и усвоения материала дисциплины осуществляется в рамках модульно-рейтинговой (100-балльной) и традиционной (2-балльной) систем оценок (зачтено/не зачтено).

Оценка студента в рамках модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время практических работ. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины. Студент получает «зачтено» автоматически в случае набора в течение семестра от 71 до 100 баллов.

Студент, у которого сумма набранных баллов, оказалась меньше 71, должен сдать зачёт. Зачёт проводится в устно-письменной форме. Билет содержит вопросы из разных

разделов курса: теоретические вопросы и минимум две задачи. Оценка студенту выставляется на основе его ответа на теоретические вопросы, а также решения задач, примерный уровень которой соответствует уровню задач практических работ. Эта оценка характеризует уровень знаний, умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины.

- Шкала оценивания при проведении текущего контроля (по итогам выполнения практических заданий):

0 баллов – задание не выполнено.

1 балл-при выполнении задания изучен лекционный материал, программно задание не выполнено;

2 балл – при выполнении задания допущены существенные ошибки;

3 балла – отсутствие общей идеи, системы, частичное выполнение задания.

4 балла – выполнение задания с несущественными 1-2ошибками.

5 баллов – выполнение без ошибок в соответствии с заданием.

6 баллов – выполнение без ошибок, предложен творческий подход, содержание шире задания.

- Шкала оценивания по билетам зачёта:

Каждый билет содержит от 3 до 5 вопросов. Преподаватель вправе задать уточняющий вопрос по каждому из вопросов билета.

Ответ на каждый из вопросов оценивается последующей шкале:

2 («неудовлетворительно») – студент не ответил на вопрос либо содержание ответа не раскрывает сути вопроса.

3 («удовлетворительно») – студент отвечает по существу, но не демонстрирует целостного представления по вопросу, не может аргументировать свой ответ.

4 («хорошо») – студент отвечает по существу, демонстрирует целостное представление по вопросу; не может аргументировать свой ответ либо аргументация необоснована.

5 («отлично») – студент дает полный, развернутый, аргументированный ответ на вопрос.

- Итоговая оценка выводится как средняя арифметическая из оценок по вопросам билета:

«незачтено» – среднее арифметическое оценок за ответы на вопросы билета меньше либо равно 3.0

«зачтено» – среднее арифметическое оценок за ответы на вопросы билета больше 3.0

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины (модуля), час				
		Всего	Виды аудиторной работы (в час.)			Консультации и иная контактная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные /практические занятия по подгруппам	
1	2	3	4	5	6	7
3 семестр						

1.	Историческая справка развития языков программирования высокого уровня, стили и среда программирования. Системы счисления. Поразрядные операции.	13	2	0	2	0
2.	Основные понятия языка высокого уровня. Структура программы. Типы данных языка высокого уровня. Константы и переменные.	15	2	0	4	0
3.	Операции и выражения. Математические функции. Функции ввода и вывода информации. Спецификации формата.	15	2	0	2	0
4.	Операторы языка программирования высокого уровня. Условный оператор.	15	2	0	2	0
5.	Оператор выбора. Описание и использование.	15	2	0	2	0
6.	Оператор цикла с предусловием. Оператор цикла с постусловием.	15	2	0	2	0
7.	Оператор цикла с заданным числом повторений. Операторы прерывания цикла.	15	2	0	2	0
8.	Массивы. Одномерные, многомерные массивы.	15	4	0	4	0
9.	Алгоритмы сортировки одномерного массива.	15	2	0	2	0
10.	Функции. Особенности передачи параметров.	15	4	0	6	0
11.	Строки. Основные алгоритмы обработки строковых данных.	15	2	0	4	0
12.	Основные алгоритмы обработки данных. Поиск в упорядоченном массиве методом деления пополам. Алгоритмы численного интегрирования.	15	4	0	2	0
	Зачет	2	0	0	0	2
	Итого (часов)	180	30	0	34	0

4.2. Содержание дисциплины (модуля) по темам

Задания практикума выполняются с использованием систем программирования.

1. Историческая справка развития языков программирования высокого уровня, стили и среда программирования. Системы счисления. Поразрядные операции

Историческая справка. Развитие языков программирования высокого уровня. Парадигмы программирования. Среда Visual Studio. Установка. Создание проекта, особенности подключения библиотек

Системы счисления. Бинарная арифметика. Решение задач.

Практическая работа №1. Выполнение вычислений в разных системах счисления: сложение, умножение, поиск двоичного дополнения. Операции отрицания, сложения, умножения, сдвига. Решение задач.

Задания:

1. Перевести в десятичную систему счисления:
 AV_{16} 10010011_2 1001_8 2120_3
2. Выполнить сложение, результат представить в системах счисления с основаниями 8, 2, 8, 10, 16: $25_{10} + B001_{16} =$
3. Выполнить сложение, результат представить в системах счисления с основаниями 2, 3, 8, 10, 16: $1010_3 + 210_3 =$
4. Написать двоичное дополнение к числу 00111000. Проверить, что сумма числа и его двоичного дополнения равна 0.
5. Выполнить вычитание в двоичной форме: $25_{10} - 13_{10}$
6. Выполнить операцию ~ 132
7. Выполнить операцию $67 \& 13$
8. Выполнить операцию $44 | 64$
9. Выполнить операцию $10 \wedge 12$
10. Чему равно $(13 \wedge 168) \wedge 168$?
11. Выполнить операцию $33 \gg 2$
12. Выполнить операцию $111 \ll 1$
13. Написать шестнадцатеричную таблицу умножения на 5

2. Основные понятия языка высокого уровня. Структура программы. Типы данных языка высокого уровня, Константы и переменные.

Лексемы, операции, операторы, комментарии, строки, числа.

Целые типы данных, вещественные типы данных, логические типы данных, символьные типы данных. Понятие переменных, констант.

Практическая работа №2. Разработка простых программ на языке высокого уровня с использованием целых и вещественных переменных.

Задания:

1. Дано натуральное число меньше 16. Посчитать количество его единичных битов. Например, если дано число 9, запись которого в двоичной системе счисления равна 10012, то количество его единичных битов равно 2.
2. Вычислить, используя только операции умножения или деления. Вычислить за 4 операции a^{10} .

3. Операции и выражения. Математические функции. Функции ввода и вывода информации. Спецификации формата

Построение выражений с операциями и математическими функциями. Порядок выполнения операций в сложных выражениях. Особенности ввода и вывода чисел, строк.

Практическая работа №3. Построение логических выражений разной сложности.

Задания:

С помощью логической переменной и оператора присваивания написать выражение, истинное при выполнении условия:

1. «Хотя бы одно из целых чисел А, В, С положительное».
2. «Целые числа А, В, С отрицательные и кратны 7».
3. «Из целых чисел А, В, С только два равны между собой»
4. «Конь за один ход может перейти с поля (g1,c1) на поле (g2,c2)»

4. Операторы языка программирования высокого уровня. Условный оператор

Операторы языка программирования высокого уровня. Условный оператор. Пустой оператор, блок, оператор перехода. Сокращённая и полная форма условного оператора.

Практическая работа №4. Разработка программ разветвлённой структуры. Решение задач с использованием условных операторов.

Задания:

1. Напишите программу: даны произвольные числа а, b, с. Если нельзя построить треугольник с такими длинами сторон - напечатайте 0, иначе напечатать 3, 2, 1 в зависимости от того, равносторонний это треугольник, равнобедренный или какой-либо иной.
2. Для вещественных x,y,z вычислить $\max(x*y*z, xy/z)$.
3. Ввести четыре целых числа А, В, С, D, одно из которых отлично от трех других, равных между собой. Определить порядковый номер числа, отличного от остальных. Если пользователь введёт числа так, что они не будут соответствовать условию задачи - выдать сообщение об ошибке.

5. Оператор выбора. Описание и использование

Оператор выбора. Описание и использование. Отличия и сходства оператора выбора и условного оператора.

Практическая работа №5. Разработка программ с применением оператора выбора.

Задания:

1. Написать программу, печатающую название оценки m. На вход программе поступает числовое выражение оценки (2, 3, 4, 5), на выход— строковое выражение оценки («неудовлетворительно»).
2. В восточном календаре принят 60-летний цикл, состоящий из 12-летних подциклов, обозначаемых названиями цвета: зеленый, красный, желтый, белый и голубой. При этом каждый цвет следует по два года подряд. В каждом подцикле годы носят названия животных: крысы, коровы, тигра, зайца, дракона, змеи, лошади, овцы, обезьяны, петуха, собаки и свиньи. По номеру года определить его название, если 4 год нашей эры — начало цикла: «год зеленой крысы». », «удовлетворительно», «хорошо», «отлично»). Если пользователь введёт данные не соответствующие условию задачи - выдать сообщение «нет такой оценки».
3. Дано целое число N в диапазоне 0–99, определяющее возраст (в годах). Вывести строку «Мне N лет», обеспечив правильное согласование числа со словом «год», например: N = 20 - «Мне 20 лет», N = 41 - «Мне 41 год», N = 12 - «Мне 12 лет». Если пользователь введёт данные не соответствующие условию задачи - выдать сообщение об ошибке.

6. Оператор цикла с предусловием. Оператор цикла с постусловием

Оператор цикла с предусловием. Оператор цикла с постусловием. Условие продолжения и завершения цикла.

Практическая работа №6. Разработка программ циклической структуры. Решение задач с использованием операторов цикла с предусловием и постусловием.

Задания:

1. В заданный текст входит каждая из букв слова 'key'.
2. В тексте больше строчных английских букв, чем прописных английских букв.
3. В тексте цифр, числовое значение которых четно, больше чем цифр, числовое значение которых нечетных.

7. Оператор цикла с заданным числом повторений. Операторы прерывания цикла

Особенности организации операторов цикла с заданным числом повторений. Назначение операторов прерывания цикла, особенности применения.

Практическая работа №7. Разработка программ циклической структуры. Решение задач с использованием операторов цикла с заданным числом повторений.

Задания:

1. Найти произведение для N множителей: $P=(1 + \sin(3))(1 + \sin(6)) \dots (1 + \sin(3k))$
2. Найти сумму для N слагаемых: $Y=1 + x^{1/2!} + x^{2/3!} + \dots + x^{(n)/(n+1)!}$

8. Массивы. Одномерные, многомерные массивы.

Массивы. Одномерные, многомерные массивы. Хранение массивов. Доступ к элементу массива. Допустимые операции с массивами.

Практическая работа №8. Решение задач с использованием одномерных массивов. Заполнение массива разными способами, вывод массива на экран, поэлементная обработка массива.

Задания:

1. Написать программу, которая печатает True, если все элементы массива x отличаются от минимального и максимального не более, чем на 100, False в противном случае.
2. Вычислить для вектора x:
 $x[0]*x[n-1] + x[1]*x[n-2] + \dots + x[n-1]*x[0]$

Практическая работа №9. Решение задач с использованием многомерных массивов. Заполнение массива разными способами, вывод массива на экран, поэлементная обработка массива.

Задания:

1. Задан двумерный массив $B[1..N,1..M]$. Среди его элементов два и только два равны между собой. Напечатайте их индексы.
2. Составьте программу печати элементов квадратной матрицы, просматривая ее по линиям, параллельным одной из диагоналей, в направлении сверху вниз.

9. Алгоритмы сортировки элементов одномерного массива

Алгоритмы сортировки одномерного массива: сортировка пузырьковая, сортировка выбором максимального элемента, сортировка вставками.

Практическая работа №9. Сравнение алгоритмов сортировки элементов одномерного массива.

Задания:

1. Написать программу, которая вычислит количество сравнений и обменов в сортировках:
 - a. пузырьком
 - b. выбором
 - c. вставками
 - d. бинарными вставками
2. Задан числовой массив, состоящий из n элементов ($n \leq 100$). Используя сортировку массива выбором, определить количество элементов, отделяющих первый (по порядковому номеру) максимальный элемент от последнего (по порядковому номеру) минимального.

10. Функции. Особенности передачи параметров.

Функции. Описание и использование. Формальные и фактические параметры. Передача аргументов.

Задания:

1. Напишите логическую функцию $TEST(a, k)$, принимающую значение True, если все элементы k -го столбца двумерного массива нулевые.
2. Напишите логическую функцию $TEST(a, k)$, принимающую значение True, если минимальный элемент k -й строки двумерного массива равен максимальному элементу k -го столбца двумерного массива.
3. Напишите логическую функцию $TEST(a, k)$, принимающую значение True, если все элементы k -й строки двумерного массива есть в k -ом столбце двумерного массива.

Практическая работа №10. Организация программ с использованием функций. Особенности передачи параметров в функции. **Основные алгоритмы обработки данных:** Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя, алгоритм проверки простого числа, алгоритм нахождения чисел Фибоначчи. Алгоритм вычисления полиномов по схеме Горнера. Решение задач с использованием функций.

Задания:

1. Напишите программу, которая вычисляет значение выражение с помощью схемы Горнера:
 $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) (b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + y_k y^k)$
2. Получите массив чисел Фибоначчи, которые являются простыми числами.

11. Строки

Функции для работы со строками.

Практическая работа №11. Обработка строковых и символьных данных.

Задания:

1. Дан текст. Проверить, правильно ли в нем расставлены круглые скобки (т. е. находится ли справа от каждой открывающей скобки соответствующая ей закрывающая скобка, а слева от каждой закрывающей — соответствующая ей открывающая). Предполагается, что внутри каждой пары скобок нет других скобок.
 - а) Ответом должны служить слова *да* или *нет*.
 - б) В случае неправильности расстановки скобок:
если имеются лишние правые (закрывающие) скобки, то выдать сообщение с указанием позиции первой такой скобки;
если имеются лишние левые (открывающие) скобки, то выдать сообщение с указанием количества таких скобок. Если скобки расставлены правильно, то сообщить об этом.
2. Дана строка текста, в котором нет начальных и конечных пробелов. Необходимо изменить ее так, чтобы длина строки стала равна заданной длине (предполагается, что требуемая длина не меньше исходной). Это следует сделать путем вставки между словами дополнительных пробелов. Количество пробелов между отдельными словами должно отличаться не более чем на один.

12. Основные алгоритмы обработки данных. Поиск в упорядоченном массиве методом деления пополам. Алгоритмы численного интегрирования

Практическая работа №12. Основные алгоритмы обработки данных. Поиск в упорядоченном массиве методом деления пополам. Алгоритмы численного интегрирования: формула прямоугольников. Правило Рунге.

Задания:

1. Вычислить значение интеграла с заданной точностью.

$$\int_1^2 \arctg^2 x dx$$

2. Решите уравнение $e^x \sin x - 1 = 0$. Отрезок локализации корня $[0; 3]$

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Таблица 3

№ Темы	Темы	Виды СРС
1	Историческая справка развития языков программирования высокого уровня, стили и среда программирования. Системы счисления. Поразрядные операции.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям, установка необходимого программного обеспечения
2	Основные понятия языка высокого уровня. Структура программы. Типы данных языка высокого уровня. Константы и переменные.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
3	Операции и выражения. Математические функции. Функции ввода и вывода информации. Спецификации формата.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
4	Операторы языка программирования высокого уровня. Условный оператор.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
5	Оператор выбора. Описание и использование.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
6	Оператор цикла с предусловием. Оператор цикла с постусловием.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
7	Оператор цикла с заданным числом повторений. Операторы прерывания цикла.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
8	Массивы. Одномерные, многомерные массивы.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
9	Алгоритмы сортировки одномерного массива.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
10	Функции. Особенности передачи параметров.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
11	Строки. Основные алгоритмы обработки данных.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям

12	Основные алгоритмы обработки данных. Поиск в упорядоченном массиве методом деления пополам. Алгоритмы численного интегрирования.	Чтение обязательной и дополнительной литературы, подготовка к практическим занятиям
13	Промежуточная аттестация – зачет	Подготовка к промежуточной аттестации (зачёту)

Порядок выполнения каждого вида самостоятельной работы:

1. При прочтении основной и дополнительной литературы рекомендуется провести анализ содержания лекционного материала, обратить внимание на интернет-ресурсы, привести примеры использования изученного на лекции материала при решении прикладных задач.
2. При подготовке к практическим занятиям провести анализ содержания лекционного материала, рассмотреть примеры в источниках при решении прикладных задач, соблюдать логику и последовательность выполнения практического задания.
3. При подготовке к промежуточной аттестации (зачёту) рекомендуется прочтение основной и дополнительной литературы, интернет-ресурсов по дисциплине, самостоятельный поиск источников по теме, анализ содержания лекционного материала, повторение тем и просмотр реализованных программ в рамках практических занятий.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю)

6.1 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Форма проведения промежуточной аттестации – зачёт.

Пример задания: билет к зачёту содержит 3 вопроса.

1. Структурные операторы языка высокого уровня. Условный оператор. Примеры.
2. Одномерные массивы. Описания массива. Возможные типы индексов, возможные типы элементов массива. Допустимые операции с массивами. Примеры.
3. Заполнить двумерный массив целыми числами в диапазоне от K1 до K2. В этом массиве для каждого столбца найти число элементов, кратных 5.

Примерные вопросы к зачёту

1. Представление целых чисел в двоичном формате, в восьмеричном формате, в шестнадцатеричном формате. Операции сложения, умножения. Представление отрицательных целых чисел в двоичной системе счисления. Примеры.

2. История появления языков программирования, стили программирования. Понятие языка программирования высокого уровня и низкого уровня. Понятие класса, объекта. Примеры.

3. Основные понятия языка программирования высокого уровня: алфавит, лексемы. Примеры.

4. Понятие типа данных, понятие переменной, понятие оператора в языке программирования высокого уровня. Примеры. Структура программы на языке высокого уровня. Примеры.

5. Система типов языка. Целые типы. Диапазон возможных значений, требуемая память, основные операции. Примеры.

6. Система типов языка высокого уровня. Вещественные типы. Диапазон возможных значений, требуемая память, основные операции. Примеры.
7. Система типов языка высокого уровня. Символьный тип. Диапазон возможных значений, требуемая память, основные операции. Примеры.
8. Система типов языка высокого уровня. Логический тип. Возможные значения, требуемая память, Основные отношения, операции. Примеры.
9. Понятие операции и выражения. Бинарные, унарные операции. Приоритет операций и отношений в выражениях. Примеры.
10. Понятие операции и выражения. Преобразования и совместимость типов в выражениях. Примеры.
11. Битовые операции: поразрядное отрицание, поразрядное сложение, поразрядное умножение, поразрядное исключаящее или, операция сдвига влево, операция сдвига вправо. Примеры.
12. Простые операторы языка высокого уровня. Оператор присваивания. Понятие совместимости типов (по присваиванию). Процедуры ввода и вывода. Примеры.
13. Операторы языка высокого уровня. Оператор перехода. Операторы прерывания. Примеры.
14. Структурные операторы языка высокого уровня. Условный оператор. Примеры.
15. Структурные операторы языка высокого уровня. Оператор выбора. Примеры.
16. Структурные операторы языка высокого уровня. Операторы цикла. Примеры.
17. Одномерные массивы. Описания массива. Возможные типы индексов, возможные типы элементов массива. Допустимые операции с массивами. Примеры.
18. Ссылочные типы данных, представление в памяти. Многомерные массивы. Описания массива. Возможные типы индексов, возможные типы элементов массива. Допустимые операции с массивами. Примеры.
19. Функции. Список формальных и фактических параметров. Особенности передачи фактических параметров. Структура памяти (стек, куча) при передаче параметров. Примеры.
22. Понятие алгоритма. Свойства алгоритма. Алгоритм нахождения НОД. Алгоритм нахождения чисел Фибоначчи. Примеры.
23. Понятие алгоритма. Свойства алгоритма. Алгоритм определения простоты числа. Примеры.
24. Понятие алгоритма. Свойства алгоритма. Алгоритм вычисления полинома в точке по схеме Горнера. Примеры.
25. Алгоритмы сортировки одномерного массива. Сортировка пузырьковая. Примеры.
26. Алгоритмы сортировки одномерного массива. Сортировка выбором максимального элемента. Примеры.
27. Алгоритмы сортировки одномерного массива. Сортировка простыми вставками. Сортировка бинарными вставками. Примеры.
28. Алгоритмы численного интегрирования. Формула прямоугольников. Примеры.
29. Алгоритм нахождения корня нелинейного уравнения методом деления пополам. Пример программы.
30. Строковый тип. Хранение строк в памяти компьютера. Функции для работы со строками. Примеры.

6.2 Критерии оценивания компетенция:

Таблица 4

Карта критериев оценивания компетенций

№ п/п	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций, соотнесённые с	Оценочные материалы	Критерии оценивания

		планируемыми результатами обучения		
1.	ОПК-4: способность решать задачи профессиональной деятельности с использованием существующих информационно-коммуникационных технологий и с учётом основных требований информационной безопасности.	ОПК-4.1. Использует знания о современном состоянии и основных тенденциях развития технологий программирования. ОПК-4.2. Применяет основные структуры данных, основные методы решения типовых численных задач при решении прикладных задач. ОПК-4.3. Умеет формализовать вычислительную задачу и выбрать необходимый типовой алгоритм для ее решения; выявить типовые, а также нестандартные задачи, разработать метод решения поставленной задачи с использованием типовых алгоритмов.	Практические работы.	Компетенция сформирована при правильности и полноте ответов на теоретические вопросы, при глубине понимания вопроса и правильности выполнения предложенных заданий. Шкала критериев согласно требованиям п. 4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»
2.	ОПК-5: Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.1. Разрабатывает алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	Практические работы.	Компетенция сформирована при правильности и полноте ответов на теоретические вопросы, при глубине понимания вопроса и правильности выполнения предложенных заданий. Шкала критериев согласно требованиям п. 4.29 «Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ФГАОУ ВО ТюмГУ»

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1 Основная литература:

1. Павловская, Т. А. Программирование на языке высокого уровня C# / Т. А. Павловская. — 2-е изд. — Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. — 245 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/73713.html> (дата обращения: 25.05.2020).

7.2 Дополнительная литература:

1. Агапов, В. П. Основы программирования на языке C# : учебное пособие / В. П. Агапов. — Москва : Московский государственный строительный университет, ЭБС АСБ, 2012. — 128 с. — ISBN 978-5-7264-0576-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/16366.html> (дата обращения: 25.05.2020).

2. Баженова, И. Ю. Введение в программирование : учебное пособие / И. Ю. Баженова, В. А. Сухомлин. — 3-е изд. — Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 326 с. — ISBN 978-5-4497-0652-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/97539.html> (дата обращения: 25.05.2020)

7.3 Интернет-ресурсы:

Курс C#. <https://stepik.org/course/51198/promo>

7.4 Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Межвузовская электронная библиотека (МЭБ) <https://icdlib.nspu.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

- Лицензионное ПО, в том числе отечественного производства:
 - платформа для электронного обучения Microsoft Teams
 - Microsoft Imagine Academy (ранее Dreamspark): MS Visual Studio, MS SQL Server, ОС семейства MS Windows, MS Visio, MS Project
 - Microsoft Office 365
- Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:
 - платформа Moodle <https://docs.moodle.org/dev/License>
 - FAR Manager

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине необходимы:

- для проведения лекционных занятий учебная аудитория, оснащённая мультимедийным оборудованием;
- для проведения практических занятий по подгруппам классы персональных компьютеров (1 студент на 1 компьютер) с установленными программными продуктами – системы программирования на языках C++, C#.
- для проведения самостоятельной работы студентов – аудитории, оснащенные компьютерами с выходом в интернет.