МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М.С.ВОРОБЬЕВА, Е.А.ПАВЛОВА

СТРУКТУРЫ И АЛГОРИТМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Методические рекомендации по выполнению лабораторных работ

ТЕМА 1. АЛГОРИТМЫ: ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ

Лабораторная работа № 1

Цель – сформировать представление о математическом анализе алгоритмов, в том числе тех, которые основаны на рекурсии, изучить способы вычисления рекуррентных отношений.

Ключевые понятия

Размерность задачи. Временная сложность алгоритмов: время выполнения в худшем случае, в среднем, в лучшем случае. Асимптотическая нотация: верхние оценки временной сложности, точные оценки, нижние оценки. Классификация алгоритмов по временной сложности.

Рекурсивные алгоритмы. Рекуррентные отношения. Способы вычислений рекуррентных отношений: метод подстановки, метод итераций, основная теорема.

Упражнения

1. Какое утверждение является истинным?

1) $\sqrt{N} = O(\log N)$;

2) $2^{N+1} = O(2^N)$;

3) $3^N = O(2^N)$;

4) . $\left(\frac{3}{2}\right)^N = O\left(\left(\frac{1}{3}\right)^N\right)$

Ответ. Запись $T(N) = O(g(N))$ означает: существует такая константа $c > 0$ и число N_0, что $0 \le T(N) \le c \cdot g(N)$ для всех $N \ge N_0$.

Проверим утверждение $\sqrt{N} = O(\log N)$. Предположим, что существуют константы c и N_0 такие, что для всех $N \ge N_0$ выполняется неравенство $\sqrt{N} \le c \log N$, тогда $c \ge \frac{\sqrt{N}}{\log N}$ для всех $N \ge N_0$. Но $\frac{\sqrt{N}}{\log N}$ принимает любое, как угодно большое, значение при достаточно большом N, поэтому не существует такой константы c, которая могла бы превзойти $\frac{\sqrt{N}}{\log N}$ для всех N, то есть $\sqrt{N}$ не может иметь порядок роста $O(\log N)$.

Проверим утверждение $2^{N+1} = O(2^N)$.

Предположим, что существуют константы c и N_0 такие, что для всех $N \geq N_0$ выполняется неравенство $2^{N+1} \leq c2^N$, тогда $c \geq \frac{2^{N+1}}{2^N}$ для всех $N \geq N_0$, то есть при $c = 2$ и $N = 1$ неравенство $2^{N+1} \leq c \cdot 2^N$ выполняется. Следовательно, утверждение $2^{N+1} = O(2^N)$ является истинным.

Проверим утверждение $3^2 N \log N = O(N \log N)$. Предположим, что существуют константы c и N_0 такие, что для всех $N \geq N_0$ выполняется неравенство $3^2 N \log N \leq cN \log N$. Разделим обе части неравенства на $N \log N$, тогда $c \geq \frac{3N}{\log N} + 1$ для всех $N \geq N_0$. Но $\frac{3N}{\log N} + 1$ принимает любое, как угодно большое, значение при достаточно большом N, поэтому не существует такой константы c, которая могла бы превзойти $\frac{3N}{\log N} + 1$ для всех N, то есть $3N^2 + N \log N$ не может иметь порядок роста $O(N \log N)$.

Проверим утверждение $\left(\frac{3}{2}\right)^N = O\left(\left(\frac{1}{3}\right)^N\right)$. Предположим, что существуют константы c и N_0 такие, что для всех $N \geq N_0$ выполняется неравенство $\left(\frac{3}{2}\right)^N \leq c\left(\frac{1}{3}\right)^N$. Разделим обе части неравенства на $\left(\frac{1}{3}\right)^N$, тогда $c \geq \left(\frac{9}{2}\right)^N$ для всех $N \geq N_0$. Но $\left(\frac{9}{2}\right)^N$ принимает любое, как угодно большое, значение при достаточно большом N, поэтому не существует такой константы c, которая могла бы превзойти $\left(\frac{9}{2}\right)^N$ для всех N, то есть $\left(\frac{3}{2}\right)^N$ не может иметь порядок роста $O\left(\left(\frac{1}{3}\right)^N\right)$.

2. Пусть время работы алгоритма $T(N) = O(N^2)$. Если 1000 элементов обрабатываются за 2 мсек., то во сколько раз следует ожидать увеличения

времени выполнения при обработке 3000 элементов?

Ответ. Если количество элементов увеличивается в три раза, значит время работы алгоритма $T(3N) = O((3N)^2)$, или $T(3N) = O(9N^2)$, то есть следует ожидать увеличения времени выполнения в 9 раз.

3. Найти наиболее точную оценку для рекуррентных отношений:

1) $T(N) = T(N – 1) + 1$ при $N > 1, T(1) = 1$;

2) $T(N) = 4T(N/2) + N$, $T(1) = 1$;

3) $T(N) = 4T(N/2) + N2$, $T(1) = 1$;

4) $T(N) = 4T(N/2) + N3$, $T(1) = 1$.

Ответ. Для решения уравнения (а) воспользуемся методом итераций, который заключается в постепенном раскрытии рекуррентного отношения до тех пор, пока оно не станет зависеть только от N и начальных условий.

Раскрывая это отношение по формуле $T(N) = T(N – 1) + 1$, имеем:

$T(N – 1) = T(N – 2) + 1;$

$T(N – 2) = T(N – 3) + 1;$

$T(N – 3) = T(N – 4) + 1;$

…

$T(N – (N – 2)) = T(N – (N – 1)) + 1$, *то есть* $T(2) = T(1) + 1$.

Подставляя полученные отношения в исходное уравнение, получаем:

$T(N) = T(N – 1) + 1 = T(N – 2) + 2 = T(N – 3) + 3 = \ldots = T(1) + (N – 1) = 1 + (N – 1) = N.$

Следовательно, $T(N) = O(N)$.

Для решения уравнений (б, в, г) воспользуемся основным методом, который применяется для вычисления рекуррентных отношений вида:

$$T(N) = a\,T(N/b) + f(N), \qquad (1)$$

где $a \geq 1$, $b > 1$ — некоторые константы, f — положительная функция (по крайней мере для больших значений аргументов).

Соотношение (1) возникает в тех алгоритмах, которые делят задачу размера N на a подзадач размера N/b, эти задачи решаются рекурсивно за

время $T(N/b)$ и результаты объединяются. Затраты времени на разбиение и объединение описываются функцией $f(N)$.

Основной метод заключается в применении **основной теоремы**, которая формулируется следующим образом.

Пусть $T(N) = a\,T(N/b) + f(N)$,

где $a \geq 1$, $b > 1$ — некоторые константы, а f — асимптотически положительная функция.

1. если $f(N) = O(N^{\log_b a - \varepsilon})$, для некоторого $\varepsilon > 0$, то $T(N) = \Theta(N^{\log_b a})$;
2. если $f(N) = \Theta(N^{\log_b a})$, то $T(N) = \Theta(N^{\log_b a} \log N)$;
3. если $f(N) = \Omega(N^{\log_b a + \varepsilon})$, для некоторого $\varepsilon > 0$ и если $a \cdot f(N/b) \leq c \cdot f(N)$ для некоторой $c < 1$ и достаточно больших N, то $T(N) = \Theta(f(N))$.

Суть теоремы заключается в следующем. Сравним $f(N)$ с $N^{\log_b a - \varepsilon}$. Функция, которая растёт быстрее другой, причём с «запасом», равным N^{ε}, и определяет порядок роста $T(N)$. Если же функции одного порядка, то появляется дополнительный логарифмический множитель.

В рекуррентном отношении (b) $a = 4$, $b = 2$, $f(N) = N$.

Вычислим: $N^{\log_b a - \varepsilon} = N^{\log_2 4 - \varepsilon}$. Поскольку $N = O(N^{\log_2 4 - \varepsilon})$ для $\varepsilon = 1$, то выполняется 1 случай основной теоремы, поэтому $T(N) = \Theta(N^2)$.

В рекуррентном отношении (c) $a = 4$, $b = 2$, $f(N) = N^2$.

Вычислим: $N^{\log_b a - \varepsilon} = N^{\log_2 4 - \varepsilon}$. Поскольку $N^2 = \Theta(N^{\log_2 4})$, то выполняется 2 случай основной теоремы, поэтому $T(N) = \Theta(N^2 \log N)$.

В рекуррентном отношении (d) $a = 4$, $b = 2$, $f(N) = N^3$.

Вычислим: $N^{\log_b a - \varepsilon} = N^{\log_2 4 - \varepsilon}$. Поскольку $N^3 = \Omega(N^{\log_2 4 + \varepsilon})$ для любого $0 < \varepsilon \leq 1$ и $af(N/b) \leq cf(N)$ для $c = 1/2$, то выполняется 3 случай основной теоремы, поэтому $T(N) = \Theta(N^3)$.

4. Используя O- символику, найдите время выполнения (как функции от N) в

наихудшем случае процедуры сортировки «пузырьком», которая упорядочивает массив целых чисел в неубывающем порядке.

Ответ. Рассмотрим процедуру bubble:

```
type Tvector = array[1..N] of iNteger;
procedure Bubble(var x: Vector);
VAR i, j, temp: integer;
begin
{1}    for i:= N downto 2 do
{2}        for j:= 1 to i-1 do
{3}            if x[j] > x[j+1] then
                   begin
{4}                    temp:= x[j];
{5}                    x[j]:= x[j+1];
{6}                    x[j+1]:= temp;
                   end
end; {bubble}
```

За каждый проход внутреннего цикла (операторы {3} — {6}) «пузырёк» с наибольшим элементом «всплывает» в начало массива. Число элементов N, подлежащих сортировке, может служить мерой объёма входных данных. Сначала отметим, что все операторы присваивания имеют некоторое постоянное время выполнения, не зависящее от размера входных данных. Таким образом, операторы {4} — {6} имеют время выполнения порядка O(1), то есть равнозначно некоторой константе. В соответствии с правилом сумм время выполнения этой группы операторов: O(max (1, 1, 1)) = O(1).

Теперь посчитаем время выполнения условных и циклических операторов. Операторы **if** и **for** вложены друг в друга, поэтому пойдём от внутренних операторов к внешним, последовательно определяя время выполнения условного оператора и каждой итерации цикла. Для оператора **if** проверка логического выражения занимает время порядка *O(1)*. Мы не знаем,

будут ли выполнятся операторы в теле условного оператора (строки {4} — {6}), но поскольку ищется наихудшее время выполнения, то, естественно, предполагаем, что они выполняются. Таким образом, получаем, что время выполнения группы операторов {3} — {6} имеет порядок *O(1)*.

Далее рассмотрим группу {2} — {6} операторов внутреннего цикла. Общее правило вычисления времени выполнения цикла заключается в суммировании времени выполнения каждой итерации цикла. Для операторов {2} — {6}время выполнения на каждой итерации имеет порядок *O(1)*. Цикл выполняется *N–i* раз, поэтому по правилу произведений общее время выполнения цикла: $O((N-i) \cdot 1) = O(N-i)$.

Теперь перейдём к внешнему циклу, который содержит все исполняемые операторы программы. Оператор {1} выполняется *N-1* раз, поэтому суммарное время выполнения программы определяется следующим образом:

формула суммы = $N\,(N-1)/2 = N^2/2 — N/2$,

которое имеет порядок $O(N^2)$. Таким образом, процедура сортировки «пузырьком» выполняется за время, пропорциональное квадрату числа элементов, подлежащих упорядочиванию.

Задания для самостоятельной работы

№ варианта	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
№ задания	a,b, c,p	d,e, f,q	g,h, i,r	j,k, l,s	t,m, n,o	a,d, g,p	b,f, h,q	k,n, e,r	c,f, g,s	i,l, n,t	a,h, o,p	f,i, l,q	b,k, m,r	c,k, o,s	b,i, m,t

1. Проверить утверждения с помощью определения.

a) $17 = O(1)$;

b) $N(N — 1)/2 = O(N^2)$;

c) $2^{2N} = O(2^N)$;

d) $\log N = O(N)$;

e) $N \log N = O(N^2)$;

f) $N \ln N = O(N^{3/2})$;

g) $3N^3 + 2N^2 = O(N^2)$;

h) $N \log N + 5 = O(N)$;

i) $2^N + N^3 = O(2^N)$;

j) $f(N) = O(f(N))$;

k) $f(N) = O(f(N)^2)$;

l) $(N + 1) \log N = O(N)$;

m) $4^N = \Theta(3^N)$;

n) $2^N = O(3^N)$;

o) $N \log N = \Omega(N)$;

p) $N^3 + 2N^2 = \Omega(N^2)$;

q) $\log N = \Omega(N)$;

r) $N \log N = \Omega(N^2)$;

s) $3N^2 + 2N - 5 = \Omega(N)$;

t) $N + \log N = \Omega(\log N)$.

2. Пусть время работы алгоритма $T(N) = O(f(N))$. Если X элементов обрабатываются за Y мсек., то во сколько раз следует ожидать увеличения времени выполнения при обработке Z элементов?

№ варианта	f(N)	X	Y	Z	№ варианта	f(N)	X	Y	Z
1.	N^2	1000	5	3000	**2.**	N^3	3000	50	9000
3.	N	2000	10	5000	**4.**	2^N	1000	100	2000
5.	N^3	3000	10	6000	**6.**	logN	5000	8	20000
7.	2^N	4000	4	4002	**8.**	1	1000	12	3000
9.	logN	5000	2	15000	**10.**	logN	2000	10	6000
11.	1	1000	4	4000	**12.**	N^3	1000	20	2000
13.	N^2	2000	11	6000	**14.**	N^2	2000	15	10000
15.	N	3000	20	9000	**16.**	2^N	3000	10	3003

3. Найти наиболее точную оценку для рекуррентных отношений.

№ варианта	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
№ задания	a,b, c,p	d,e, f,q	g,h, i,r	j,k, l,s	p,m, n,o	a,d, g,q	b,f, h,r	k,n, e,s	c,f, g,p	i,l, n,q	a,h, o,r	f,i, l,s	b,k, m,p	c,k, o,q	b,i, m,r

a) $T(N) = 3T(N/2) + N$, $T(1) = 1$;

b) $T(N) = 3T(N/2) + N^2$, $T(1) = 1$;

c) $T(N) = 8T(N/2) + N^3$, $T(1) = 1$;

d) $T(N) = 2T(N/2) + N \log N$, $T(1) = 1$;

e) $T(N) = 9T(N/2) + N^3$, $T(1) = 1$;

f) $T(1) = 1$, $T(N) = 2T(N/2) + 1$, при $N > 1$;

g) $T(N) = 3T(N/2) + N^2$, $T(1) = 1$;

h) $T(N) = 3T(N/2) + N \log N$, $T(N)$ — константа при $N \le 8$;

i) $T(N) = 16T(N/4) + N^2$, *если* $T(N)$ *— константа при* $N \le 2$;

j) $T(N) = 9T(N/2) + N^2$, $T(1) = 1$;

k) $T(N) = 7T(N/2) + N^2$, *если* $T(N)$ *— константа при* $N \le 2$;

l) $T(N) = 2T(N/4) + N^{1/2}$, *если* $T(N)$ *— константа при* $N \le 2$;

m) $T(N) = 2T(N/4) + \sqrt{N}$, $T(1) = 1$;

n) $T(N) = 2T(N/2) + N \log N$, *если* $T(N)$ *— константа при* $N \le 2$;

o) $T(N) = T(9N/10) + N$; *если* $T(N)$ *- константа при* $N \le 2$;

p) $T(N) = 2T(N - 1) + 1$, $T(1) = 2$;

q) $T(N) = T(N - 1) + N$, $T(1) = 1$;

r) $T(N) = 2T(N - 1) + N$, $T(1) = 2$;

s) $T(N) = T(N - 1) + \log N$, $T(1) = 2$.

4. Используя *O*- символику, найдите время выполнения (как функции от *N*) процедуры или функции в наихудшем случае.

№ варианта	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
№ задания	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	b	c	d

a)
```
procedure matmpy (N: integer);
    var i, j, k: integer;
    begin
        for i:= 1 to N do
            for j:= 1 to N do
            begin
                C[i,j]:= 0;
                for k:= 1 to N do
                    C[i,j]:= C[i,j] + A[i,k] * B[k,j]
            end
    end;
```

b)
```
procedure mystery (N: integer);
    var i, j, k: integer;
    begin
        for i:= 1 to N-1 do
            for j:= i+1 to N do
            for k:= 1 to j do
            {группа операторов с временем выполнения O(1)}
    end;
```

c)
```
procedure veryodd (N: integer);
```

```
var i, j, x, y: integer;
begin
        for i:= 1 to N do
                if odd(i) then
                begin
                        for j:= 1 to N do   x:= x+1;
                        for j:= 1 to i do    y:= y+1;
                end
end;
```

d)
```
function recursive (N: integer): integer;
begin
        if N<= 1 then return (1)
        else
                return (recursive (N-1) + recursive (N-2))
end;
```

Тестовые задания

1. Какое утверждение является истинным?

a) $(N + 5)^3 = O(N^3)$

b) $\log N = \Omega(\sqrt{N})$

c) $5^N = O(3^N)$

d) $2^N = \Omega(6^N)$

2. Какое утверждение не является истинным?

a) если f1(N) = O(g(N)) и f2(N) = O(g(N)), то f1(N) = f2(N)

b) f(N) = Θ(g(N)) и g(N) = Θ(h(N)) влечёт f(N) = Θ(h(N))

c) f(N) = O(g(N)) и g(N) = O(h(N)) влечёт f(N) = O(h(N))

d) f(N) = Ω(g(N)) и g(N) = Ω(h(N)) влечёт f(N) = Ω(h(N))

3. Пусть время работы алгоритма T(N) = O(log N). Если 1000 элементов обрабатываются за 1 мсек., то при обработке 3000 элементов следует ожидать увеличения времени выполнения

a) на постоянную величину *c)* в 3 раза

b) в 9 раз *d)* в 6 раз

4. Пусть время работы алгоритма $T(N) = O(N^3)$. Если 1000 элементов обрабатываются за 2 мсек., то при обработке 3000 элементов следует ожидать увеличения времени выполнения

a) в 27 раз *b)* в 30 раз *c)* в 9 раз *d)* в 6 раз

5. Нижняя оценка времени работы алгоритма показывает

a) лучшее время работы

b) гарантированное время работы

c) среднее время работы

d) асимптотически точное время работы

6. Если при удвоении количества элементов время работы алгоритма *(T(N))* растёт на постоянную величину, то данный алгоритм относится к классу

   a) логарифмических *(T(N) = O(log N))*

   b) линейных *(T(N) = O(N))*

   c) экспоненциальных *(T(N) = O(2^N))*

   d) с постоянным временем выполнения *(T(N) = O(1))*

7. Если при увеличении количества элементов на единицу время работы алгоритма *(T(N))* растёт в два раза, то данный алгоритм относится к классу

   a) экспоненциальных *(T(N) = O(2^N))*

   b) логарифмических *(T(N) = O(log N))*

   c) линейных *(T(N) = O(N))*

   d) квадратичных *(T(N) = O(N^2))*

8. Для рекуррентного отношения *T(N) = T(N – 1) + 1, T(1) = 1* наиболее точной верхней оценкой является

   a) T(N) = O(N)

   b) T(N) = O(1)

   c) T(N) = O(log N)

   d) T(N) = O(N log N)

9. Для рекуррентного отношения *T(N) = 4T(N/2) + N log N, T(1) = 1* наиболее точной асимптотической оценкой является

   a) T(N) = Θ(N^2)

   b) T(N) = Θ(N^3)

   c) T(N) = Θ(N log N)

   d) T(N) = Θ(N^2 log N)

10. Для рекуррентного отношения *T(N) = 3T(N/2) + N^2, T(1) = 1* наиболее точной асимптотической оценкой является

    a) T(N) = Θ(N^2)

    b) T(N) = Θ(N^3)

c) $T(N) = \Theta (N \log N)$ ***d)*** *$T(N) = \Theta(N^2 \log N)$*

Лабораторная работа № 2

Цель – изучить вопросы применения основных методов построения алгоритмов: метода «разделяй и властвуй» и динамического программирования.

Ключевые понятия

Основные методы построения рекурсивных алгоритмов. Метод «разделяй и властвуй». Динамическое программирование (нисходящий и восходящий методы), принципы оптимальности Беллмана.

Задания для самостоятельной работы

1. Сравните время вычисления 35-го числа Фибоначчи при помощи формулы Бине, итерационной формулы, метода «разделяй и властвуй», метода нисходящего динамического программирования, метода восходящего динамического программирования.
2. а). Опишите алгоритм нахождения максимального значения в массиве, используя принцип «разделяй и властвуй».

   б). Опишите алгоритм вычисления функции a^N, N — целое положительное число, используя принцип «разделяй и властвуй».

   в). Напишите реализацию задачи о рюкзаке методом «разделяй и властвуй».

   г). Напишите реализацию задачи о рюкзаке методом восходящего динамического программирования.
3. Решите задачу о Ханойской башне.
4. На вершине лесенки, содержащей *N* ступенек, находится мячик, который начинает прыгать по ним вниз, к основанию. Мячик может прыгнуть на следующую ступеньку, на ступеньку через одну или через 2. (То есть, если мячик лежит на 8-ой ступеньке, то он может переместиться на 5-ую, 6-ую или 7-ую.). Напишите программу, которая определяет число всевозможных "маршрутов" мячика с вершины на

землю. Максимальная высоты лесенки — 30 ступеней, минимальная — 1 ступень.

5. На квадратной доске расставлены целые неотрицательные числа. Черепашка, находящаяся в левом верхнем углу, мечтает попасть в правый нижний. При этом она может переползать только в клетку справа или снизу и хочет, чтобы сумма всех чисел, оказавшихся у нее на пути, была бы максимальной. Напишите программу, которая определяет эту сумму.

Указания.

1). Используйте метод динамического программирования

2). Размер доски и числа на доске считывайте из файла.

6. Напишите программу, которая находит кратчайший путь во взвешенном графе (алгоритм Беллмана-Форда).

Указания.

1). Используйте метод динамического программирования

2). Граф считывайте из файла.

Тестовые задания

1. «Мемуаризация» – это название метода

a) нисходящего динамического программирования

b) восходящего динамического программирования

c) «разделяй и властвуй»

d) «прямой прогонки»

2. Оценка времени решения дискретной задачи о рюкзаке (где M – размер рюкзака, N – число видов предметов) методом ДП равна

a) T(N) = O(N + M)

b) T(N) = O(NM)

c) T(N) = O(N logM)

d) T(N) = O(M logN)

3. В основу метода ДП положен принцип оптимальности

a) Беллмана *b) Кормена* *c) Кнута* *d) Вирта*

4. Задача о Ханойской башне решается за время

a) $O(2^N)$ *b) $O(N^2)$* *c) $O(N^3)$* *d) $O(N^2 \log N)$*

5. Сколько перемещений необходимо выполнить для перестановки N дисков в задаче о Ханойской башне?

6. Оценка времени нахождения N-ного числа Фибоначчи по формуле Бине равна

a) $T(N) = O(1)$
b) $T(N) = O(N^2)$
c) $T(N) = O(N \log N)$
d) $T(N) = O(N)$

7. Наименее эффективным методом нахождения N-ного числа Фибоначчи является

a) метод «разделяй и властвуй»
b) метод восходящего ДП
c) метод нисходящего ДП
d) применение формулы Бине

8. Если оптимизационная задача имеет перекрывающиеся подзадачи, то наиболее эффективным будет использование

a) метода «разделяй и властвуй»
b) метода восходящего ДП
c) метода нисходящего ДП
d) жадного алгоритма

9. Наиболее эффективным методом решения непрерывной задачи о рюкзаке является

a) метод «разделяй и властвуй»
b) метод восходящего ДП
c) метод нисходящего ДП
d) жадный алгоритм

10. Задача об оптимальной триангуляции выпуклого многоугольника считается классической задачей

a) метода «разделяй и властвуй»

b) метода ДП

c) жадного алгоритма

ТЕМА 2. СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

Лабораторная работа № 3

Цель – рассмотреть основные абстрактные типы данных (АТД): линейный список, стек, очередь; проанализировать их реализацию с помощью указателей и массивов.

Ключевые понятия

Концепция АТД. Представление АТД в виде структуры данных. Линейные структуры данных: линейный список, стек, очередь, очередь с приоритетами, дек. Основные операции, представление и реализации. Применение структур данных. Метод исключения рекурсии с помощью стека.

Задания для самостоятельной работы

1. Смоделируйте ситуацию обслуживания клиентов в банке. Клиенты, случайным образом помещаются в одну из М очередей обслуживания. Случайным образом выбирается одна из очередей, и клиент обслуживается (выбывает из очереди). При каждой операции указывайте номер добавленного клиента, номер обслуженного клиента, и состояние очередей.
2. Реализуйте АТД «Очередь с приоритетами».

а). с приоритетным включением;

б) с приоритетным исключением.

3. Напишите программу для решения задачи о Ханойской башне без использования рекурсии.

Тестовые задания

1. Доступ к элементам стека осуществляется по принципу

a) SIFO *b) LIFO* *c) LISO* d) *FIFO*

4. Доступ к элементам очереди осуществляется по принципу

a) LISO *b) LIFO* *c) FILO* d) *FIFO*

5. Дек с ограниченным выходом позволяет:

a) *добавлять элементы только в один конец, а удалять – с обоих концов*

b) *добавлять элементы только в левый конец, а удалять –с правого*

c) *добавлять элементы в оба конца, а удалять – только с одного*

d) *добавлять и удалять элементы только в один конец*

6. «Магазин» – так часто называют структуру данных

a) *Стек* c) *Дек*

b) *Очередь* d) *Линейный список*

7. Для исключения рекурсии применятся

a) *дек с ограниченным выходом* c) *дек*

b) *стек* d) *очередь*

8. При наиболее эффективной реализации очередей с приоритетами операции вставки и удаления выполняются за время

a) *O(n/2)* b) *O(n)* c) *O(log n)* **d)** *O(1)*

Лабораторная работа № 4

Цель – рассмотреть АТД дерево, области применения деревьев; проанализировать математические свойства бинарных деревьев.

Ключевые понятия

Нелинейные структуры данных: деревья. Основные определения. Ориентированные деревья, упорядоченные деревья, бинарные деревья, m-арные деревья. Основные математические свойства бинарных деревьев. Преобразование упорядоченных деревьев в бинарные. АТД деревья. Основные операции, представление в памяти. Обходы деревьев. Применение деревьев. Деревья Хаффмана.

Упражнения

1. Сколько путей длины 3 существует в дереве, показанном на рисунке 1?

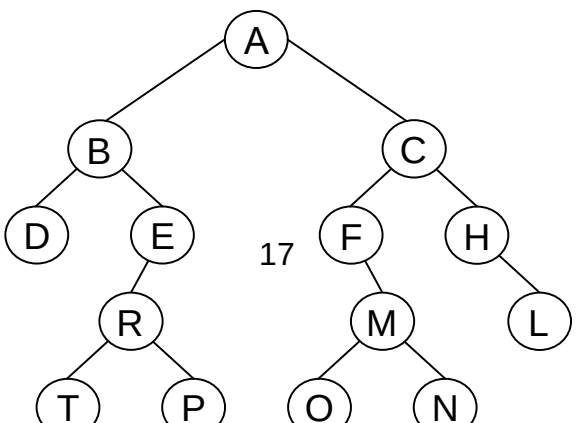


Рис. 1. Пример дерева

Ответ. В дереве существует 7 путей длины 3:

A B E R; B E R T; B E R P; A C F M; A C H L; C F M N; C F M O.

2. В какой последовательности будут перечислены узлы дерева, представленного на рисунке 1, при инфиксном, префиксном, постфиксном, поуровневом обходах?

Ответ. При инфиксном обходе узлы дерева посещаются в соответствии с правилом: «обойти левое поддерево, посетить корень, обойти правое поддерево». Следовательно, порядок узлов будет таким: D B T R P E A F O M N C H L. При префиксном обходе узлы дерева посещаются в соответствии с правилом: «посетить корень, обойти левое поддерево, обойти правое поддерево». Следовательно, порядок узлов будет таким: A B D E R T PC F M O N H L. При постфиксном обходе узлы дерева посещаются в соответствии с правилом: «обойти левое поддерево, обойти правое поддерево, посетить корень». Следовательно, порядок узлов будет таким: D T P R E B O N M F L H C A. При поуровневом обходе узлы дерева посещаются в соответствии с правилом «слева-направо, сверху-вниз». Следовательно, порядок узлов будет таким: A B C D E F H R M L T P O N.

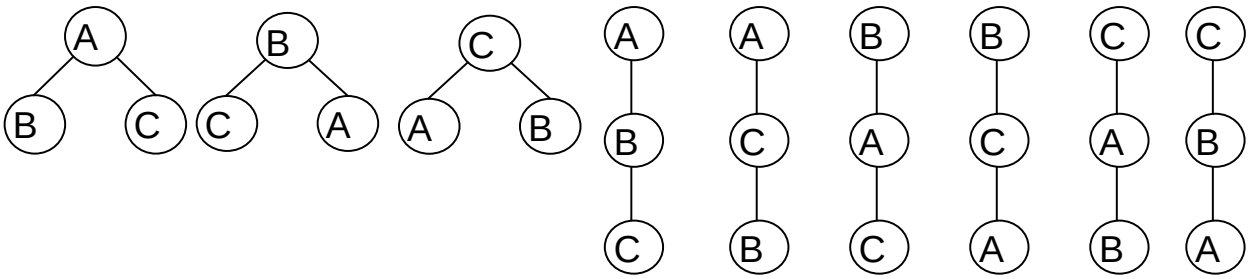
3. Сколько различных ориентированных деревьев можно создать из трёх узлов?

Ответ. Ориентированное дерево – это дерево, в котором неважен относительный порядок поддеревьев, то есть деревья, представленные на рисунке 2, одинаковые.

(а) (б)

Рис. 2. Два одинаковых ориентированных дерева

Из трёх узлов можно построить 9 таких деревьев:



4. Чему равна длина внешнего пути расширенного дерева, представленного на рисунке?

Ответ. Длина внешнего пути дерева – сумма уровней всех внешних узлов расширенного дерева. Данному бинарному дереву будет соответствовать расширенное дерево, представленное на рисунке 3 (внешние узлы обозначены квадратами).

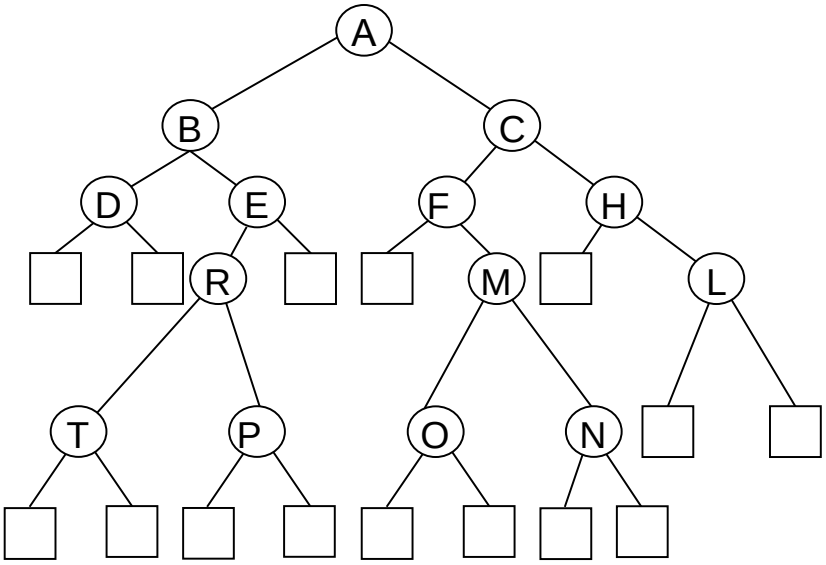


Рис. 3. Расширенное дерево

В этом дереве пять внешних узлов находятся на третьем уровне, два – на четвёртом, восемь – на пятом. Следовательно, длина внешнего пути расширенного дерева равна: 5*3 + 2*4 + 8*5 = 63.

5. Преобразуйте выражение ((a+b) + c * (d+e) + f) * (g+h) в постфиксную

форму.

Ответ. На рисунке 4 показано дерево, построенное для выражения ((a+b) + c * (d+e) + f) * (g+h).

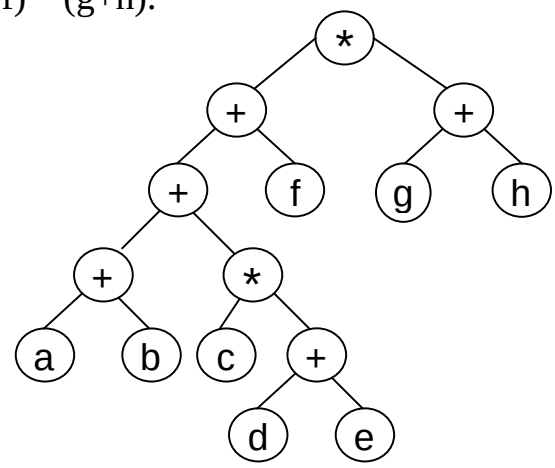
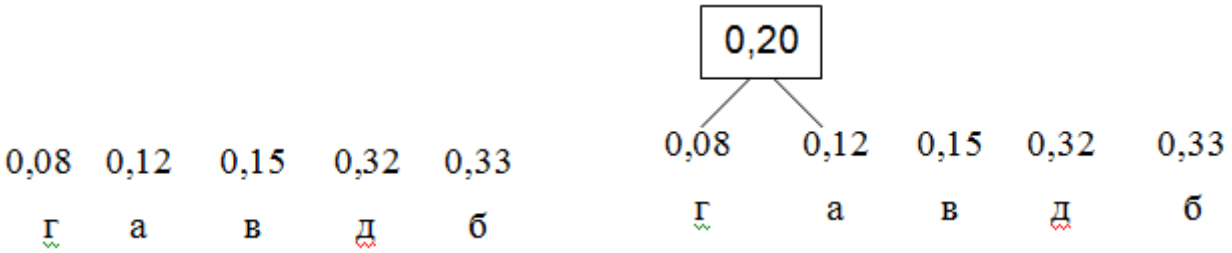


Рис. 4. Представление алгебраического выражения

При постфиксном обходе (левое поддерево – правое поддерево – узел) получаем последовательность: a b + c d e + * + f + g h + *.

6. Пусть символы а, б, в, г, д имеют вероятности появления соответственно 0,12; 0,33; 0,15; 0,08; 0,32. Какова средняя длина оптимального кода Хаффмана? Какой объём закодированного сообщения, если в исходном сообщении было 200 символов?

Ответ. Последовательные шаги выполнения алгоритма Хаффмана для символов а, б, в, г, д и их вероятностей представлены на рисунке 5.



(а) (б)

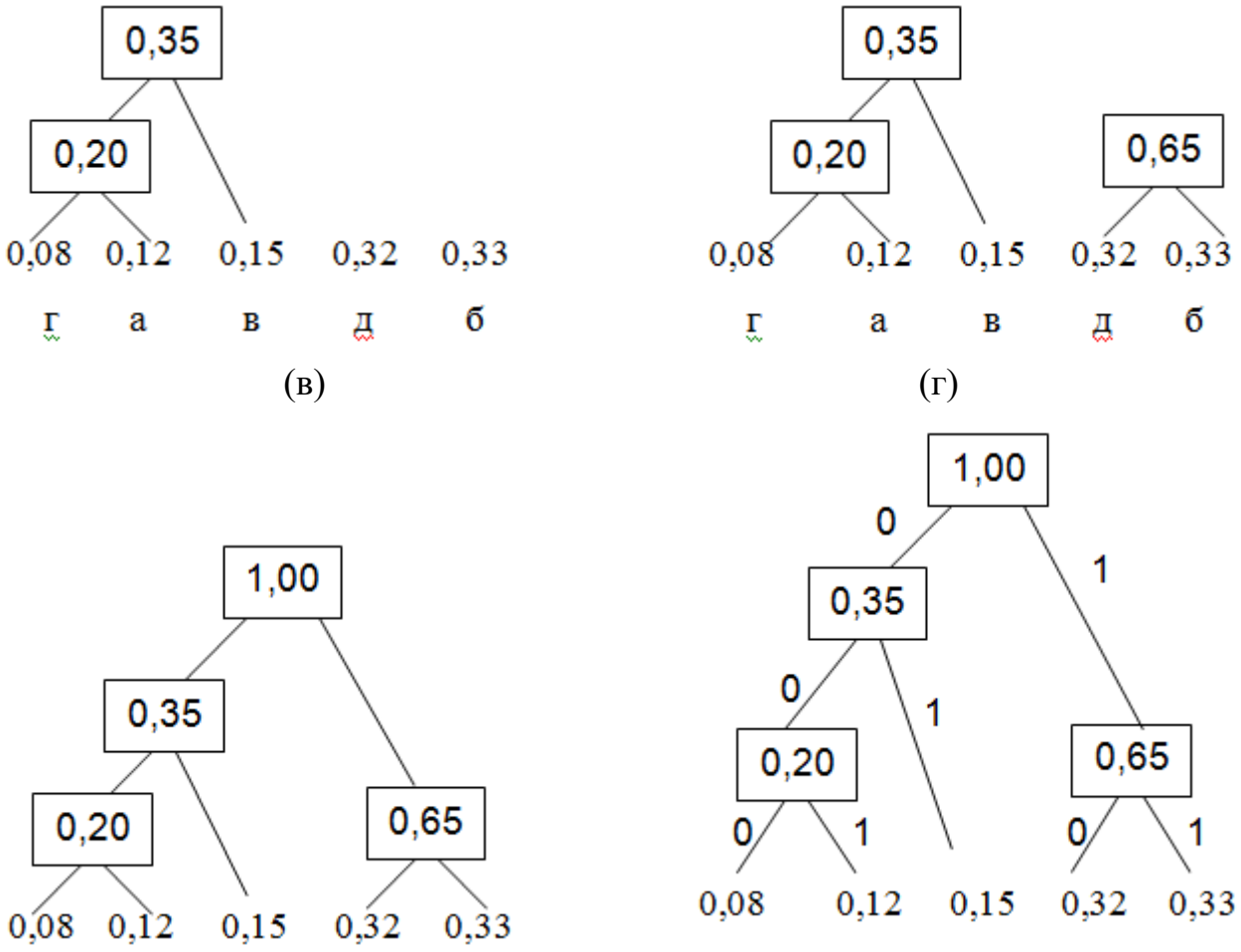


Рис. 5. Этапы построения дерева Хаффмана:

(а) – исходная ситуация; (б) – слияние г с а; (в) – слияние г, а с в; (г) – слияние д с б; (д) – слияние г, а, в, д, б; (е) – дерево, представляющее оптимальный код

Из полученного дерева видно, что символы а, б, в, г, д имеют соответственно коды 001, 11, 01, 000, 10. Средняя длина кода равна

(3 + 2 +2 + 3 +2)/5 = 12/5 = 2,4

Объём закодированного сообщения равен:

0,12*200*3 + 0,33*200*2 + 0,15*200*2 + 0,08*200*3 + 0,32*200*2 = 440.

Задания для самостоятельной работы

1. С помощью метода математической индукции докажите математических свойства бинарных деревьев.
2. Пусть символы а, б, в, г, д, е встречаются в тексте с частотами, указанными в вашем варианте соответственно. Найдите оптимальный код Хаффмана и нарисуйте соответствующее ему дерево. Какова

средняя длина кода?

вариант	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
частота	0,17; 0,19; 0,02; 0,25; 0,11; 0,26	0,05; 0,09; 0,32; 0,18; 0,21; 0,15	0,31; 0,14; 0,29; 0,07; 0,04; 0,15	0,05; 0,26; 0,06; 0,35; 0,11; 0,17.	0,03; 0,07; 0,09; 0,28; 0,35; 0,18.	0,21; 0,25; 0,28; 0,05; 0,06; 0,15.	0,37; 0,11; 0,13; 0,15; 0,20; 0,04.	0,27; 0,19; 0,18; 0,06; 0,09; 0,21.	0,11; 0,13; 0,14; 0,21; 0,28; 0,13.	0,23; 0,11; 0,16; 0,17; 0,05; 0,28.	0,23; 0,09; 0,02; 0,15; 0,31; 0,20.	0,06; 0,04; 0,25; 0,16; 0,41; 0,08.

3. Напишите рекурсивную процедуру построения идеально сбалансированного дерева для произвольных N узлов, хранящихся в файле. Для полученного дерева: a) определите высоту, b) определите число уровней, c) определите, сколько путей длины три в этом дереве (для каждого пути перечислите узлы, входящие в путь), d) постройте расширенное дерево, e) найдите длину внешнего и внутреннего пути расширенного дерева.
4. Напишите рекурсивную процедуру подсчета листьев в дереве из N узлов.
5. Напишите процедуры нерекурсивных обходов бинарного дерева:

   a) префиксного; b) инфиксного; c) постфиксного; d) поуровневого.

Указание: для поуровневого обхода рекомендуется использовать FIFO-очередь, для остальных обходов — стек.

6. Напишите процедуру вычисления арифметического выражения в дереве, используя постфиксный обход.
7. Пусть в арифметическом выражении в качестве терминалов используются не только цифры, но и латинские буквы ‘a’, ‘b’, …, ‘x’, играющие роль переменных. Постройте дерево для арифметического выражения и опишите процедуру, которая:

   a) (для вариантов 2, 5, 8, 11) упростит дерево, заменяя в нем все поддеревья, соответствующие выражениям (f + 0), (0 + f), (f - 0), (f * 1), (1 * f), на поддеревья, соответствующие выражению f, а поддеревья, соответствующие выражениям (f * 0), (0 * f), на

вершину с 0;

b) (для вариантов 1, 4, 7, 10) преобразует дерево, заменяя в нем все поддеревья, соответствующие выражениям ((f1 ± f2) * f3) и (f1 * (f2 ± f3)), на поддеревья, соответствующие выражениям ((f1 * f3) ± (f2 * f3)) и ((f1 * f2) ± (f1 * f3));

c) (для вариантов 3, 6, 9, 12) выполните преобразования, обратные преобразованиям из задачи b).

Тестовые задания

1. Сколько различных бинарных деревьев можно построить из трёх узлов?

a) 18 *b) 9* *c) 30* d) *27*

2. Сколько структурно различных ориентированных деревьев можно построить из трёх узлов?

a) 3 *9* *b) 2* c) *1*

3. Если узел A имеет трёх братьев, а узел B является родителем узла A, то степень узла B равна

a) 4 *b) 3* *c) 5* d) *2*

4. Пусть для выражения ((a+b) + c * (d+e)) * h) построено дерево. Какому обходу соответствует последовательность a b + c d e + * + h *?

a) инфиксному *c) поуровневому*

b) префиксному **D)** *постфиксному*

ТЕМА 3. АЛГОРИТМЫ ПОИСКА

Лабораторная работа № 5

Цель – проанализировать эффективность алгоритмов поиска, вставки и удаления в линейных и нелинейных таблицах; разобрать структуру данных для внешнего поиска, проанализировать эффективность алгоритмов вставки, удаления и поиска для этой структуры.

Ключевые понятия

Постановка задачи, основные понятия. АТД таблица. Поиск в линейных таблицах. Анализ эффективности алгоритмов. Поиск в нелинейных таблицах. Бинарные деревья поиска (BST). Основные операции. Анализ эффективности алгоритмов. Сбалансированные (АВЛ) деревья. Критерий сбалансированности. Деревья Фибоначчи. Виды балансировки. Основные операции. Анализ эффективности алгоритмов.

Упражнения

1. За какое время в худшем случае выполняется поиск в линейной неупорядоченной таблице размера N?

Ответ. Поиск в линейной неупорядоченной таблице размера N можно произвести только с помощью алгоритма последовательного поиска, временная сложность которого равна O(N). Этот алгоритм относится к классу линейных, то есть при увеличении размера линейной неупорядоченной таблицы в два раза следует ожидать двукратного увеличения времени поиска.

2. За какое время в худшем случае выполняется алгоритм бинарного поиска в линейной упорядоченной таблице из N элементов?

Ответ. При поиске в линейной упорядоченной таблице из N элементов с помощью алгоритма бинарного поиска количество обрабатываемых записей на каждом шаге сокращается вдвое, то есть время работы алгоритма определяется рекуррентным отношением:

Это рекуррентное отношение асимптотически точно оценивается:
$T(N) = \Theta(\log N)$. Это означает, что алгоритм бинарного поиска является асимптотически оптимальным алгоритмом, то есть время работы в худшем и в лучшем случае совпадает.

3. За какое время в худшем случае осуществляется поиск элемента в бинарном дереве поиска из N узлов?

Ответ. Время поиска в бинарном дереве поиска зависит от его высоты *h*, т. е. $T(N) = O(h)$. В худшем случае высота в бинарном дереве поиска из N элементов равна N (в этом случае говорят, что дерево поиска вырожденное). Следовательно, поиск в таком дереве осуществляется за время $O(N)$. В лучшем случае высота в бинарном дереве поиска из N элементов равна $\log N$, и время поиска имеет временную сложность $O(\log N)$.

4. Предположим, что в бинарном дереве поиска хранятся числа от 1 до 1000, нужно найти число 363. Какая из следующих последовательностей не может быть последовательностью просматриваемых при этом ключей?

a) 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363

b) 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363

c) 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363

d) 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363

Ответ. Поиск в бинарном дереве осуществляется по следующему алгоритму: сравнить искомый ключ с текущим; если искомый ключ меньше текущего, то продолжить поиск в левом поддереве, иначе – в правом. Последовательность 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363 при поиске числа 363 не может быть последовательностью просматриваемых ключей. Порядок просмотра ключей можно представить в виде бинарного дерева поиска

(рис.6). В левом поддереве узла с ключом 911 оказался узел с ключом 912, но в бинарном дереве поиска этого быть не может.

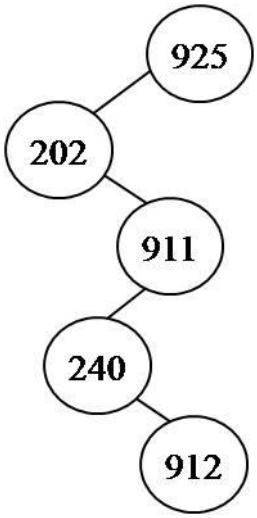
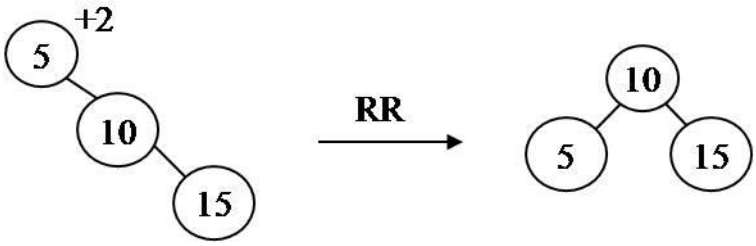


Рис. 6. Порядок просмотра ключей при поиске числа 363

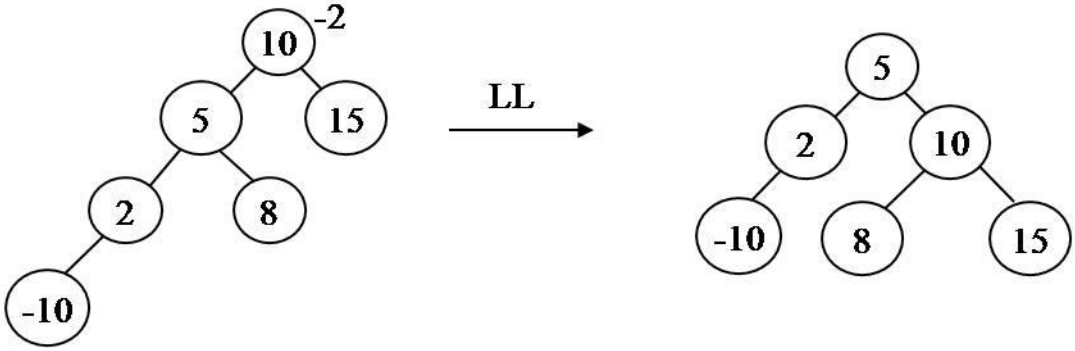
5. В каком порядке будут происходить повороты при построении АВЛ дерева по элементам 5, 10, 15, 2, 8, -10, 4, 25, 12, 13?

Ответ. На рисунке 7 представлены этапы построения АВЛ дерева для ключей 5, 10, 15, 2, 8, -10, 4, 25, 12, 13.

(а)



(б)



(в)

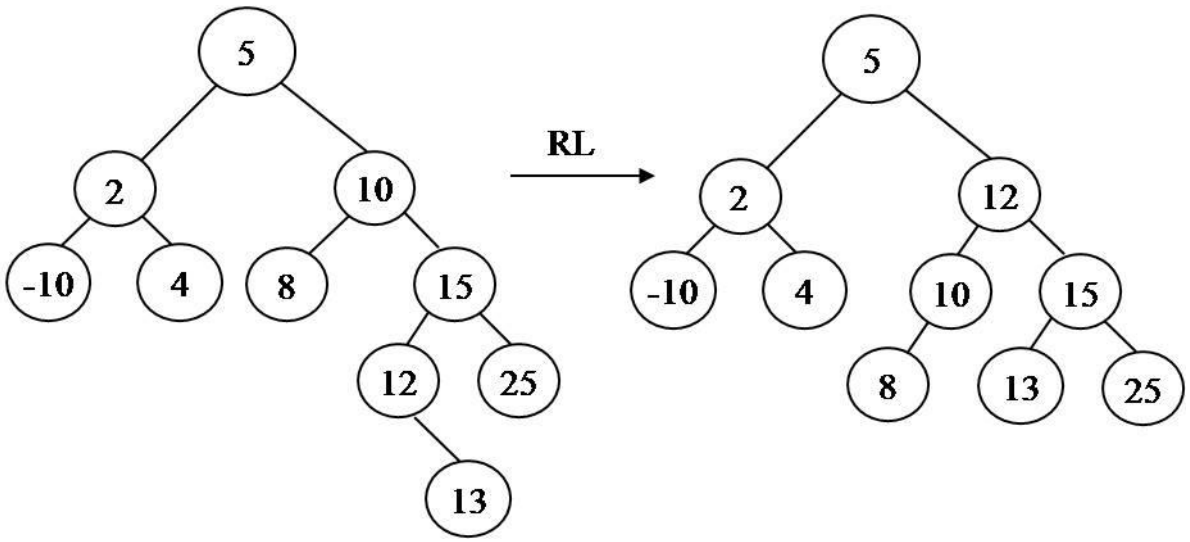


Рис. 7. Этапы построения АВЛ дерева:

(а) – добавление узла с ключом 15 вызывает RR поворот; (б) – добавление узла с ключом -10 вызывает LL поворот; (в) - добавление узла с ключом 13 вызывает LL поворот

При вставке узла с ключом 15 критерий сбалансированности дерева нарушается, значит, необходимо выполнить поворот RR. При добавлении элемента -10 нарушается баланс в узле с ключом 10 – требуется перестройка дерева с помощью поворота LL. Критерий сбалансированности нарушается при вставке узла с ключом 13, в этом случае нужно выполнить поворот RL.

6. Сколько поворотов в худшем случае требует удаление в АВЛ дереве из N узлов?

Ответ. Высота АВЛ дерева имеет порядок logN (N – количество узлов в дереве). Удаление узла в АВЛ дереве может вызвать поворот в каждом узле вдоль пути поиска, то есть порядка logN поворотов. Самым неудачным случаем является удаление в дереве Фибоначчи элемента из самого правого узла, которое потребует максимального количества поворотов.

Задания для самостоятельной работы

вариант	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
	68	95	33	65	59	73	16	11	19	48	23	52
	5	51	82	12	38	8	11	52	45	38	53	46
	76	28	66	21	85	11	77	86	12	63	14	55
	52	84	72	93	25	31	85	89	85	37	87	9

	56	74	81	28	60	81	52	21	61	30	4	24
	80	47	90	88	28	23	53	90	66	14	34	90
	26	33	28	96	89	62	46	43	59	93	42	14
	57	18	10	22	4	94	83	26	5	88	52	51
	18	46	80	66	68	4	87	75	2	95	30	50
	58	49	82	32	91	33	12	7	89	64	11	42
	48	25	59	63	72	42	50	56	94	31	39	41
	77	16	19	69	39	97	30	72	68	73	37	79
	13	20	2	65	27	22	68	40	17	86	80	28
	8	58	23	53	76	88	81	48	81	72	66	88
	20	90	94	78	40	72	25	31	82	25	84	83

1. Постройте бинарное дерево поиска, вставив последовательно элементы с ключами, указанными в вашем варианте.
2. Удалите из полученного дерева последовательно первые 7 элементов с ключами, указанными в вашем варианте. После каждого удаления нужно рисовать полученное дерево, если удаляемый элемент не лист.
3. Постройте АВЛ-дерево, вставив последовательно элементы из своего варианта в изначально пустое АВЛ-дерево.
4. Из полученного АВЛ-дерева удалите последовательно первые 7 элементов с ключами, указанными в вашем варианте. После каждого удаления нужно рисовать полученное дерево.
5. Подберите последовательность элементов такую, чтобы при вставке в изначально пустое АВЛ-дерево выполнялись бы все четыре поворота. Какова минимальная длина такой последовательности?
6. Постройте дерево Фибоначчи порядка 8. Удалите самый правый элемент.

Тестовые задания

1. Для того, чтобы напечатать узлы бинарного дерева поиска в порядке возрастания нужно применить

a) инфиксный обход
c) префиксный обход
b) постфиксный обход
d) поуровневый обход

2. Длина внешнего пути бинарного дерева поиска, построенного для чисел 10, 15, 12, 14, 5, 8 равна

a) 28 *b) 21* *c) 9* *d) 7*

3. В худшем случае вставка в бинарное дерево поиска из N узлов осуществляется за время

a) O(N) *c) O(1)*

b) O(log N) *d) O(N log N)*

4. Минимальная длина последовательности элементов, при построении АВЛ дерева по которой выполнялись бы все четыре поворота, равна

a) 7 *b) 6* *c) 8* *d) 9*

5. При построении АВЛ дерева по элементам 100, 38, 61, 55, 120, 110, 150, 118, 160, 13 повороты будут происходить в порядке

a) RL, LR, RL *c) LL, LR, RR*

b) LR, RL, RR *d) RR, RL, LR*

Лабораторная работа № 6

Цель – проанализировать эффективность алгоритмов поиска, вставки и удаления в таблицах с вычисляемыми входами.

Ключевые понятия

Поиск в таблицах с вычисляемыми входами. Хеширование. Основные методы вычисления хеш-функций: метод деления, метод умножения, комбинированный метод. Разрешение коллизий. Хеширование с цепочками. Хеширование открытой адресацией.

Основные виды повторного хеширования: линейное исследование, квадратичное исследование, двойное хеширование. Основные операции. Анализ эффективности алгоритмов.

Упражнения

1. При хешировании с цепочками, за какое время в худшем случае выполняется процедура поиска элемента в хеш-таблице?

Ответ. При хешировании с цепочками в худшем случае, когда все хеш-адреса одинаковы, элементы таблицы попадают в один список длины *N*, и операция поиска сводится к последовательному поиску в списке. Следовательно, поиск в худшем случае будет выполняться за время *O(N)*.

2. При вычислении хеш-функции по методу деления (h (K) = K mod M, где К – ключ), каким должно быть число М для наиболее эффективного распределения ключей по таблице?

Ответ. При вычислении хеш-функции по методу деления эффективность равномерного распределения ключей по таблице зависит от М. Например, для М, являющегося степенью двойки, значения хеш-функции представляют собой правые биты двоичного представления ключа. Аналогично для М, являющегося степенью десятки, значения хеш-функции – правые цифры в десятичном представлении ключа. В этом случае оказывается, что только часть цифр ключа полностью определяет хеш-адрес, что может плохо повлиять на равномерность распределения. Наиболее эффективно хеш-функция работает, когда М – простое число, т. к. это приводит к меньшему числу коллизий.

Задания для самостоятельной работы

3. Дано множество ключей и хеш-функция. Является ли данная хеш-функция совершенной?

вариант	**множество ключей**	**хеш-функция**
1.	81, 129, 301, 38, 434, 216, 412, 487, 234	h(x) = (x + 18) div 63
2.	95, 33, 65, 59, 73, 16, 116, 192, 48	h(x) = (x + 15) div 43
3.	51, 82, 212, 381, 68, 121, 52, 45, 38	h(x) = (x + 25) div 59
4.	28, 66, 21, 85, 117, 77, 86, 312, 63	h(x) = (x + 21) div 61
5.	84, 72, 93, 25, 31, 85, 89, 185, 37	h(x) = (x + 13) div 83
6.	74, 81, 28, 60, 181, 52, 21, 61, 30	h(x) = (x + 17) div 37
7.	47, 90, 88, 28, 23, 53, 290, 66, 145	h(x) = (x + 19) div 97

8.	33, 28, 96, 89, 62, 46, 43, 59, 93	h(x) = (x + 23) div 53
9.	184, 101, 22, 415, 94, 83, 26, 345, 88	h(x) = (x + 16) div 49
10.	46, 81, 66, 68, 413, 87, 75, 246, 95	h(x) = (x + 22) div 67
11.	49, 82, 32, 91, 33, 127, 371, 89, 64	h(x) = (x + 31) div 73
12.	25, 59, 63, 72, 42, 50, 56, 94, 31	h(x) = (x + 15) div 87

1. Дан набор символьных ключей «Иван», «Пётр», «Варвара», «Александр», «Анна», «Алла». Придумайте совершенную хеш-функцию для 7-элементной таблицы.
2. Предположим, что размер хеш-таблицы равен M, в качестве хеш-функции используется h (x) = x mod M. Постройте хеш-таблицу при вставке ключей из своего варианта. Используйте:
   a) хеширование с цепочками;
   a) хеширование с открытой адресацией (линейное);
   b) хеширование с открытой адресацией (квадратичное);
   c) двойное хеширование.

   При каком способе хеширования получилось меньше всего коллизий?

вариант	**множество ключей**	**M**	**вариант**	**множество ключей**	**M**
1.	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343	7	**2.**	47, 90, 88, 28, 23, 53, 290	7
3.	95, 33, 65, 59, 73, 16, 3, 116, 192, 48, 21	11	**4.**	33, 28, 96, 89, 62, 46, 43, 59, 93	9
5.	51, 82, 212, 381, 68, 121, 52	7	**6.**	184, 101, 22, 415, 94, 83, 26	7
7.	28, 66, 21, 85, 117, 77, 86, 312, 63	9	**8.**	46, 81, 66, 68, 413, 87, 75, 246	8
9.	84, 72, 93, 25, 31, 85, 89, 185	8	**10.**	49, 82, 32, 91, 33, 127, 371	7
11.	74, 81, 28, 60, 181, 52, 21	7	**12.**	25, 59, 63, 72, 42, 50, 56	7

3. Напишите программу, которая с использованием хеширования с цепочками вставляет *N* случайных целых чисел в таблицу размером *N*/100, а затем определяет длину самого короткого и самого длинного списка (*N* = 5000, 10000, 20000).
4. Напишите программу, которая с использованием хеширования с

линейное открытой адресацией вставляет $N/2$ случайных целых чисел в таблицу размером N, а затем определяет среднее количество проб при неудачном поиске в таблице (N = 5000, 10000, 20000).

5. Напишите хеш-функцию, реализующую метод свёртки, который заключается в разбиении ключа на несколько частей, которые затем комбинируются так, чтобы получилось наименьшее число. Полученное значение используется в виде значения хеш-функции или уменьшается ещё раз. Например, ключ 523456795 можно представить в виде 523 + 456 + 795 = 1774.

Тестовые задания

1. При вычислении хеш-функции по методу деления (h(K) = K mod M, где K – ключ) наиболее эффективное распределение ключей по таблице получается, если

a) M – простое число

b) M – степень двойки

c) M – степень десятки

d) M – нечётное число

2. Наиболее эффективным является

a) двойное хеширование

b) хеширование линейной открытой адресацией

c) квадратичное хеширование

d) вычисление хеш-функции методом деления

3. При хешировании с цепочками в худшем случае процедура поиска элемента в хеш-таблице выполняется за время

a) O(1)

b) O(n)

c) пропорциональное коэффициенту заполнения таблицы

d) O(log log n)

4. При хешировании с цепочками в среднем процедура поиска элемента в

хеш-таблице выполняется за время

a) пропорциональное коэффициенту заполнения таблицы

b) O(n)

c) O(1)

d) O(log log n)

5. При хешировании с цепочками в лучшем случае процедура поиска элемента в хеш-таблице выполняется за время

a) O(1)

b) O(n)

c) пропорциональное коэффициенту заполнения таблицы

d) O(log log n)

6. Количество коллизий при вычислении хеш-функции по методу умножения (h (K) = целая часть (M (Kα mod 1), где α – константа от 0 до 1, Kα mod 1 – дробная часть произведения Kα)) уменьшается

a) если α – «золотое сечение»

b) если M – степень двойки

c) если α – число «пи», делённое на десять

d) если M – простое число

7. В предположении равномерного хеширования математическое ожидание числа проб при добавлении нового элемента в таблицу с открытой адресацией не превосходит

a) 1/(1 — a), где a < 1 — коэффициент заполнения таблицы

b) $\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}$ *, где a < 1 — коэффициент заполнения таблицы*

c) $\alpha\ln\frac{1}{1-\alpha}$ *, где a < 1 — коэффициент заполнения таблицы*

d) (1 — a), где a < 1 — коэффициент заполнения таблицы

8. Процедура вставки в хеш-таблице выполняется за время

a) O(log n)

b) O(n)

c) O(1)

d) O(log log n)

9. Процедура поиска в хеш-таблице выполняется за время

a) O(log n)

b) O(n)

c) O(log log n)

d) O(1)

10. Процедура удаления в хеш-таблице выполняется за время

a) O(log n)

b) O(1)

c) O(log log n)

d) *O(n)*

Лабораторная работа № 7

Цель – проанализировать эффективность алгоритмов поиска, вставки и удаления в нелинейных таблицах, разобрать структуру данных для внешнего поиска, проанализировать эффективность алгоритмов вставки, удаления и поиска для этой структуры.

Ключевые понятия

Б-деревья. Внешний поиск. Основные операции. Анализ эффективности алгоритмов. Разновидности Б-деревьев. Применение структур данных. Красно-черные деревья. Рандомизированные деревья поиска. Оптимальные деревья поиска. Основные операции. Анализ эффективности алгоритмов.

Задания для самостоятельной работы

1. Используя рекурсивные и нерекурсивные алгоритмы, реализуйте следующие задачи для дерева поиска. Одинаковые элементы хранятся в одном узле дерева, для их счетчика предусмотрено поле Count.

```
Type Base = integer;
    Tree = ^ Node;
```

```
Node = record
        elem: Base;
        left, right: Tree
        Count: integer
       end;
```

a) По текстовому файлу f, содержащему элементы типа Base (среди которых могут быть и одинаковые), построить дерево поиска T.

b) Добавить к дереву поиска T новый элемент E, если его не было в T.

c) Проверить, входит ли элемент E в дерево поиска T.

d) Удалить из дерева поиска T элемент E, если он есть в T.

e) Записать в текстовый файл f элементы дерева поиска T в порядке их возрастания, используя обход дерева соответствующим методом. Одинаковые элементы записывать в файл в количестве Count.

2. Проведите эмпирический анализ поиска в деревьях. Напишите программу для сравнения алгоритма поиска в бинарном дереве поиска, АВЛ-дереве, красно-черном и рандомизированном дереве, каждое из которых построено при помощи вставки N случайных чисел в первоначально пустое дерево. Учтите возможность появления одинаковых чисел. Вычислите среднее значение количества сравнений в каждом из деревьев при выполнении N произвольных поисков. Проделайте эксперименты для различных N (например, N = 5000, 10000, 20000), а затем сравните полученные результаты.

Тестовые задания

1. Какое утверждение является истинным?

a) дерево Фибоначчи является АВЛ деревом

b) любое бинарное дерево поиска из N узлов имеет высоту $log_2 n$

c) АВЛ дерево является идеально сбалансированным

d) в красно-чёрном дереве максимальная длина пути равна n log n

3. В худшем случае поиск элемента в красно-чёрном дереве из N узлов осуществляется за время

a) O(log n) *c) O(1)*

b) O(n) *d) O(n log n)*

4. В лучшем случае поиск элемента в рандомизированном дереве поиска из N узлов осуществляется за время

a) O(1) *c) O(n)*

b) O(log n) *d) O(n log n)*

5. Максимальное количество потомков у каждого узла Б-дерева, содержащего не менее 3 и не более 6 элементов, равно:

a) 7 *b) 6* *c) 5* *d) 4*

6. Удаление в АВЛ дереве из N узлов требует в худшем случае

a) O(log n) поворотов *c) O(n log n) поворотов*

b) O(1) поворотов *d) O(n) поворотов*

7. Поиск элемента на странице Б-дерева в среднем выполняется за время

a) O(n) *c) O(1)*

b) O(log n) *d) O(n log n)*

8. В лучшем случае поиск элемента в красно-чёрном дереве из N узлов осуществляется за время

a) O(log n) *b) O(n)* *c) O(n log n)* *d) O(1)*

9. Страница Б-дерева, содержащая m элементов, имеет

*a) 2*m потомков* *c) 2*m + 1 потомков*

b) m+ 1 потомков *d) 2*m – 1 потомков*

10. Какое утверждение не является истинным?

a) поиск быстрее осуществляется в красно-чёрных деревьях, чем в АВЛ дереве

b) красно-чёрное дерево – вырожденный случай Б-дерева

c) вставка быстрее осуществляется в красно-чёрных деревьях, чем АВЛ дереве

d) место элемента в рандомизированном дереве поиска определяет его приоритет

11. Двоичные деревья поиска из N узлов и высоты h позволяют выполнять операцию поиска за время

a) O(h)

*b) O(n*h)*

c) $O(h^2)$

d) O(log h)

ТЕМА 4. АЛГОРИТМЫ СОРТИРОВОК

Лабораторная работа № 8

Цель – рассмотреть методы внутренней сортировки, проанализировать эффективность алгоритмов сортировки для массивов разной упорядоченности.

Ключевые понятия

Постановка задачи сортировки, основные определения. Понятие внутренней и внешней сортировки, устойчивость сортировки, основные характеристики эффективности. Анализ алгоритмов. Сортировка Шелла. Понятие h-сортировки, зависимость эффективности сортировки от выбора последовательности h. Алгоритм быстрой сортировки, выбор опорного элемента. Обменная поразрядная сортировка. Пирамидальная сортировка. Эффективная реализация очередей с приоритетами. Сортировка подсчётом распределения.

Упражнения

1. Упорядочите элементы 8, 4, 1, 9, 2, 1, 7, 4 по неубыванию следующими сортировками: быстрой, пирамидальной, слиянием, обменной поразрядной.
2. Приведите примеры, показывающие, что обменная поразрядная и пирамидальная сортировки являются неустойчивыми.
3. Напишите процедуру нахождения k наибольших элементов массива из N элементов на основе использования пирамиды.
4. Реализуйте очередь с приоритетами, используя пирамиду.
5. Сравните эффективность различных вариантов сортировок слиянием: нисходящую сортировку слиянием, восходящую сортировку слиянием, комбинированную нисходящую сортировку слиянием, комбинированную восходящую сортировку слиянием, естественную сортировку слиянием. Рассмотрите алгоритмы на упорядоченных данных, случайных, упорядоченных в обратном порядке.

6. Определите, сколько дополнительной памяти требует сортировка подсчётом распределения при упорядочивании по одному, двум, трём, N разрядам за один проход по массиву.

Задания для самостоятельной работы

1. Сравните время выполнения сортировки Шелла при различных способах выбора последовательности h для массивов с разным числом элементов. Результаты исследования оформите таблицей.
2. Изучите влияние данных, содержащих кроме ключей еще и сопутствующую информацию, на время сортировки Шелла. Результаты исследования оформите таблицей.
3. Проведите эмпирический анализ быстрой сортировки для рекурсивной, нерекурсивной и комбинированной реализаций. В комбинированной реализации используйте метод простых вставок для сортировки массивов длины, меньшей M.

4. Экспериментально сравните время выполнения быстрой, поразрядной и пирамидальной сортировки для массивов из 50000, 100000, 200000 элементов. Результаты исследования оформите таблицей.

Тестовые задания

1. Сортировка Шелла основана на сортировке

a) пузырьком

b) выбором

c) вставками

d) *бинарными вставками*

2. Быстрая сортировка относится к классу

a) обменных сортировок

b) сортировок посредством выбора

c) сортировок посредством распределения

d) *сортировок посредством вставок*

3. Алгоритм быстрой сортировки можно улучшить, если для сортировки

подмассивов небольшой длины применять

a) *сортировку простыми вставками*

b) *сортировку бинарными вставками*

c) *пузырьковую сортировку*

d) *сортировку выбором*

4. Неверным является утверждение

a) *сортировка слиянием в лучшем случае выполняется за время* $O(N^2)$

b) *пирамидальная сортировка в худшем случае выполняется за время* $O(N^2)$

c) *обменная поразрядная сортировка в лучшем случае выполняется за время* $O(N)$

d) *быстрая сортировка в худшем случае выполняется за время* $O(N^2)$

5. Не требует дополнительной памяти:

a) *пирамидальная сортировка*

b) *быстрая сортировка*

c) *сортировка слиянием*

d) *цифровая сортировка*

6. Асимптотически оптимальным методом не является

a) *быстрая сортировка*

b) *пирамидальная сортировка*

c) *сортировка слиянием*

d) *цифровая (поразрядная по младшей цифре) сортировка*

7. Быстрая сортировка относится к классу

a) *обменных сортировок*

b) *сортировок посредством вставок*

c) *сортировок посредством выбора*

d) *сортировок посредством распределения*

8. Наилучшим образом быстрая сортировка ведёт себя при выборе в качестве опорного

a) элемента, являющегося медианой

b) среднего элемента

c) минимального элемента

d) *максимального элемента*

Лабораторная работа №9

Цель — рассмотреть алгоритм топологической сортировки (преобразование частичных порядков в линейные).

Топологическая сортировка применяется для элементов, на которых определен частичный порядок, то есть упорядочение задано не на всех элементах, а только на некоторых парах.

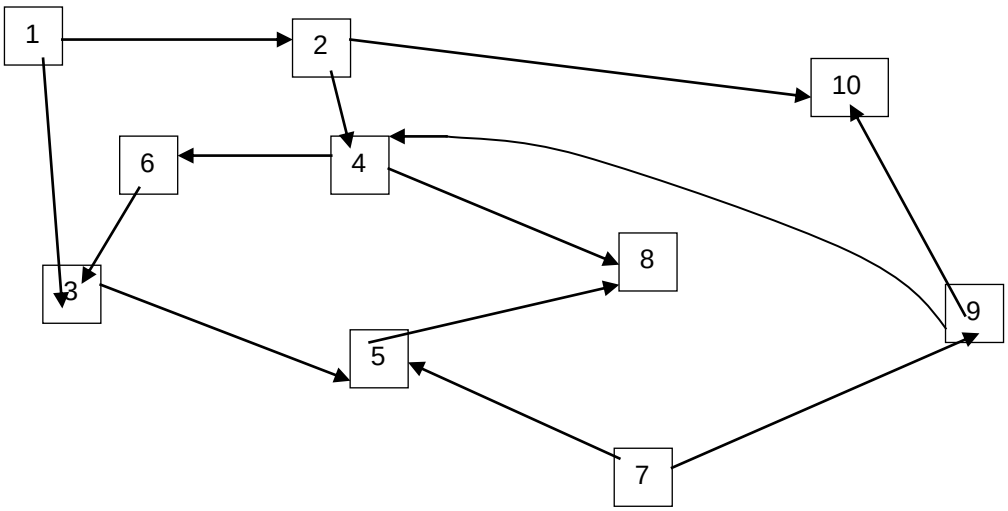
Например:

1. В словаре термин определен через другие термины. Обозначим отношением U V, если слово U определено через слово V.
2. В программе процедура может содержать вызов других процедур. Обозначим отношением U V, если процедура U вызывает процедуру V.

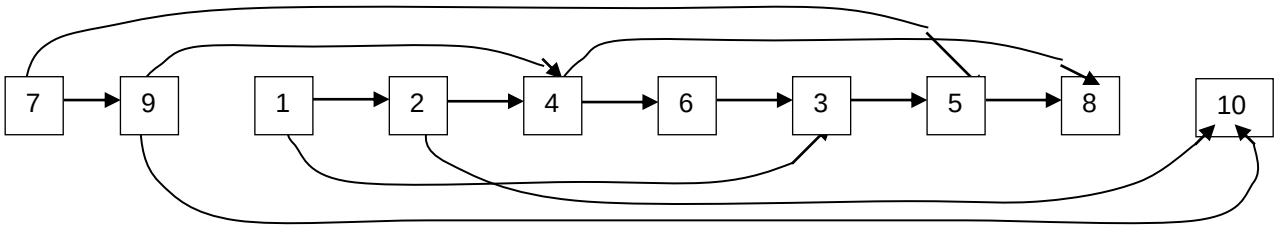
Рассмотрим пример топологической сортировки на множестве из 10 чисел: S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Пусть отношение частичного порядка на множестве S задано следующими отношениями элементов:

1<2	4<6	4<8	1<3	5<8	7<9
2<4	4<6	4<8	1<3	5<8	7<9
	2<10	6<3	3<5	7<5	9<4
					9<10

Удобно проиллюстрировать отношение частичного порядка с помощью графа, где вершины – это элементы множества, а стрелки – отношение порядка. На графе отсутствуют циклы, что является необходимым условием частично упорядоченного множества.



Выберем элемент, которому не предшествует никакой другой – 7. Исключим его из множества. Выберем следующий элемент, которому не предшествует никакой другой – 9, исключим его из множества. Повторяем до тех пор, пока множество не станет пустым. В результате получим линейное упорядочение вида:



Задания для самостоятельной работы

1. Выполните топологическую сортировку для множества S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} с отношениями частичного порядка: 1 < 5, 5 < 4, 3 < 1, 3 < 5, 3 < 4, 1< 7, 5 < 2, 4 < 2, 7 < 2, 2 < 6, 7 < 6.
2. Как поведёт себя алгоритм топологической сортировки, если среди частичных порядков будут одинаковые?
3. Реализуйте алгоритм топологической сортировки. *Указание*: входные данные содержаться в файле.
4. Реализуйте алгоритм топологической сортировки так, чтобы в случае, когда множество не является частично упорядоченным, программа выдавала бы последовательность элементов, образующих цикл.

Тестовые задания

1. Сортировку слиянием можно улучшить, если для серий небольшой длины использовать
   a) *сортировку простыми вставками*
   b) *сортировку бинарными вставками*
   c) *быструю сортировку*
   d) *пирамидальную сортировку*
2. Цифровая (поразрядная по младшей цифре) сортировка будет работать правильно, если в качестве вспомогательной сортировки по цифре будет использовать
   1. *устойчивую сортировку*
   2. *неустойчивую сортировку*
   3. *любую обменную сортировку*
   4. *любую сортировку посредством вставок*
3. Чувствительной к предварительной упорядоченности массива является сортировка
   e) *пирамидальная*
   f) *естественным слиянием*
   g) *быстрая*
   h) *поразрядная по старшей цифре*
4. Не требует дополнительной памяти:
   a) *пирамидальная сортировка*
   b) *быстрая сортировка*
   c) *сортировка слиянием*
   d) *цифровая сортировка*
5. Асимптотически оптимальным методом не является
   1. *быстрая сортировка*
   2. *пирамидальная сортировка*
   3. *сортировка слиянием*

4. цифровая (поразрядная по младшей цифре) сортировка

6. Пирамидой является массив

   a) 23 14 17 6 12 7 13 5 1 10

   b) 1 5 6 7 10 12 13 14 17 23

   c) 1 6 5 7 12 10 14 13 23 17

   d) 23 14 17 6 10 7 13 5 1 12

7. Множество S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} не является частично упорядоченным множеством, если на нём определены отношения

   a) 6<4 4<9 9<2 2<10 2<7 2<8 8<6

   e) 2<3 2<4 2<5 2<6 2<7 2<8 2<9

   f) 3<1 3<2 9<2 9<4 6<5 6<1 9<1

   g) 10<4 2<10 6<2 7<1 3<2 3<5 5<1

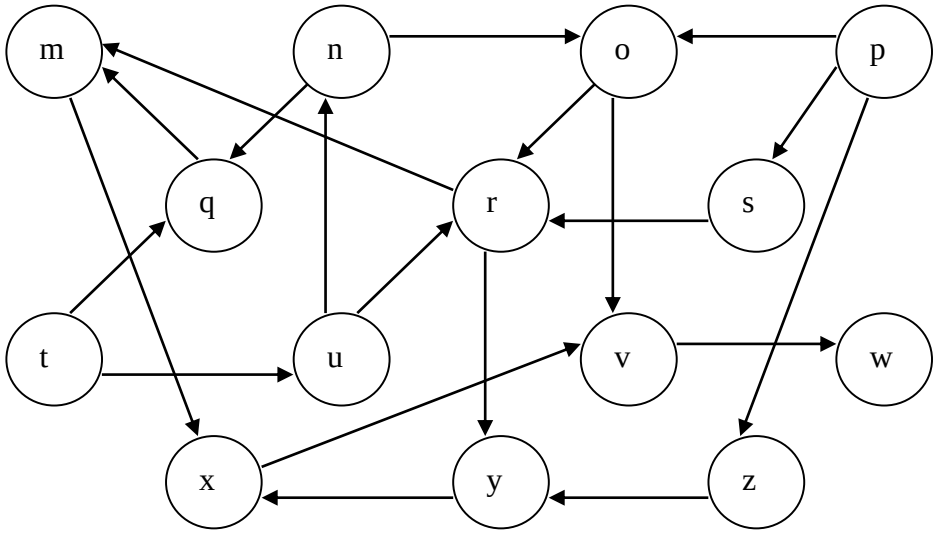
8. Топологическая сортировка расположит вершины графа, представленного на рисунке, в следующем порядке

   a) p t u s n o r q m z y x v w

   h) p m o q x y v n u s w z t

   i) r m o t q x v n u w z s p

   j) o p r t s n m u v w x z y



Лабораторная работа 10

Цель — Рассмотреть методы эффективной внешней сортировки; проанализировать эффективность алгоритмов сортировки.

Ключевые понятия

Сортировка слиянием. Понятие двухпутевого слияния. Нисходящая сортировка слиянием. Вопросы устойчивости. Восходящая сортировка слиянием. Сортировка естественным слиянием. Анализ алгоритмов. Реализация алгоритмов на списках.

Сбалансированное многопутевое слияние. Многофазное слияние. Анализ алгоритмов.

Упражнения

1. Упорядочите элементы по неубыванию, используя алгоритм двухпутевого слияния.
2. Проведите эмпирический анализ нисходящей и восходящей сортировок слиянием.
3. Экспериментально сравните время выполнения для массивов из 50000, 100000, 200000 элементов сбалансированным многопутевым и многофазным слиянием. Результаты исследования оформите таблицей.
4. Сравните эффективность различных вариантов сортировок слиянием: нисходящую сортировку слиянием, восходящую сортировку слиянием, комбинированную нисходящую сортировку слиянием, комбинированную восходящую сортировку слиянием, естественную сортировку слиянием.
5. Рассмотрите алгоритмы на упорядоченных данных, случайных, упорядоченных в обратном порядке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Вирт, Никлаус Алгоритмы и структуры данных / Никлаус Вирт ; перевод Ф. В. Ткачева. — 2-е изд. — Саратов: Профобразование, 2019. — 272 c. — ISBN 978-5-4488-0101-3. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/88753.html (дата обращения: 15.05.2020).

Дополнительная литература

1. Дроздов, С. Н. Структуры и алгоритмы обработки данных: Учебное пособие / Дроздов С.Н. - Таганрог: Южный федеральный университет, 2016. - 228 с.: ISBN 978-5-9275-2242-2. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/991928 (дата обращения: 15.05.2020).
2. Медведев, Д. М. Структуры и алгоритмы обработки данных в системах автоматизации и управления: учебное пособие / Д. М. Медведев. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 100 c. — ISBN 978-5-4486-0192-7. – Режим доступа: URL: http://www.iprbookshop.ru/71591.html (дата обращения: 15.05.2020).
3. Колдаев, В. Д. Структуры и алгоритмы обработки данных [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.Д. Колдаев. – Электрон. текстовые дан. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=418290 (дата обращения: 15.05.2020).

Интернет-ресурсы

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека он-лайн». - URL: http://biblioclub.ru
2. Электронно-библиотечная система издательства «Инфра». - URL: http://znanium.com.
3. eLIBRARY – Научная электронная библиотека (Москва). - URL: http://elibrary.ru
4. Курс «Структуры и алгоритмы компьютерной обработки данных». Портал доступа к электронным образовательным ресурсам ТюмГУ. - URL: http://eLearning.utmn.ru (вход по корпоративному паролю).

5. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Межвузовская электронная библиотека (МЭБ). - URL: https://icdlib.nspu.ru/

Национальная электронная библиотека. - URL: https://rusneb.ru/

Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc (IEEE). - URL: https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp?reload=true

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю)

- Лицензионное ПО:
  - Платформа для электронного обучения Microsoft Teams
  - Программное обеспечение Microsoft Imagine Academy (ранее Dreamspark): MS Visual Studio, MS SQL Server, ОС семейства MS Windows, MS Visio, MS Project
  - Программное обеспечение Microsoft Office 365
- Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:
  - Программная платформа Moodle https://docs.moodle.org/dev/License