

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Романчук Иван Сергеевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 04.03.2025 13:11:33  
Уникальный программный ключ:  
6319edc2b582ffdacea443f01d5779368d0957ac34f5cd074d81181530452479

Приложение к  
рабочей программе  
дисциплины

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Наименование дисциплины	Функциональный анализ
Направление подготовки / Специальность	01.03.03 Механика и математическое моделирование
Направленность (профиль) /Специализация	Механика жидкости, газа и плазмы
Форма обучения	очная
Разработчик	Девятков А. П., доцент кафедры фундаментальной математики и механики

1. Темы дисциплины для самостоятельного освоения обучающимися

Отсутствуют.

2. План самостоятельной работы

№ п/п	Учебные встречи	Виды самостоятельной работы	Форма отчетности / контроля	Количество баллов	Рекомендуемый бюджет времени на выполнение (ак.ч.)
1	2	3	4	5	6
1	Линейные операторы и функционалы	Изучение лекционного материала	Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы	0	4
2	Линейные операторы и функционалы	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	6
3	Сопряженное пространство	Изучение лекционного материала	Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы	0	4
	Сопряженное пространство	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	6
4	Топологические векторные пространства	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	6
5	Слабая сходимости	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	6
6	Компактные операторы	Изучение лекционного материала	Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы	0	2
7	Компактные операторы	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	8
8	Компактные операторы	Подготовка к контрольной работе	Решение демоверсии контрольной работы	0	6
9	Спектр линейного оператора	Изучение лекционного материала	Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы	0	2
10	Спектр линейного оператора	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	6
11	Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами	Изучение лекционного материала	Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы	0	2
12	Теоремы Фредгольма и их применение	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	6

13	Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	Изучение лекционного материала	Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы	0	2
14	Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	Решение задач по теме лекции	Защита решения перед преподавателем	5	6
15	Функции от самосопряженных операторов	Подготовка к контрольной работе	Решение демоверсии контрольной работы	0	6
16	Спектральная теорема	Изучение лекционного материала	Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы	0	2
17	Подготовка к зачету	Повторение лекционного материала и решение задач с практических занятий	Дифференцированный зачет	0	6
18	Итого			40	86

### 3. Требования и рекомендации по выполнению самостоятельных работ обучающихся, критерии оценивания.

#### Изучение лекционного материала

Рекомендации по выполнению.

Помимо записей лекций, рекомендуется обратиться к следующим учебникам:

- 1) Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- 2) Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
- 3) Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
- 4) Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
- 5) Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- 6) Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- 7) Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
- 8) Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том 2. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.

Распределение учебников по темам:

#### *Линейные операторы и функционалы*

[1] – глава IV, §1, §5; [2] – глава II, §1, §2, главы V, VII; [3] – главы III, IV; [4] – главы III, IV; [7] – главы II, VI.

#### *Сопряженное пространство*

[1] – глава III, §2, глава IV, §2, §3; [2] – глава 2, §3, §4, глава V, §7, глава VIII; [3] – глава IV; [5] – §III.2, §III.3, §IV.5; [6] – пп. 3.1–3.21; [7] – глава V.

#### *Компактные операторы*

[1] – глава IV, §6; [2] – глава IX; [3] – глава VI; [4] – глава V; [5] – §VI.5; [6] – пп. 4.16–4.25;

### *Спектр линейного оператора*

[3] – глава VII; [4] – глава VII; [5] – §VI.3; [7] – глава VII.

### *Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами*

[1] – глава IX; [2] – главы XII, XIII; [3] – глава VI, §2; [4] – глава 5, §2; [7] – глава VII.

### *Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве*

[3] – глава VII; [5] – глава 12.

### *Спектральная теорема*

[4] – глава VII; [5] – глава 12.

При проработке теоретического материала необходимо параллельно решать задачи по данной теме, предложенные преподавателем для самостоятельного решения.

### Решение задач по теме лекции

Задачи предназначены для самостоятельного решения студентами в течение семестра. При решении задач можно пользоваться любыми источниками, помощью одногруппников и так далее. Решенные задачи нужно показать (и объяснить решение) преподавателю, который ведет практические занятия. При полном корректном решении задачи и при условии ответов студента на все вопросы преподавателя по представленному решению, за задачу дается указанное количество баллов. При недочетах в решении или при отсутствии ответов на вопросы по решению, на выбор студента: либо задача не засчитывается и может быть сдана позднее, либо за неё ставится меньшее количество баллов на усмотрение преподавателя.

Примерные задания по темам.

### *Линейные операторы и функционалы*

- 1) Вычислить норму функционала  $f \in (C([-1,1]))^*$ ,

$$f(x) = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt - 3x(0).$$

- 2) Доказать, что оператор  $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$  ограничен в пространстве

а)  $l_p, p \in [1, \infty)$ ; б)  $c_0$ ; в)  $l_\infty$

тогда и только тогда, когда  $\{\lambda\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ . Найти его норму и ядро в каждом из пространств в зависимости от последовательности  $\{\lambda\}_{n=1}^\infty$ .

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

### *Сопряженное пространство*

- 1) Найти элементы пространства  $l_1$ , соответствующие следующим функционалам на пространствах  $c$  и  $c_0$ :

а)  $f_n(x) = x_n, n \in \mathbb{N}$ ; б)  $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$ ; в)  $f(x) = x_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Найти нормы этих функционалов.

- 2) Доказать, что пространство  $L_1[0,1]$  изометрически вложено в  $L_\infty[0,1]$ , но не изоморфно ему.

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

### *Топологические векторные пространства*

- 1) Доказать, что в ТВП сумма двух компактных множеств – компактное множество.

- 2) Докажите, что каждый секвенциально непрерывный оператор ограничен, т.е. переводит ограниченные множества в ограниченные.
- 3) Пусть система векторов  $\{v_1, \dots, v_n\}$  в топологическом векторном пространстве  $X$  линейно независима. Докажите, что существует окрестность нуля  $U$  такая, что если  $w_i - v_i \in U$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , то система векторов  $\{w_1, \dots, w_n\}$  также линейно независима.

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

#### *Слабая сходимост*

- 1) Доказать, что в  $l_1$  слабая сходимост последовательности совпадает со сходимостю по норме.
- 2) Пусть  $X$  – сепарабельное нормированное пространство. Доказать, что единичный шар в  $X^*$  \*-слабо секвенциально компактен, то есть из любой последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\|f_n\|_{X^*} \leq 1$ , можно выбрать подпоследовательность, \*-слабо сходящуюся к точке единичного шара.

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

#### *Компактные операторы*

- 1) Пусть  $X$  – банахово пространство. Доказать, что если для всякого оператора  $A \in K(X)$  образ замкнутого единичного шара  $A(\overline{B}(0,1))$  есть компактное множество, то пространство  $X$  рефлексивно.
- 2) Является ли компактным в пространстве  $C([-1,1])$  оператор

$$Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))?$$

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

#### *Спектр линейного оператора*

- 1) Пусть  $X$  – банахово пространство,  $A \in B(X)$ . Доказать, что  $\sigma(A) = \sigma(A')$ .
- 2) Пусть  $X$  – банахово пространство,  $A \in B(X)$ . Доказать, что если  $\lambda \in \sigma_r(A)$ , то  $\lambda \in \sigma_p(A')$ ; если  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , то  $\lambda \in \sigma_p(A') \cup \sigma_r(A')$ ; если  $\lambda \in \sigma_c(A)$ , то  $\lambda \in \sigma_c(A') \cup \sigma_r(A')$ .
- 3) Найти спектр и резольвенту оператора  $Ax(t) = -x(t)$  в  $C[-1,1]$ .

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

#### *Теоремы Фредгольма и их применение*

- 1) При каких условиях на последовательность  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$  оператор  $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$  в  $l_p$ , где  $1 \leq p < +\infty$ , является фредгольмовым оператором? В тех случаях, когда оператор фредгольмов, вычислить  $\alpha(A)$ ,  $\beta(A)$  и  $\text{ind } A$ .
- 2) В пространстве  $L_2(0,1)$  найти решение интегрального уравнения при всех значениях  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$x(t) - \lambda \int_0^1 \min(t, s) x(s) ds = 0$$

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

*Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве*

- 1) Пусть  $H$  – бесконечномерное гильбертово пространство,  $A$  – самосопряженный оператор в  $H$ . Доказать, что если  $A$  – компактен, а  $f$  – функция, определённая и непрерывная на  $\sigma(A)$ , то оператор  $f(A)$  компактен тогда и только тогда, когда  $f(0) = 0$ .

Рекомендации по выполнению:

- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

Подготовка к контрольной работе

В течение семестра проводятся две аудиторные контрольные работы, каждая на 30 баллов – 5 задач по 6 баллов каждая. Время выполнения работы – 2 академических часа (90 минут). Примерное задание. Решить тестовую контрольную работу. Тестовая контрольная работа является инструментом текущего контроля знаний, умений и навыков обучающегося по группам тем дисциплины.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1

- 1) Найти продолжение функционала  $f \in l^*$ ,  $l = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: y = 5x\}$ ,  $f(x, y) = 2x$  на все пространство  $\mathbb{R}^2$  с сохранением нормы.
- 2) Объяснить существование обратного оператора к оператору  $I - A: C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$  и представить обратный оператор в виде ряда.

$$Ax(t) = \frac{x(1-t)}{5} + \frac{x(t)}{7}$$

- 3) Найти обратный оператор к оператору  $A: L_3[0,1] \rightarrow L_3[0,1]$ ,  $A(x)(t) = e^t x(t/2)$ .
- 4) Найти резольвенту оператора  $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$  при  $\lambda = 100$ ,

$$A(x) = \int_0^1 (s^2 + st^3)x(s)ds.$$

- 5) Решить интегральное уравнение (записать решение в виде ряда)

$$0,1 \int_0^1 \sin(st)x(s)ds + x(t) = \sin t$$

Контрольная работа № 2

- 1) Найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds - x(t) = -3\sin t + 5\cos t$$

- 2) Найти те функции  $y(t)$ , с которыми уравнение

$$\int_0^1 (-23ts + 624s^2)x(s)ds - x(t) = y(t)$$

имеет решение.

- 3) Записать решение уравнения Вольтерра в виде ряда

$$\int_0^t (ts + s^2)x(s)ds - x(t) = t$$

4) Найти спектр оператора в  $C[0,1]$

$$A(x) = \int_0^1 (s^2 + st^3)x(s)ds.$$

5) Найти спектр оператора

$$A: l_2 \rightarrow l_2, A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Критерии оценивания:

6 баллов – обосновано получен верный ответ, названы используемые в решении теоретические утверждения, все вычисления проведены верно.

5 баллов – получен верный ответ, но не названы используемые в решении теоретические утверждения; в вычислениях может быть допущена арифметическая ошибка.

3 балла – в целом верный ход решения, но присутствует грубая ошибка в вычислениях.

2 балла – названы теоретические утверждения, необходимые для решения задачи; присутствуют вычисления, имеющие отношения к задаче, но они не завершены.

1 балл – названы теоретические утверждения, необходимые для решения задачи; вычисления либо отсутствуют, либо не имеют отношения к задаче.

#### Рекомендации по самоподготовке к промежуточной аттестации по дисциплине

Оценка студента в рамках модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время практических занятий, домашних заданий, контрольных работ. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины:

61 - 75 баллов - удовлетворительно;

76 - 90 баллов - хорошо;

91 -100 баллов - отлично.

Неуспевающие студенты или студенты, желающие повысить оценку, на зачете должны написать письменную работу. Билеты для зачета включают: теоретический вопрос по курсу дисциплины и две задачи из числа разобранных на семинарах и предлагавшихся на контрольных работах.

Вопросы к дифференцированному зачету

1. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и его непрерывность.
2. Теорема Банаха-Штейнгауза.
3. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
4. Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство. Отделение выпуклых множеств.
5. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам.
6. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Ограниченность слабо ограниченных множеств.
7. Топологические векторные пространства. Полунормы. Локально-выпуклые пространства. Непрерывные отображения топологических векторных пространств.
8. Обобщения теорем Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, теоремы об открытом отображении для топологических векторных пространств.
9. Двойственность в топологических векторных пространствах.
10. Сопряженные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Равенство норм оператора и его сопряженного.
11. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.

12. Спектр диагонального оператора. Норма и спектр оператора умножения на функцию.
13. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве.
14. Альтернатива Фредгольма.
15. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
16. Равенства  $\|A\| = \sup\{(Ax, x) : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$  для самосопряженного оператора.
17. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
18. Теорема об отображении спектров для многочленов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство  $\|f(A)\| = \sup\{|f(t)| : t \text{ лежит в } \sigma(A)\}$ .
19. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для оператора с циклическим вектором).
20. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.