

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Романчук Иван Сергеевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 11.11.2025 11:31:16
Уникальный программный ключ:
6319edc2b582ffdacea443f01d5779368d0957ac34f5cd074d81181530452479

Л.И. Якобчук

М.В. Виноградова

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ
«Об образовании в Российской Федерации» ТюмГУ является
правопреемником ГАУ Северного Зауралья и продолжает
реализовывать образовательные программы по соответствующим
видам, уровням и условиям обучения, в том числе с сохранением
всех существующих форм и условий обучения

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Тюмень

2016

УДК 51

ББК 22.1

П 75

Любовь Ильинична Якобюк, Марина Владимировна Виноградова

Высшая математика - учебное пособие. - Тюмень: Издательство
«Вектор Бук», 2016 – 400 с.

Настоящее пособие адресовано студентам экономических направлений высших учебных заведений, для организации их самостоятельной работы, а так же может быть использовано преподавателями при подготовке и проведении практических занятий, контрольных работ по дисциплине «Высшая математика».

Учебное пособие содержит материал по следующим разделам дисциплины «Высшая математика»: линейная алгебра, векторная алгебра, элементы аналитической геометрии на плоскости, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление одной переменной, интегральное исчисление, функция нескольких переменных, комплексные числа, дифференциальные уравнения, ряды. Каждый раздел содержит теоретические сведения, примеры решения типовых задач, упражнения и тесты для самоконтроля. Так же приведены задания для составления контрольных работ.

ББК 22.1

П 75

Рецензенты:

доцент кафедры математики ФГБОУ ВПО ГАУ Северного Зауралья,
к.п.н., Н.Н. Мальчукова;

доцент кафедры Бизнес-информатики и математики ФГБОУ ВО
«Тюменский индустриальный университет», к.с.н., М.А. Аханова.

РАЗДЕЛ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Матрицы: основные понятия, действия над матрицами

Определение. Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке, то есть таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы, где i - номер строки, а j - номер столбца. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится.

Матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \dots$. При обозначении может быть указана размерность матрицы, например $A_{2 \times 3}$, то есть матрица A имеет 2 строки и 3 столбца.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой, а матрица состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется квадратной, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы не равно числу столбцов, то матрица называется прямоугольной.

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой или нуль - матрицей.

Определение. Квадратная матрица называется диагональной матрицей, если все элементы этой матрицы, кроме элементов, стоящих на диагонали, равны 0, то есть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы.

Определение. Диагональная матрица называется единичной матрицей, если все элементы, стоящие на диагонали равны 1, то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Основные действия над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц.

Эти операции сводятся к соответствующим операциям над элементами матриц. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

$$C = A + B = B + A.$$

Пример 1. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & 6+4 \\ 2+3 & -4+7 \\ -3+8 & 9-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1-(-2) & 6-4 \\ 2-3 & -4-7 \\ -3-8 & 9-(-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число.

Операция умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha (A + B) = \alpha A \pm \alpha B; \quad A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A.$$

Пример 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ и $\alpha = -2$. Тогда $\alpha A = -2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Умножение матриц

Определение. Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C, \text{ где } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Рассмотрим умножение двух квадратных матриц второго порядка. Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

Это правило сохраняется для умножения квадратных матриц третьего и более высоких порядков, а так же для умножения прямоугольных матриц, у которых число столбцов первой матрицы, равно числу строк второй.

Замечание 1: Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, то есть $AB \neq BA$. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются перестановочными.

Замечание 2: При умножении матрицы A на единичную матрицу E , получаем матрицу A .

Замечание 3: При умножении не нулевых матриц A и B может быть получена матрица C – нулевая.

Пример 3. Найти AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Используя приведенное правило, получим

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot 3 & 4 \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) + 8 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 & (-1) \cdot (-5) + 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 8 + 5 \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 1 & (-2) \cdot (-5) + (-3) \cdot 3 & (-2) \cdot 8 + (-3) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB \neq BA$.

4. Транспонирование матрицы

Определение. Матрицу A^T называют *транспонированной к матрицей A* , а переход от A к A^T *транспонированием*, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T , то есть,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$. Тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

1.2 Определители и их свойства

Определение. Под определителем (детерминантом) понимают число, соответствующее квадратной матрице любого порядка и вычисленное по определенным правилам.

Для обозначения определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

используют следующую символику:

$$\Delta = \Delta(A) = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Определение. Определителем первого порядка называют число, соответствующее матрице 1-го порядка и равное: $A = |a| = a$.

Определение. Определителем второго порядка, соответствующего матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число равное $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Элементы матрицы A называются элементами определителя $|A|$, элементы a_{11} , a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{12} , a_{21} - побочную диагональ определителя. Таким образом, из определения следует, что для вычисления определителя второго порядка необходимо из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Определение. Определителем третьего порядка, соответствующего матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

При вычислении определителя третьего порядка можно так же использовать «метод треугольника», при использовании которого вычисления производят по следующей схеме:



Таким образом, определитель третьего порядка будет равен

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}.$$

Пример 5. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot (-2) = -36 + 100 - 15 + 10 = 59.$$

Замечание. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Ответ. $\Delta = 59.$

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} некоторого определителя, называется определитель, полученный из данного вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Пример 6. Пусть задан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$ Тогда минором для

элемента a_{23} будет являться определитель $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix},$ а для элемента a_{12}

минор имеет вид $M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.$

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} какого-либо определителя называется произведение минора M_{ij} на число $(-1)^{i+j},$ то есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Пример 7. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 - 7 \cdot 1 = 48 - 7 = 41;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 8 - 7 \cdot 1) = -(40 - 7) = -33;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 5 - 6 = -1.$$

Определение. Определителем n -го порядка называется число, равное сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, то есть

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}.$$

Последнее равенство называется разложением определителя $|A|$ по элементам первой строки. Аналогично можно получить разложение определителя по элементам других строк и столбцов.

Свойства определителей

1°. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы

$$|A| = |A^T|$$

Таким образом, строки и столбцы определителя равноправны, все дальнейшие свойства справедливы как для строк, так и для столбцов определителя.

Например, задана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, её транспонированная матрица имеет вид $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем определители этих матриц:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 = -4, \quad |A^T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4.$$

Таким образом, $|A| = |A^T|$.

2°. Перестановка двух соседних строк (столбцов) изменит знак определителя на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -21.$

Поменяем местами первую и вторую строку, получим

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 21.$$

3°. Если две строки (столбца) определителя одинаковы, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & b & \dots & c \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & b & \dots & c \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 6 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 \cdot (-2) - 1 \cdot 6 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot (-2) = 0.$$

4°. Если элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и то же число k , то определитель умножится на это число. Другими словами, общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 6$ или $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 5 - 1 \cdot 2) = 6$.

5°. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & b & \dots & c \\ ka & kb & \dots & kc \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 12 & 10 \\ 8 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & 10 \\ 8 & 8 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3^\circ}{=} 3 \cdot 0 = 0$.

6°. Если элементы некоторой строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, соответствующие строки которых состоят из этих слагаемых:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{vmatrix}.$$

7°. Если элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

8°. Алгебраическая сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{sk} = 0, \text{ если } i \neq s.$$

9°. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число k .

Например,
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 8 + 4 \cdot 1 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 \cdot 8 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -58.$$

В данном определителе умножим первую строку на (-2) и сложим со второй строкой, при этом первая строка не изменится, а вторая поменяется. Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 \cdot (-2) + 2 & 4 \cdot (-2) + 0 & 5 \cdot (-2) + 1 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & -9 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-8) \cdot 8 + 4 \cdot (-9) \cdot (-3) + 0 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot (-8) \cdot (-3) - 4 \cdot 0 \cdot 8 - 1 \cdot 2 \cdot (-9) = -58.$$

Последнее свойство используют для упрощения определителей при их вычислении.

Пример 8. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$

Решение.

Для вычисления определителей второго и третьего порядка воспользуемся их определениями. Определитель четвертого порядка упростим пользуясь свойством 9°. Получим:

а) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -5 \cdot 8 - (-6) \cdot 7 = -40 + 42 = 2.$

б) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a - (-\cos^2 a) = \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 0 + (-1)(40 - 7) + 3(5 - 6) = -33 - 3 = -36.$$

г) Выполним следующие операции. Первую строку сложим с четвертой строкой, эту же строку умножим на (-6) и сложим со второй строкой, и ее же умножим на (-3) и сложим с третьей строкой. В итоге получим определитель вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -29 & 2 & -11 \\ 0 & -14 & -3 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Разложив приведенный определитель по элементам первого столбца, получим определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу треугольника.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -29 & 2 & -11 \\ 0 & -14 & -3 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -29 & 2 & -11 \\ -14 & -3 & -11 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -29 \cdot (-3) \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot (-11) + (-11) \cdot (-14) \cdot (-1) -$$

$$-(-11) \cdot (-3) \cdot 5 - (-29) \cdot (-11) \cdot (-1) - 6 \cdot 2 \cdot (-14) = 580.$$

1.3 Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $\Delta = |A|$.

Определение. Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля, и вырожденной, если определитель равен нулю.

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A того же порядка, если выполняется условие $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрицы A и A^{-1} .

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ - алгебраические дополнения элементов определителя.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Найдем определитель Δ исходной матрицы. Если $\Delta \neq 0$, то матрица A вырожденная и обратная матрица не существует. Если $\Delta = 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы.

3. Составляем обратную матрицу по формуле (1.2).

4. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы исходя из определения: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример 9. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. Используем приведенный алгоритм.

1. Найдем определитель матрицы A , получим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27$. Так

как $\Delta \neq 0$, то обратная матрица существует, и мы ее можем найти по формуле (1.2).

2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 2 + 4 = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - (-2)) = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - (-2)) = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6.$$

3. Составим из полученных алгебраических дополнений обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Проверка.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Упражнения

1. Найти матрицу $D = -2C - A \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Для нахождения матрицы D применяем действия над матрицами: умножение матрицы на число, вычитание матриц, умножение матриц.

Находим произведение матриц A и B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 14 & -5 \\ 1 & 16 & -7 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу $-2C$, для этого умножим все элементы матрицы C на число -2 . Получим

$$-2C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Произведем вычитание матриц $-2C$ и $A \cdot B$ (поэлементно).

$$C = -2C - A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 14 & -5 \\ 1 & 16 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 4 & -22 & -1 \\ -3 & -16 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы A и B . Найти: $A + B$, $2A$, $A - 3B$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ:

а) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 18 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$, $A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 29 \\ 0 & 6 \\ -25 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & 15 & 4 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 18 & 2 \\ 8 & 6 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, $A - 3B = \begin{pmatrix} 17 & 4 & 33 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & -9 \\ -8 & -11 & -29 & -24 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы A и B . Найти AB и BA , если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = (5 \quad -2 \quad 3)$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ:

$$\text{а) } AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } AB = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}, BA = (13);$$

$$\text{г) } AB = BA = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Для данных матриц A и B найти $(A+3B)^2$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } (A+3B)^2 = \begin{pmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{pmatrix}$$

5. Дана матрица A . Убедиться, что она невырожденная, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполняемость равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/8 & 7/8 \\ -1/4 & -1/8 & 5/8 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$:

а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам второго столбца; в) получив предварительно нули в первой строке.

Решение.

а) Разложение определителя по элементам первой строки будет иметь вид $\Delta_4 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$. Тогда

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (8 + 2 + 4 - 4) - 2 \cdot (-8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16) + 1 \cdot (16 - 12 - 4 + 32) = 38.$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-8 + 6 - 16 + 12 + 4 - 16) - 2 \cdot (12 + 6 - 6 - 16) + 1 \cdot (-6 + 16 - 12 - 4) = 38.$$

в) Вычислим Δ_4 , получив предварительно нули в первой строке. Используем свойство 9° определителей. Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на (-2) и прибавим ко второму. Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 40 + 0 + 12 - 0 - 30 + 16 = 38.$$

7. Вычислить определители:

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{ж) } \begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

§2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Система m линейных уравнений с n неизвестными это система уравнений вида

[illegible]

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю, то есть $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, иначе — *неоднородной*.

- 21 -

где A - матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы; X - матрица-столбец, состоящая из неизвестных; B - матрица-столбец, состоящая из свободных членов, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Пусть дана система уравнений (2.2). Как сказано выше, эту систему уравнений можно записать в виде $A \cdot X = B$. Умножим это равенство слева на право на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то получим

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (2.4)$$

Таким образом, для решения систем линейных уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы), необходимо найти обратную матрицу A^{-1} и умножить ее на матрицу-столбец свободных членов.

Пример 1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение. Для решения данной системы матричным способом, перепишем ее в матричной форме, введя матрицы A , B , X :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений примет вид $A \cdot X = B$. Найдем матрицу X по формуле (2.4). Для ее применения найдем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель Δ по правилу треугольника, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-2)$$

$$\Delta = -4 - 0 - 6 - 4 + 0 + 4 = -10.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Получим,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(2 - 3) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - (-2)) = -(3 + 2) = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - (-2)) = -(0 + 2) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X по формуле (2.4), получим

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} (-4) \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \\ (-10) \cdot 0 + (-5) \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, или $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Проверка. В данную систему уравнений вместо неизвестных подставим найденные значения.

$$\begin{cases} 0 - 2 \cdot 1 + 2 = 0 \\ -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4 \\ 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 = 0 \\ 4 = 4 \\ 1 = 1 \end{cases}.$$

Так как получены верные тождества, то решение системы найдено верно.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

2.3 Метод Крамера

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (2.2). Составим определитель Δ из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема (Правило Крамера): Если Δ - это определитель системы, Δ_{x_j} - это определитель, полученный из определителя Δ , заменой j -го столбца, столбцом свободных членов, то есть

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

то неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ вычисляют по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

При использовании метода Крамера возможны следующие случаи:

- Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.
- Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ не равен нулю, то система не имеет решений.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель Δ , составленный из коэффициентов при неизвестных. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \cdot (-4) = -25.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим

определители Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} путем замены в определителе Δ соответственно 1-го, 2-го или 3-го столбца, столбцом свободных членов.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \cdot (-4) = 25;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 1 = 0;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot (-4) = -25.$$

Найдем неизвестные:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{25}{-25} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-25} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-25}{-25} = 1.$$

Таким образом, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Проверка. В данную систему уравнений вместо неизвестных подставим найденные значения.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 1 \\ -1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 3 \\ 3 \cdot (-1) - 0 + 5 \cdot 1 = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 3 \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Так как получены верные тождества, то решение системы найдено верно.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

2.4 Метод Гаусса

Правило Крамера для решения систем линейных уравнений оказывается довольно громоздким, если число уравнений более трех. В этом случае пользуются методом Гаусса, то есть методом последовательного исключения неизвестных.

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система приводится к равносильной системе ступенчатого

вида (треугольного), из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся и все остальные переменные.

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

- 1) Умножение строки на число, отличное от нуля;
- 2) Прибавление к одной строке другой строки;
- 3) Перестановка строк;
- 4) Вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
- 5) Транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (2.2). Для решения этой системы методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой.

Определение. Матрица, образованная путем приписывания справа к матрице A , состоящей из коэффициентов при неизвестных, столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы. Для системы (2.2) расширенная матрица будет иметь вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

Пусть в первой строке элемент $a_{11} \neq 0$ и $a_{11} \neq 1$. Примем первую строку за ведущую с разрешающим элементом a_{11} . Исключим неизвестную x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого

ко второй строке расширенной матрицы прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к третьей строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и так далее, к n -ой строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$. Расширенная матрица после таких преобразований примет вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right).$$

Далее действуем аналогично, но лишь с частью расширенной матрицы, находящейся под первой строкой. Будем считать, что $a'_{22} \neq 0$ (в противном случае мы переставим местами вторую строку с k -ой, где $a'_{k2} \neq 0$). Приступаем к исключению неизвестной переменной x_2 из всех строк расширенной матрицы, начиная с третьей. Для этого к третьей строке системы прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$, к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{42}}{a'_{22}}$, и так далее, к n -ой строке прибавим вторую, умноженную на $-\frac{a'_{n2}}{a'_{22}}$. Расширенная матрица после таких преобразований примет вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{array} \right).$$

Аналогично последовательно исключаем следующие переменные до приведения расширенной матрицы к виду треугольной матрицы, то есть к виду, где все элементы, располагающиеся под элементами

$a_{11}, a'_{22}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$, образующими главную диагональ матрицы, равны 0, то есть

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right).$$

Для нахождения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, выполним обратный ход метода Гаусса, то есть запишем систему линейных уравнений, используя коэффициенты, полученные после преобразований расширенной матрицы

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{nn}^{(n-1)} \cdot x_n = b_n^{(n-1)} \\ \dots \dots \dots \\ a''_{23} \cdot x_3 + \dots + a''_{2n} \cdot x_n = b''_3 \\ a'_{22} \cdot x_2 + a'_{23} \cdot x_3 + \dots + a'_{2n} \cdot x_n = b'_2 \\ a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1. \end{array} \right.$$

Из полученной системы находят неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{array} \right.$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right).$

Преобразуем матрицу так, чтобы все элементы в первом столбце, начиная со второго, стали нулевыми. Для этого к элементам второй и третьей строк прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-2) и на (-3) соответственно. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2+1 \cdot (-2) & 1+(-1) \cdot (-2) & -1+2 \cdot (-2) & 1+5 \cdot (-2) \\ 3+1 \cdot (-3) & 2+(-1) \cdot (-3) & -2+2 \cdot (-3) & 1+5 \cdot (-3) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right).$$

Далее полученную матрицу преобразуем так, чтобы во втором столбце все элементы, начиная с третьего стали нулевыми. Это будет соответствовать исключению неизвестной переменной x_2 . Для этого к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки матрицы, умноженные на $\left(-\frac{5}{3}\right)$. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 5+3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) & -8+(-5) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) & -14+(-9) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, все элементы под главной диагональю равны 0. Выполняем обратный ход метода Гаусса, то есть составляем систему уравнений, с полученными после преобразований в расширенной матрице коэффициентами, получим

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ 3x_2 - 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{array}\right. , \text{ или } \left\{\begin{array}{l} x_3 = 1 \div \frac{1}{3} = 3 \\ 3x_2 - 5 \cdot 3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 2 \cdot 3 = 5 \end{array}\right. , \text{ или } \left\{\begin{array}{l} x_3 = 3 \\ 3x_2 = -9 + 15 \\ x_1 - x_2 = 5 - 6 \end{array}\right. , \text{ или } \left\{\begin{array}{l} x_3 = 3 \\ 3x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{array}\right. ,$$

$$\text{или } \left\{\begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = 6 \div 3 = 2 \\ x_1 = -1 + x_2 = -1 + 2 = 1 \end{array}\right. .$$

Итак, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Проверка. В данную систему уравнений вместо неизвестных подставим найденные значения.

$$\left\{\begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1 \\ 1 - 2 + 2 \cdot 3 = 5. \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l} 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ 5 = 5. \end{array}\right. . \text{ Следовательно, система решена верно.}$$

Ответ. $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$

Упражнения

1. Решить систему линейных уравнений: 1) матричным способом; 2) используя правило Крамера; 3) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

1) Решим систему матричным способом, для этого вычислим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам матрицы.

Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 1 + 10 - 6 = 12 \neq 0 \quad - \quad \text{матрица невырожденная,}$$

следовательно, обратная матрица существует.

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 2) = -8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X :

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \cdot 12 & 3 \cdot 3 & (-3) \cdot 3 \\ -8 \cdot 12 & 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 12 & (-4) \cdot 3 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -84 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 =$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$.

2) Решим систему методом Крамера.

Составим и вычислим определитель Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 2) = 12.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим определители Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} путем замены в определителе Δ соответственно 1-го, 2-го или 3-го столбца, столбцом свободных членов.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 - (3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 12 - 3 \cdot 2 \cdot 1) = 0;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 12 \cdot 2 \cdot 1 - (1 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 12) = -84;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 12 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 1 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 3) = 60.$$

Тогда, $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7$; $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

3) Решим систему методом Гаусса, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

Расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Поменяем местами строки, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Выберем первую строку за ведущую и первый элемент в ней за разрешающий. Умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими элементами второй строкой. Аналогично, умножим элементы первой строки на (-5) и сложим с элементами третьей строки.

Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{array} \right).$$

Далее будем работать только со второй и третьей строкой, а именно, умножим элементы второй строки на (-1) и сложим с элементами второй строки. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array} \right).$$

Таким образом, получили треугольную расширенную матрицу, которой будет равносильна система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -4x_2 - 5x_3 = 3 \\ -3x_3 = -15 \end{cases}.$$

Находим неизвестные:

$$x_3 = \frac{-15}{-3} = 5;$$

$$x_2 = \frac{3+5x_3}{-4} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7;$$

$$x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 = 3 - (-7) - 2 \cdot 5 = 0.$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = -7, x_3 = 5$.

2. Записать системы в матричной форме и решить их матричным способом:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}.$$

Ответ: а) $x_1 = x_2 = x_3 = -1$; б) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$.

3. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = -24 \end{cases}.$$

Ответ: а) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 0$; б) $x_1 = -19, x_2 = 26, x_3 = 11, x_4 = -5$.

4. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases} .$$

Ответ: а) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$; б) $x_1 = 3$, $x_2 = 7$, $x_3 = -9$.

Тест для самоконтроля

Тема: «Линейная алгебра»

1. Матрица называется вырожденной, если
 - а. определитель квадратной матрицы равен нулю
 - б. определитель квадратной матрицы не равен нулю
 - в. определитель квадратной матрицы равен единице
 - г. определитель матрицы имеет треугольный вид
 - д. определитель матрицы равен рангу
2. Матрица, в которой число строк равно числу столбцов называется
 - а. квадратной,
 - б. диагональной
 - в. единичной,
 - г. прямоугольной
 - д. вырожденной
3. Система имеет единственное решение если
 - а. определитель системы не равен нулю
 - б. определитель системы равен единице
 - в. определитель системы равен нулю
 - г. определитель системы не существует
 - д. определитель системы равен бесконечности
4. Квадратная матрица имеет обратную, если она
 - а. невырожденная,
 - б. нулевая
 - в. вырожденная,
 - г. единичная
 - д. диагональная

5. Определитель второго порядка, полученный из данного определителя третьего порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент называется

- a. алгебраическим дополнением,
- b. минором этого элемента
- c. вырожденным,
- d. нулевым
- e. невырожденным

6. Если в определителе строки поменять местами с соответствующими столбцами, то определитель

- a. не изменится,
- b. равен нулю
- c. изменится на противоположный,
- d. равен единице
- e. изменится по абсолютной величине

7. Определитель второго порядка, полученный из данного определителя третьего порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент, и умноженный на число $(-1)^{i+j}$ называется

- a. алгебраическим дополнением,
- b. минором этого элемента
- c. вырожденным,
- d. нулевым
- e. невырожденным

8. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера имеет вид:

a. $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \Delta \neq 0.$

b. $x = \frac{\Delta}{\Delta_x}, y = \frac{\Delta}{\Delta_y}, z = \frac{\Delta}{\Delta_z}.$

c. $x = \Delta_x, y = \Delta_y, z = \Delta_z.$

d. $x = \frac{\Delta_z}{\Delta}, y = \frac{\Delta_x}{\Delta}, z = \frac{\Delta_x}{\Delta}$

e. $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_x}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

9. Найти сумму A+B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, d. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, e. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

10. Найти обратную матрицу A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, e. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

11. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 5 & x+4 \end{vmatrix} = 0$.

a. $\{-5; 1\}$, b. $\{5; -1\}$, c. $\{-5; -1\}$, d. $\{5; 1\}$, e. $\{-5; 0\}$

12. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x-5 & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} < 0$.

a. (2: 3), b. (-2: 3), c. (2: 4), d. (-2: 0), e. (2: 5)

13. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}.$$

a. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$, b. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$, c. $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$, d. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$, e. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$.

14. Найти $A+2B$, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, d. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

15. Вычислить $2A-B$, если даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, d. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, e. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

16. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$$

a. не имеет решений

b. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases},$

c. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases},$

d. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

e. имеет бесконечно множество решений

17. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 4x + 10y = 6 \end{cases}.$$

a. имеет бесконечно множество решений

b. единственное решение

c. нулевое решение

d. не имеет решений

e. имеет два решения

18. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

a. 40, b. 46, c. 43, d. 30, e. 34

19. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.$$

a. $2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc$,

b. $2x^3 + (a + b + c)x^2 + abc$

с. $2x^3 - abc$,

д. $(a + b + c)x^2 - 2abc$

е. $2x^3 + (a + b + c)x^2$

20. Вычислить произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

а. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, б. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, в. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, д. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, е. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$.

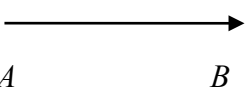
РАЗДЕЛ II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

3.1 Основные понятия и определения

При изучении различных разделов физики, механики и так далее, встречаются величины, которые полностью определяются при помощи числа, полученного в результате их измерения однородной величиной, принятой за единицу, такие величины называются скалярными. Например: длина, площадь, объем, масса, температура и так далее.

Величины, для определения которых, кроме числового значения, необходимо знать так же их направление, называют векторными величинами.

 **Определение.** Вектором называют направленный отрезок, имеющий определенную длину, то есть отрезок AB определенной длины, где A - начало отрезка, B - конец отрезка.

Вектор принято обозначать символом $\overline{AB}$ или $\overline{AB}$. Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,... В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости обозначить маленькой латинской буквой $\overline{a} = \overline{AB}$.

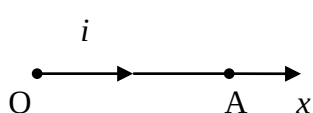
Начало вектора называют точкой приложения вектора.

Определение. Длина вектора $\overline{AB}$ называется его модулем и обозначается символом $|\overline{AB}|$.

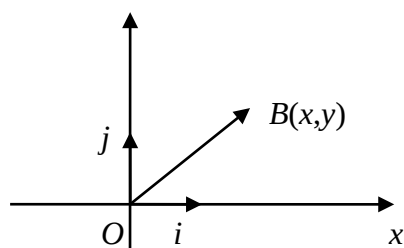
Определение. Вектор называется единичным, если его длина равна единице масштаба, то есть $|\overline{a}| = 1$.

Определение. Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают и обозначается $\overline{0}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю.



Рассмотрим единичный вектор i , начало которого совпадает с точкой O . С помощью этого единичного вектора можно определить систему координат на прямой, приняв точку O за начало координат, а направление вектора за направление оси.



Если мы возьмем два перпендикулярных единичных вектора i и j , имеющих общее начало в точке O , то с их помощью можно задать систему координат на плоскости. Если направление

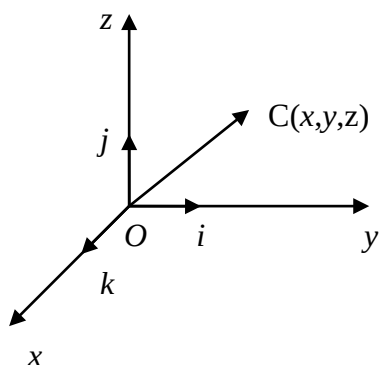
вектора i принять за направление оси Ox , направление вектора j принять за направление оси Oy , а точку O принять за начало координат, то мы получим прямоугольную систему координат на плоскости.

Определение. Любой произвольный вектор, начало которого совпадает с началом координат, а концом вектора является любая точка на плоскости, называется радиус - вектором на плоскости.

На приведенном рисунке $\overline{OB}(x, y)$ - радиус – вектор.

Координаты радиус – вектора равны координатам конца радиус – вектора. Любой произвольный вектор на плоскости, путем параллельного переноса может занять положение равного ему радиус – вектора.

Векторы на плоскости называются двумерными, так как задаются двумя координатами. Единичные векторы i и j , определяющие систему координат на плоскости называют единичным координатным базисом на плоскости.



Рассмотрим три взаимно перпендикулярных единичных вектора на плоскости i , j и k , имеющих общее начало в точке O , где $i \perp j$, $i \perp k$, $j \perp k$. С помощью этих единичных векторов можно задать прямоугольную систему координат в

пространстве, если направление вектора i принять за направление оси Ox , направление вектора j за направление оси Oy , направление вектора k за направление оси Oz , точку O за начало координат.

Таким образом, любой точке в пространстве соответствует упорядоченная тройка действительных чисел и наоборот, каждой тройке действительных чисел соответствует точка в пространстве, то есть между множеством действительных чисел и множеством точек в пространстве существует взаимно однозначное соответствие.

Любой произвольный вектор, начало которого совпадает с началом координат, а концом является произвольная точка пространства, называется радиус – вектором пространства.

Точки, которые имеют три координаты, и векторы имеющие три координаты называется трехмерными. Единичные векторы i , j и k , образующие прямоугольную систему координат в пространстве, называются единичным координатным базисом в пространстве.

Пусть даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ находятся по формуле: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Длина вектора вычисляется по формуле:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.1)$$

Например, пусть в пространстве заданы точки $A(0, 7, -1)$ и $B(2, 1, 4)$.

Тогда вектор $\overline{AB}$ будет иметь координаты $\overline{AB} = (2 - 0, 1 - 7, 4 - (-1))$ или $\overline{AB} = (2, -6, 5)$. По формуле (3.1) найдем длину этого вектора:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 5^2} = \sqrt{65}.$$

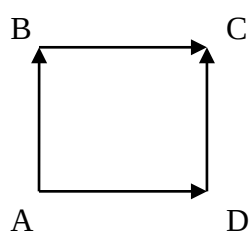
Определение. Векторы называются коллинеарными, если они, либо лежат на одной и той же прямой, либо на параллельных прямых ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$).

Определение. Два вектора называются противоположными, если они имеют равные модули, коллинеарные, но направлены в противоположные стороны и обозначается ($-\vec{a} \updownarrow \vec{a}$).

Если векторы имеют одинаковую направленность, то они называются сонаправленными ($-\vec{a} \upuparrows \vec{a}$).

Определение. Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение. Векторы называются равными, если они сонаправленные и модули их равны, то есть $\vec{a} = \vec{b}$, если ($\vec{a} \upuparrows \vec{b}$) и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.



Пример. Рассмотрим квадрат $ABCD$. Из определения равенства векторов, будут справедливы равенства $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$. Но $\overline{AB} \neq \overline{AD}$ и $\overline{BC} \neq \overline{DC}$, хотя $|\overline{AB}| = |\overline{DC}| = |\overline{AD}| = |\overline{BC}|$.

Определение. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол φ , на который нужно повернуть один из векторов до его совпадения со вторым после приведения этих векторов к общему началу.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, называется ортом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^0$.

Любой вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ может быть представлен в виде произведения единичного вектора $\vec{a}^0$ на модуль вектора $\vec{a}$, то есть $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, следовательно $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

В системе орт вектор $\vec{a}$ задается формулой:

$$\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \quad (3.2)$$

где i, j, k - единичные векторы (орты) соответственно координатных осей Ox, Oy, Oz ; a_x, a_y, a_z - координаты вектора $\vec{a}$.

Представление вектора $\vec{a}$ в виде (3.2) называется его разложением по осям координат или разложением по ортам. Тогда длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α, β, γ , образованными им с осями координат Ox, Oy и Oz . Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы* вектора) определяются по формулам

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Пример. Найти длину вектора $\vec{a} = 20i + 30j - 60k$ и его направляющие косинусы.

Решение. Длину вектора найдем по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = 70.$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}, \cos \beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}, \cos \gamma = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

$$\text{Ответ. } \cos \alpha = \frac{2}{7}, \cos \beta = \frac{3}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7}.$$

3.2 Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть даны два вектора: $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ и $\vec{b} = b_x i + b_y j + b_z k$.

Определение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$, то есть

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j + (a_z + b_z)k.$$

Таким образом, при сложении векторов одноименные координаты складываются.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, для которого $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ , называют вектор $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a}$, параллельный вектору $\vec{a}$, сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлен, если $\lambda < 0$, и имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

По определению получаем $\lambda \vec{a} = \lambda a_x i + \lambda a_y j + \lambda a_z k$.

Замечание. При умножении вектора на (-1) получаем противоположный вектор, то есть $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ или $-\vec{a} = (-a_x, -a_y, -a_z)$.

Для рассмотренных действий над векторами выполняются законы:

- *переместительный* (коммутативный):

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

б) $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$.

- *сочетательный* (ассоциативный):

а) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$,

б) $\vec{a} \lambda_1 \lambda_2 = (\vec{a} \lambda_1) \lambda_2 = \lambda_1 (\vec{a} \lambda_2)$.

- *распределительный* (дистрибутивный):

$$\text{а) } (\bar{a} + \bar{b})\lambda = \bar{a}\lambda + \bar{b}\lambda,$$

$$\text{б) } \bar{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \bar{a}\lambda_1 + \bar{a}\lambda_2.$$

Пример. Даны векторы $\bar{a} = (1, 1, 0)$, $\bar{b} = (0, 3, 6)$, $\bar{c} = (2, 4, 3)$.

Вычислить: а) $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$, б) $2\bar{a}$, в) $\frac{\bar{b}}{3}$, г) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot 5$, д) $\bar{a} - 2\bar{c}$.

Решение.

$$\text{а) } \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = (1 + 0 - 2, 1 + 3 - 4, 0 + 6 - 3) = (-1, 0, 3).$$

$$\text{б) } 2\bar{a} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 0) = (2, 2, 0).$$

$$\text{в) } \frac{\bar{b}}{3} = \frac{1}{3}\bar{b} = \left(\frac{1}{3} \cdot 0, \frac{1}{3} \cdot 3, \frac{1}{3} \cdot 6\right) = (0, 1, 2).$$

$$\text{г) } (\bar{a} + \bar{b}) \cdot 5 = 5\bar{a} + 5\bar{b} = (5 \cdot 1 + 5 \cdot 0, 5 \cdot 1 + 5 \cdot 3, 5 \cdot 0 + 5 \cdot 6) = (5, 20, 30).$$

$$\text{д) } \bar{a} - 2\bar{c} = (1 - 2 \cdot 2, 1 - 2 \cdot 4, 0 - 2 \cdot 3) = (-3, -7, -6).$$

Если векторы заданы в координатной форме $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\bar{a} + \bar{b} = ((x_1 + x_2); (y_1 + y_2); (z_1 + z_2)),$$

$$\bar{a} - \bar{b} = ((x_1 - x_2); (y_1 - y_2); (z_1 - z_2)),$$

$$\lambda\bar{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Определение. Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось l называется число, обозначаемое $np_l \bar{a}$ и равное $|\bar{a}| \cdot \cos \varphi$, где $\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi)$ - угол между положительным направлением оси l и направлением вектора $\bar{a}$, то есть

$$np_l \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi.$$

Следствие: 1. Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол ($\varphi < 90^\circ$), отрицательна, если этот угол тупой ($\varphi > 90^\circ$), и равна нулю, если этот угол прямой.

2. Проекции равных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на одну и ту же ось равны между собой.

Пример. Вектор $\vec{a}$, длина которого равна 5, образует с осью Ox угол 60° . Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на ось Ox .

Решение. По определению имеем $pr_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$, где φ - это угол между вектором $\vec{a}$ на ось Ox . Так как по условию $|\vec{a}| = 5$, $\varphi = 60^\circ$, то $pr_{Ox} \vec{a} = 5 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5$.

3.3 Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается символом: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению имеем равенство

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение равно 0.

Скалярное произведение ортов.

1. Скалярное произведение одноименных ортов равно 1, то есть $i \times i = 1$, $j \times j = 1$ и $k \times k = 1$, так как модули ортов равны единице;

2. Скалярное произведение разноименных ортов равно 0, то есть $i \times j = 0$, $j \times i = 0$, $k \times j = 0$, $i \times k = 0$, $j \times k = 0$, так как орты попарно перпендикулярны и их произведение равно 0.

Свойства скалярного произведения

1°. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2°. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;

$$3^{\circ}. \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c};$$

$$4^{\circ}. \bar{a} \cdot \bar{b} = 0, \text{ если } \bar{a} = 0, \text{ либо } \bar{b} = 0, \text{ либо } \bar{a} \text{ ортогонален } \bar{b} (\bar{a} \perp \bar{b}).$$

Скалярное произведение между координатами

Пусть векторы заданы в координатной форме $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тогда скалярное произведение двух векторов можно вычислить по формуле:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (3.3)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Пример. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = (3, 8, 2)$ и $\bar{b} = (3, 1, 0)$.

Решение.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 17.$$

Ответ. $\bar{a} \cdot \bar{b} = 17$.

Угол между двумя векторами. Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \quad (3.4)$$

Таким образом, косинус угла между векторами равен отношению их скалярного произведения на произведение модулей этих векторов.

Если скалярное произведение заменить формулой (3.3), а модули в знаменателе выразить через формулы $|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ и $|\bar{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$, то получим:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример. Найдите угол φ между векторами

а) $\bar{a} = (2, -2, 1)$ и $\bar{b} = (-4, 1, 1)$; б) $\bar{a} = (1, 1, 0)$ и $\bar{b} = (0, 1, 1)$.

Решение. а) Найдем косинус угла φ , образованного заданными векторами, по формуле $\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$. Получим

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-9}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{18}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$.

б) Аналогично, получим

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

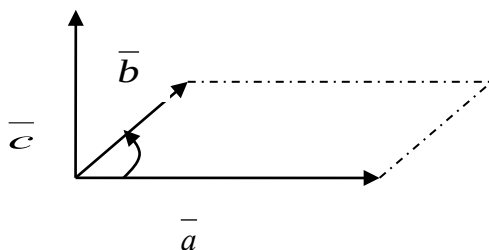
3.4 Векторное и смешанное произведение векторов

Определение. Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, удовлетворяющий трем условиям:

1. Длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \alpha$ где α - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть $\bar{c} \perp \bar{b}$, $\bar{c} \perp \bar{a}$.

3. Кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ вокруг вектора $\bar{c}$ совершается против часовой стрелки.



Свойства векторного произведения

$$1^\circ. \bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a});$$

2°. $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, если $\bar{a} = 0$, либо $\bar{b} = 0$, либо $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов);

$$3^\circ. (k\bar{a}) \times \bar{b} = k(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (k\bar{b}) \text{ для любого числа } k;$$

$$4^\circ. \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}.$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0.$$

Векторное произведение ортов. Векторное произведение одноименных ортов равно 0, то есть $i \times i = 0$ $j \times j = 0$ $k \times k = 0$, так как одноименные орты коллинеарны.

Если написать последовательность единичных векторов i, j, k, i, j , то векторное произведение двух любых смежных ортов дает следующий единичный орт со знаком плюс; если же порядок сомножителей изменен, т.е. последовательность рассматривается справа налево, то третий единичный вектор берется со знаком минус

$$k \times i = j \quad i \times j = k \quad j \times k = i, \text{ и } k \times j = -i \quad i \times k = -j \quad j \times i = -k.$$

Векторное произведение между координатами

Пусть даны два вектора $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тогда векторное произведение двух векторов определяется формулой

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\text{или } \bar{a} \times \bar{b} = \{(y_1 z_2 - y_2 z_1), (z_1 x_2 - z_2 x_1), (x_1 y_2 - x_2 y_1)\}.$$

Длина векторного произведения определяется по формуле

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}.$$

Пример. Даны векторы $\vec{a} = (2, 5, 7)$ и $\vec{b} = (1, 2, 4)$. Найти координаты и длину векторного произведения.

Решение.

Найдем координаты векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{(5 \cdot 4 - 7 \cdot 2), (7 \cdot 1 - 2 \cdot 4), (2 \cdot 2 - 5 \cdot 1)\} = \{6, -1, -1\}.$$

Найдем длину векторного произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{38}.$$

Ответ. $\vec{a} \times \vec{b} = \{6, -1, -1\}$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{38}$.

Из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю векторного произведения

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

в частности, площадь треугольника $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Пример. Найти площадь треугольника ABC , где $\vec{A}(-2, 1, 0)$, $\vec{B}(3, 4, 8)$, $\vec{C}(-1, 3, 6)$.

Решение.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Найдем координаты векторов, получим

$$\vec{AC} = (-1+2; 3-1; 6-0) = (1, 2, 6), \quad \vec{AB} = (3-(-2); 4-1; 8-0) = (5, 3, 8).$$

Их векторное произведение равно

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{(3 \cdot 6 - 2 \cdot 8), (5 \cdot 6 - 1 \cdot 8), (5 \cdot 2 - 1 \cdot 3)\} = \{2, 22, 7\}.$$

Итак, $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ или

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 22^2 + 7^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 484 + 49} = \frac{\sqrt{537}}{2} (\text{кв.ед.}).$$

Ответ. $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{537}}{2} (\text{кв.ед.})$

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное их векторно-скалярному произведению, то есть

$$\overline{abc} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Свойства смешанного произведения

1⁰. Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то есть

$$V_{\text{пар-да}} = |\overline{abc}|.$$

В частности, *объем пирамиды*, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overline{abc}|.$$

2⁰. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равно 0, тогда и только тогда когда эти векторы компланарны, то есть на этих векторах нельзя построить параллелепипед.

3⁰. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не меняется при круговой (циклической) перестановке его сомножителей. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный, то есть

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}) = (\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}) = -(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}) = -(\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}) = -(\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}).$$

Смешанное произведение между координатами

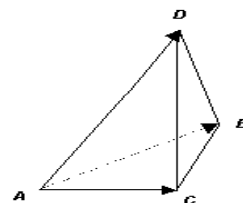
Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ определяется по формулой

$$|\overline{abc}| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Найти объем пирамиды $ABCD$, где $A(2, 0, 1)$; $B(3, -1, 4)$; $C(0, -5, 1)$; $D(0, 0, 4)$.

Решение.

Объем пирамиды равен: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overline{abc}|$.



Найдем координаты векторов:

$$\overline{a} = \overline{AB} = (1, -1, 3); \quad \overline{b} = \overline{AC} = (-2, -5, 0); \quad \overline{c} = \overline{AD} = (-2, 0, 3).$$

Тогда смешанное произведение:

$$|\overline{abc}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = |-15 - 30 - 6| = 51.$$

Следовательно, объем пирамиды:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overline{abc}| = \frac{1}{6} \cdot 51 = \frac{51}{6} = 8,5 (\text{кв.ед.}).$$

Ответ. $V_{\text{пир}} = 8,5 (\text{кв.ед.})$.

3.5 Линейно зависимые и независимые векторы. Ранг и базис системы векторов. Разложение вектора по единичному и произвольному базису

Рассмотрим n – мерные векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$. Эти векторы будем называть совокупностью или системой векторов, если некоторый вектор $\overline{b}$ равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа, не равные нулю ($\lambda_i \neq 0$). Вектор $\overline{b}$ при этом будем называть линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$, то есть

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + \dots + \lambda_n \overline{a_n}.$$

Определение. Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$ линейно зависима, если равенство $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$ выполняется при условии, что хотя

бы один из коэффициентов разложения $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Если же это равенство выполняется при условии, когда все $\lambda_i = 0$, то векторы линейно независимы.

Теорема. Векторы

[illegible]

линейно-независимы, если определитель, составленный из координат этих векторов не равен нулю, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определение. Рангом n мерного пространства называется максимальное число линейно независимых векторов этого пространства.

Определение. Любая система n линейно-независимых векторов n -мерного пространства называется *базисом* этого пространства.

Из этого определения и теоремы о линейной независимости n векторов n – мерного пространства следует, что любая система n – мерных векторов образует базис n – мерного пространства, если определитель, составленный из координат этих векторов, не равен нулю.

Например, единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \dots \bar{e}_n$ n – мерного пространства образуют единичный базис.

Замечание. Ранг n – мерного пространства совпадает с размерностью пространства.

Теорема. Всякий вектор n – мерного пространства может быть разложен по векторам любого базиса этого пространства и притом единственным образом.

Пример. Доказать, что векторы $\overline{a_1} = (2, 0, 0)$, $\overline{a_2} = (0, -1, 1)$, $\overline{a_3} = (0, 1, 4)$ образуют базис в трехмерном пространстве, то есть являются линейно-независимыми, используя определение.

Решение. Покажем, что равенство $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = \overline{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

$$\lambda_1 (2, 0, 0) + \lambda_2 (0, -1, 1) + \lambda_3 (0, 1, 4) = (0, 0, 0),$$

$$(2\lambda_1, 0, 0) + (0, -\lambda_2, \lambda_2) + (0, \lambda_3, 4\lambda_3) = (0, 0, 0).$$

Складывая соответствующие координаты получим

$$(2\lambda_1, -\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + 4\lambda_3) = (0, 0, 0).$$

Приравняем соответствующие координаты векторов в левой и правой части последнего равенства, получим систему

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Так как все $\lambda_i = 0$ ($i=1, 2, 3$), то векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ - линейно-независимы, они могут составить базис в трехмерном пространстве. $\overline{a_1} = (2, 0, 0)$, $\overline{a_2} = (0, -1, 1)$, $\overline{a_3} = (0, 1, 4)$

Пример. Разложить вектор $\overline{b} = (0, 4, 3)$ по базисным векторам $\overline{a_1} = (2, 0, 0)$, $\overline{a_2} = (0, -1, 1)$, $\overline{a_3} = (0, 1, 4)$.

Решение. Разложение вектора $\overline{b}$ по векторам $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ будет иметь вид

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = \overline{b}.$$

Подставим координаты всех векторов и выполним действия над ними:

$$\lambda_1 (2, 0, 0) + \lambda_2 (0, -1, 1) + \lambda_3 (0, 1, 4) = (0, 4, 3),$$

$$(2\lambda_1, 0, 0) + (0, -\lambda_2, \lambda_2) + (0, \lambda_3, 4\lambda_3) = (0, 4, 3).$$

Приравняв координаты, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Решив ее, получим: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{13}{5}$, $\lambda_3 = \frac{7}{5}$.

Таким образом, получим разложение:

$$0 \cdot \bar{a}_1 - \frac{13}{5} \bar{a}_2 + \frac{7}{5} \bar{a}_3 = \bar{b}.$$

Ответ. В базисе $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ вектор $\bar{b}$ имеет координаты

$$\left\{0, -\frac{13}{5}, \frac{7}{5}\right\}.$$

Замечание. В каждом n -мерном векторном пространстве можно выбрать бесчисленное множество различных базисов. В различных базисах один и тот же вектор имеет различные координаты, но единственные в выбранном базисе.

Упражнения

1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{2; -1; 5\}$, $\vec{b} = \{7; 1; -3\}$.

Решение.

1. Вычислим проекции векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ на оси координат:

$$\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b} = \{5 \cdot 2 + 3 \cdot 7; 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 1; 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-3)\} = \{31; -2; 16\},$$

$$\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b} = \{4 \cdot 2 + 7; 4 \cdot (-1) + 1; 4 \cdot 5 + (-3)\} = \{15; -3; 17\}.$$

2. Два вектора коллинеарны, если их проекции на оси координат пропорциональны, следовательно, проверим пропорциональность проекций векторов на оси координат:

$$\frac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2} = \frac{31}{15} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{16}{17}, \Rightarrow \vec{c}_1, \vec{c}_2 \text{ не коллинеарны.}$$

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = \{-7; 1; 2\}, \vec{b} = \{3; 2; -1\}$?

Решение. Два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0, скалярное произведение векторов, заданных проекциями на оси координат, вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$

где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

Вычислим скалярное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -21 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы не перпендикулярны.}$$

3. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{-1; 2; -1\}, \vec{b} = \{0; 2; 1\}, \vec{c} = \{2; 0; 3\}$?

Решение. Три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0, смешанное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 0 - (-4) - 0 - 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы не компланарны.}$$

4. При каком значении α векторы $\vec{AB}, \vec{AC}$, где $A(2; 1; \alpha), B(3; 1; 4), C(2; 5; 3)$, перпендикулярны?

Решение.

Для определения α , при котором векторы перпендикулярны, необходимо использовать условие перпендикулярности двух векторов (это условие было рассмотрено в задании. Следовательно, α мы сможем найти из условия: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, для этого найдем проекции векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ на оси координат, заданных координатами точек начала и конца вектора. В

этом случае проекции вектора на оси координат равны разности координат точек, задающих конец и начало вектора. Получим

$$\vec{AB} = \{3-2; 1-1; 4-\alpha\} = \{1; 0; 4-\alpha\}, \vec{AC} = \{2-2; 5-1; 3-\alpha\} = \{0; 4; 3-\alpha\}.$$

$$\text{Тогда } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + (4-\alpha) \cdot (3-\alpha) = 0 + 0 + (4-\alpha) \cdot (3-\alpha) = (4-\alpha) \cdot (3-\alpha) = 0.$$

Следовательно, $\alpha = 4, \alpha = 3$.

Итак, векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны при $\alpha = 4$ и при $\alpha = 3$.

5. Даны точки $A(1; 0; -1), B(0; 1; 3), C(2; 0; 1)$. Найти:

1. $\text{pr}_{(\vec{AB} + \vec{CB})}(2\vec{AC} + 3\vec{CB})$;
2. $|\vec{AB} + 4\vec{BC}|$;
3. $\angle(\vec{AB} - \vec{CB}, \vec{AB})$;
4. орт вектора $\vec{AB}$;
5. $(\vec{AB} + 4\vec{BC}) \cdot (\vec{BA} - \vec{AC})$;
6. $(\vec{AB} + 2\vec{BC}) \times (\vec{CB} - \vec{AB})$;
7. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{AC}$;

Решение.

1. Из определения скалярного произведения следует, что проекцию вектора на вектор можно вычислить по формуле: $\text{pr}_{\vec{BC}} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BC}|}$, где

скалярное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z, \quad \text{где } \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \text{и длина вектора}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad \text{Итак, в нашем случае, формула принимает вид:}$$

$$\text{pr}_{\vec{AB} + \vec{CB}}(2\vec{AC} + 3\vec{CB}) = \frac{(2\vec{AC} + 3\vec{CB}) \cdot (\vec{AB} + \vec{CB})}{|(\vec{AB} + \vec{CB})|}$$

Для нахождения $\text{pr}_{(\vec{AB} + \vec{CB})}(2\vec{AC} + 3\vec{CB})$ необходимо найти проекции векторов на оси координат, заданных координатами точек начала и конца векторов,

скалярное произведение и длину соответствующего вектора:

$$\vec{AB} = \{0-1; 1-0; 3-(-1)\} = \{-1; 1; 4\}, \vec{CB} = \{0-2; 1-0; 3-1\} = \{-2; 1; 2\},$$

$$\vec{AC} = \{2-1; 0-0; 1-(-1)\} = \{1; 0; 2\},$$

$$\vec{AB} + \vec{CB} = \{(-1)+(-2); 1+1; 4+2\} = \{-3; 2; 6\},$$

$$2\vec{AC} = \{2 \cdot 1; 2 \cdot 0; 2 \cdot 2\} = \{2; 0; 4\}, 3\vec{CB} = \{3 \cdot (-2); 3 \cdot 1; 3 \cdot 2\} = \{-6; 3; 6\},$$

$$2\vec{AC} + 3\vec{CB} = \{2+(-6); 0+3; 4+6\} = \{-4; 3; 10\},$$

$$(\vec{AB} + \vec{CB}) \cdot (2\vec{AC} + 3\vec{CB}) = (-3) \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 10 = 12 + 6 + 60 = 78,$$

$$|\vec{AB} + \vec{CB}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow$$

Таким образом, получим:

$$np_{(\vec{AB} + \vec{CB})}(2\vec{AC} + 3\vec{CB}) = \frac{(2\vec{AC} + 3\vec{CB}) \cdot (\vec{AB} + \vec{CB})}{|(\vec{AB} + \vec{CB})|} = \frac{78}{7},$$

$$pr_{(\vec{AB} + \vec{CB})}(2\vec{AC} + 3\vec{CB}) = \frac{78}{7}.$$

2. Для нахождения длины вектора воспользуемся формулой:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\},$$

для этого найдем проекции векторов на оси координат (смотри пункт 1), так же найдем сумму векторов по правилу сложения векторов, заданных проекциями на оси координат:

$$\vec{AB} = \{0-1; 1-0; 3-(-1)\} = \{-1; 1; 4\}, \vec{BC} = \{2-0; 0-1; 1-3\} = \{2; -1; -2\},$$

$$4\vec{BC} = \{4 \cdot 2; 4 \cdot (-1); 4 \cdot (-2)\} = \{8; -4; -8\},$$

$$\vec{AB} + 4\vec{BC} = \{-1+8; 1+(-4); 4+(-8)\} = \{7; -3; -4\}.$$

$$\text{Тогда, } |\vec{AB} + 4\vec{BC}| = \sqrt{7^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+9+16} = \sqrt{74}.$$

$$\text{Итак, } |\vec{AB} + 4\vec{BC}| = \sqrt{74}.$$

3. Угол между векторами можно найти из определения скалярного произведения: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Получим

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

В нашем случае формула принимает вид:

$$\angle((\vec{AB} - \vec{CB}), \vec{AB}) = \arccos \frac{(\vec{AB} - \vec{CB}) \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB} - \vec{CB}| \cdot |\vec{AB}|}.$$

Находим проекции векторов на оси координат (смотри пункты 1 и 2), вычисляем скалярное произведение векторов, заданных своими проекциями на оси координат, вычисляем длины векторов:

$$\vec{AB} = \{0 - 1; 1 - 0; 3 - (-1)\} = \{-1; 1; 4\}, \vec{CB} = \{0 - 2; 1 - 0; 3 - 1\} = \{-2; 1; 2\},$$

$$\vec{AB} - \vec{CB} = \{(-1) - (-2); 1 - 1; 4 - 2\} = \{1; 0; 2\},$$

$$(\vec{AB} - \vec{CB}) \cdot \vec{AB} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 7,$$

$$|\vec{AB} - \vec{CB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}.$$

Следовательно,

$$\angle((\vec{AB} - \vec{CB}), \vec{AB}) = \arccos \frac{(\vec{AB} - \vec{CB}) \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB} - \vec{CB}| \cdot |\vec{AB}|} = \arccos \frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{18}} = \arccos \frac{7}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} = \arccos \frac{7}{3\sqrt{10}};$$

$$\text{Итак } \angle((\vec{AB} - \vec{CB}), \vec{AB}) = \arccos \frac{7}{3\sqrt{10}}.$$

4. Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α, β, γ , образованными им с осями координат Ox, Oy, Oz . Косинусы этих углов (направляющие косинусы вектора) определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \text{ следовательно, мы имеем вектор единичной длины,}$$

такой вектор называется ортом. Для нахождения орта вектора необходимо каждую проекцию вектора на оси координат разделить на его длину.

Так как

$$\vec{AB} = \{0 - 1; 1 - 0; 3 - (-1)\} = \{-1; 1; 4\}, |\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

то орт вектора $\vec{AB} = \left\{ -\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}} \right\}$.

Итак: орт вектора $\vec{AB} = \left\{ -\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}} \right\}$.

5. Скалярное произведение векторов вычисляем по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$

где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$. Вычислим проекции векторов на оси координат и скалярное произведение векторов:

$$\vec{AB} = \{0-1; 1-0; 3-(-1)\} = \{-1; 1; 4\}, \vec{BC} = \{2-0; 0-1; 1-3\} = \{2; -1; -2\},$$

$$4\vec{BC} = \{4 \cdot 2; 4 \cdot (-1); 4 \cdot (-2)\} = \{8; -4; -8\},$$

$$\vec{AB} + 4\vec{BC} = \{-1+8; 1+(-4); 4+(-8)\} = \{7; -3; -4\},$$

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = \{(-1) \cdot (-1); (-1) \cdot 1; (-1) \cdot 4\} = \{1; -1; -4\}, \vec{AC} = \{2-1; 0-0; 1-(-1)\} = \{1; 0; 2\},$$

$$\vec{BA} - \vec{AC} = \{1-1; -1-0; -4-2\} = \{0; -1; -6\},$$

$$(\vec{AB} + 4\vec{BC}) \cdot (\vec{BA} - \vec{AC}) = 7 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) + (-4) \cdot (-6) = 0 + 3 + 24 = 27.$$

$$\text{Итак, } (\vec{AB} + 4\vec{BC}) \cdot (\vec{BA} - \vec{AC}) = 27.$$

6. Векторное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}.$$

Находим проекции векторов на оси координат:

$$\vec{AB} = \{0-1; 1-0; 3-(-1)\} = \{-1; 1; 4\}, \vec{BC} = \{2-0; 0-1; 1-3\} = \{2; -1; -2\},$$

$$2\vec{BC} = \{2 \cdot 2; 2 \cdot (-1); 2 \cdot (-2)\} = \{4; -2; -4\},$$

$$\vec{AB} + 2\vec{BC} = \{-1+4; 1+(-2); 4+(-4)\} = \{3; -1; 0\}, \vec{CB} = \{0-2; 1-0; 3-1\} = \{-2; 1; 2\},$$

$$\vec{CB} - \vec{AB} = \{-2-(-1); 1-1; 2-4\} = \{-1; 0; -2\}.$$

$$(\vec{AB} + 2\vec{BC}) \times (\vec{CB} - \vec{AB}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-1) \cdot (-2) + \vec{j} \cdot 0 \cdot (-1) + \vec{k} \cdot 3 \cdot 0 - \vec{k} \cdot (-1) \cdot (-1) -$$

$$\vec{i} \cdot 0 \cdot 0 - \vec{j} \cdot (-2) \cdot 3 = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 0\vec{k} - \vec{k} - 0\vec{i} + 6\vec{j} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}.$$

Итак, $(\vec{AB} + 2\vec{BC}) \times (\vec{CB} - \vec{AB}) = 2\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$.

7. Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

$$\vec{AB} = \{0-1; 1-0; 3-(-1)\} = \{-1; 1; 4\}, \vec{BC} = \{2-0; 0-1; 1-3\} = \{2; -1; -2\},$$

$$\vec{AC} = \{2-1; 0-0; 1-(-1)\} = \{1; 0; 2\},$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \cdot 4 - 0 \cdot (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= 2 + (-2) + 0 - (-4) - 0 - 4 = 2 - 2 + 4 - 4 = 0.$$

Итак, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0$.

6. Даны координаты вершин пирамиды

$$A(1; 4; 3), B(2; 3; 1), C(-2; 1; 3), D(0; 1; 2).$$

Вычислить:

1. Объем пирамиды;
2. Длину ребра AB ;
3. Площадь грани ABC .

Решение.

1. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, а объем параллелепипеда вычисляется на основании геометрического смысла смешанного произведения. Объем параллелепипеда, построенного на векторах как на ребрах равен:

$$V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|,$$

где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

Найдем проекции соответствующих векторов на оси координат:

$$\vec{AB} = \{2-1; 3-4; 1-3\} = \{1; -1; -2\}, \vec{AC} = \{-2-1; 1-4; 3-3\} = \{-3; -3; 0\},$$

$$\vec{AD} = \{0-1; 1-4; 2-3\} = \{-1; -3; -1\},$$

Тогда объем пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}|.$$

Вычислим объем по указанной формуле:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |3+0-18+6-0+3| = \frac{1}{6} |-6| = 1.$$

2. Так как $\vec{AB} = \{2-1; 3-4; 1-3\} = \{1; -1; -2\}$, то длина ребра будет равна

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

3. Площадь грани ABC вычисляется по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Грань ABC – треугольник, а площадь треугольника можно вычислить как половину площади параллелограмма, а площадь параллелограмма равна длине векторного произведения векторов, на которых построен параллелограмм на основании свойств векторного произведения. Найдем проекции векторов на оси координат:

$$\vec{AB} = \{2-1; 3-4; 1-3\} = \{1; -1; -2\}, \vec{AC} = \{-2-1; 1-4; 3-3\} = \{-3; -3; 0\}.$$

$$\text{Тогда, } S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-6\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{36+36+36} = \frac{6}{2} \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

7. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$

$$A(2;1;0), B(3;-1;2), C(13;3;10), D(0;1;4).$$

Требуется:

- 1) Найти координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ и модули этих векторов.
- 2) Найти угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.
- 3) Найти площадь грани ABC .

4) Найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, получим

$$\overline{AB}(3-2; -1-1; 2-0) \Rightarrow \overline{AB}(1; -2; 2);$$

$$\overline{AC}(13-2; 3-1; 10-0) \Rightarrow \overline{AC}(11; 2; 10);$$

$$\overline{AD}(0-2; 1-1; 4-0) \Rightarrow \overline{AD}(-2; 0; 4).$$

По формуле (2.1) вычислим модули векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3; \quad |\overline{AC}| = \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15;$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

2. Для нахождения косинуса угла между векторами воспользуемся формулой (3.4.), для этого найдем скалярное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}$ по формуле (3.3.).

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot 11 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10 = 27,$$

$$\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{27}{3 \cdot 15} = 0,6.$$

Из таблицы (например, Брадиса) видно, что такое значение косинуса соответствует углу $A = 53^\circ 0,8'$.

3. Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$. Так как модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах сомножителей, найдем векторное произведение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-20-4; 22-10; 2+22\} = \{-24; 12; 24\}.$$

Найдем модуль векторного произведения:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-24)^2 + 12^2 + 24^2} = 36,$$

тогда $S_{\text{пара-мма}} = 36 \text{ кв.ед.}$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \text{ кв.ед.}$

4. Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения. Вычислим смешанное произведение $\overline{AB}(\overline{AC} \times \overline{AD})$.

$$\overline{AB}(\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 144.$$

Следовательно, объем параллелепипеда равен 144 куб.ед., а объем заданной пирамиды $ABCD$ равен:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{\text{парал-д.}} = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24 \text{ куб.ед.}$$

8. Даны векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{b}$. Показать, что векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе, если

$$\overline{a_1}(1; -3; 4); \quad \overline{a_2}(2; 1; 3); \quad \overline{a_3}(3; -2; 1); \quad \overline{b}(7; 0; 7).$$

Решение.

1. Векторы образуют базис, если они линейно независимы. Три вектора в трехмерном пространстве линейно независимы, если определитель, составленный из координат этих векторов не равен нулю.

Составим и вычислим определитель третьего порядка и вычислим его по правилу треугольника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \cdot 3 + 2(-2) \cdot 4 - (4 \cdot 1 \cdot 3 + 3(-2) \cdot 1 + 2(-3) \cdot 1) =$$

$$= 1 - 27 - 16 - 12 + 6 + 6 = -42 \neq 0.$$

Так как определитель $\Delta \neq 0$, то векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ образуют базис.

2. Запишем разложение вектора $\overline{b}$ по этому базису (или представим вектор $\overline{b}$ в виде линейной комбинации векторов базиса):

$$\overline{b} = x_1 \overline{a_1} + x_2 \overline{a_2} + x_3 \overline{a_3} \quad (3.5)$$

где x_1, x_2, x_3 - неизвестные коэффициенты разложения, подлежащие определению.

Запишем векторное уравнение (3.5) в координатной форме:

$$(7; 0; 7) = x_1(1; -3; 4) + x_2(2; 1; 3) + x_3(3; -2; 1). \quad (3.6)$$

От уравнения (3.6) перейдем к системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Для этого используем правило умножения числа на вектор, правило сложения векторов и условие равенства векторов в координатной форме. Имеем

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \end{cases}.$$

Будем решать систему уравнений методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 21 \\ 0 & -5 & -11 & -21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -11 & -21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \right).$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ -6x_3 = -6. \end{cases}$$

Находим $x_3 = 1$; $x_2 = 3 - 1 = 2$; $x_1 = 7 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0$. Окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Найденные значения коэффициентов разложения подставим в равенство (3.5) и получим разложение вектора $\bar{b}$ по базису векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

$$\bar{b} = 0 \cdot \bar{a}_1 + 2 \cdot \bar{a}_2 + 1 \cdot \bar{a}_3, \text{ или } \bar{b} = 2 \cdot \bar{a}_2 + \bar{a}_3.$$

Координаты вектора $\bar{b}$ в новом базисе: $\bar{b}(0; 2; 1)$.

Ответ. $\bar{b}(0; 2; 1)$.

9. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которых соответственно равны 4 и 2, а угол D равен 45° . Найти проекции векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ на ось l , определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.

Ответ: $np_l \overrightarrow{AD} = 2\sqrt{2}$, $np_l \overrightarrow{AB} = -\sqrt{2}$, $np_l \overrightarrow{BC} = \sqrt{2}$, $np_l \overrightarrow{AC} = 0$.

10. Вектор a составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Вычислить его координаты, если $|a| = 2$.

Ответ: $a = (1, -1, \sqrt{2})$ или $a = (1, -1, -\sqrt{2})$.

11. Даны векторы $a = (3, -2, 6)$ и $b = (-2, 1, 0)$. Найти координаты векторов: а) $2a - \frac{1}{3}b$; б) $\frac{1}{3}a - b$; в) $2a + 3b$.

Ответ: а) $\left(\frac{20}{3}, -\frac{13}{3}, 12\right)$; б) $\left(3, -\frac{5}{3}, 2\right)$; в) $(0, -1, 12)$.

12. В некотором базисе векторы заданы координатами: $a = (1, 1, 2)$, $e_1 = (2, 2, -1)$, $e_2 = (0, 4, 8)$, $e_3 = (-1, -1, 3)$. Убедиться, что векторы e_1 , e_2 , e_3 образуют базис и найти в нем координаты вектора a .

Ответ: $a = (1, 0, 1)$.

13. Даны две вершины $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4, -1, 7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

Ответ: $C(6, 1, 19)$, $D(9, -5, 12)$.

14. Векторы a и b взаимно перпендикулярны, причем $|a| = 3$, $|b| = 4$. Вычислить: а) $|a \times b|$; б) $|(a+b) \times (a-b)|$; в) $|(3a-b) \times (a-2b)|$.

Ответ: а) 12; б) 24; в) 60.

15. Дано: $|a| = 10$, $|b| = 2$, $a \cdot b = 12$. Вычислить $|a \times b|$.

Ответ: 16.

16. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = (0, -1, 1)$ и $b = (1, 1, 1)$.

Ответ: 6.

17. Вычислить объем треугольной призмы, построенной на векторах $a = (7, 6, 1)$, $b = (4, 0, 3)$, $c = (3, 6, 4)$.

Ответ: 24.

18. По координатам точек $A(4, 6, 3)$, $B(-5, 2, 6)$ и $C(4, -4, -3)$ найти: а) модуль вектора a ; б) скалярное произведение векторов a и b ; в) проекцию вектора c на вектор d ; г) координаты точки M , делящей отрезок l в отношении 5:4, где $a = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $b = \overrightarrow{AB}$, $c = \overrightarrow{CB}$, $d = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$.

Ответ: а) $\sqrt{4216}$; б) 314; г) $\left(-1, \frac{34}{9}, \frac{14}{3}\right)$.

19. Даны векторы $a = 2i - 3j + k$, $b = j + 4k$, $c = 5i + 2j - 3k$. Необходимо: а) вычислить смешанное произведение векторов a , $3b$, c ; б) найти модуль векторного произведения векторов $3a$, $2c$; в) вычислить скалярное произведение векторов b , $-4c$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы a , c ; д) проверить, будут ли компланарны векторы a , $2b$, $3c$.

Ответ: а) -261; б) $\sqrt{19116}$; в) 40.

20. Даны три вектора $a = 2i - j + 3k$, $b = i - 3j + 2k$, $c = 3i + 2j - 4k$. Найти вектор x , удовлетворяющий следующим условиям: $x \cdot a = -5$, $x \cdot b = -11$, $x \cdot c = 20$.

Ответ: $x = 2i + 3j - 2k$.

Тест для самопроверки

Тема: «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\bar{a} = (3; 4)$ и $\bar{b} = (5; 6)$. Тогда вектор $\bar{a} - \bar{b}$ имеет координаты

а. $(2; 2)$, б. 4, в. $(4; 6)$, д. $(-2; -2)$.

2. Длина вектора $\vec{a} = (1; 2)$ равна

a. 1, b. 2, c. $\sqrt{3}$, d. $\sqrt{5}$

3. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2; 2)$ и $\vec{b} = (3; 4)$ равно

a. 14, b. 11, c. $(3; 8)$, d. $(2; 2; 3; 4)$

4. Даны точки $A(0; -1)$ и $B(3; 1)$. Тогда вектор $\overline{AB}$ имеет координаты

a. $(-2; 1)$, b. $(3; 4)$, c. $(3; 2)$, d. $(2; -1)$

5. Дан вектор $\vec{a} = (2; 0)$. Тогда вектор $2\vec{a}$ имеет координаты

a. $(2; 4)$, b. $(2; 2)$, c. $(4; 0)$, d. $(1; 4)$

6. Площадь треугольника с вершинами в точках $A(3; -4; 1)$, $B(2; 2; 2)$, $C(-5; 2; 3)$ равна

a. $4\sqrt{51}$, b. $\sqrt{51}$, c. $2\sqrt{51}$, d. $3\sqrt{51}$

7. Известно, что $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3$, $|\vec{a}| = 4$, а угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$. Тогда $|\vec{b}|$ равна

a. 0, b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c. $\sqrt{3}$, d. $\frac{1}{2}$, e. 1

8. Определить число β , при котором компланарны векторы $\vec{a} = (2; 3; 4)$, $\vec{b} = (0; \beta; 2)$, $\vec{c} = (3; 4; 0)$.

a. $-\frac{1}{3}$, b. 1, c. $\frac{1}{6}$, d. $\frac{1}{2}$

9. Объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(1; 0; 0)$, $B(3; -1; 4)$, $C(-5; 1; 0)$, $D(1; 3; 2)$ равен

a. $\frac{40}{3}$, b. $\frac{80}{3}$, c. 80, d. 40

10. Даны векторы $\vec{a} = (-2; -3; 2)$, $\vec{b} = (2; 2; -3)$. Тогда $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ равен

a. $-\frac{14}{17}$, b. $\frac{1}{17}$, c. $-\frac{16}{17}$, d. 0

11. Даны точки: $A(-5, 3, -2)$, $B(3, -1, -1)$, $C(-3, 2, -1)$. Найдите $\overline{AB}$.

- a. $-\bar{i} - 4\bar{j} - 3\bar{k}$ b. $-4\bar{i} + 2\bar{j}$ c. $2\bar{k}$
 d. $-2\bar{i} + 4\bar{j} - 4\bar{k}$ e. $8\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$

12. Даны точки A(-5,3,-2), B(3,-1,-1) C(-3,2,-1). Найдите $|\overline{AB}|$

- a. 9, b. 2, c. 4, d. 32, e. 6

13. Даны точки A(-5,3,-2), B(3,-1,-1) C(-3,2,-1). Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

- a. 10, b. $\sqrt{21}$, c. $4\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, d. 21, e. $16\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$

14. Даны точки A(-5,3,-2), B(3,-1,-1) C(-3,2,-1). Найдите $\overline{AB} \times \overline{AC}$

- a. $-3\bar{i} - 6\bar{j}$ b. $2\bar{j} - 2\bar{k}$ c. $-2\bar{j} - 2\bar{k}$
 d. $2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$ e. $-8\bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k}$

15. Даны точки A(-5,3,-2), B(3,-1,-1) C(-3,2,-1). Найдите $\overline{AB} + \overline{AC}$

- a. $-2\bar{j} - 2\bar{k}$ b. $2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ c. $10\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$
 d. $\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ e. $-\bar{j} + 4\bar{k}$

16. Даны векторы $\bar{a} = -3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j}$. Тогда $\bar{a} - 2\bar{b}$

- a. $-\bar{i} - 6\bar{j}$ b. $-\bar{i} + 6\bar{j}$ c. $\bar{i} - 6\bar{j}$
 d. $2\bar{i} - 6\bar{j}$ e. $\bar{i} + 6\bar{j}$

17. Даны векторы $\bar{a} = -3\bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j}$. Для этих векторов вычислите $\bar{a} - 2\bar{b}$

- a. $-\bar{i} - 2\bar{j}$ b. $-\bar{i} + \bar{j}$ c. $\bar{i} - \bar{j}$
 d. $2\bar{i} - \bar{j}$ e. $\bar{i} + 6\bar{j}$

18. Даны векторы $\bar{a} = -4\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$. Для этих векторов вычислите $\bar{a} - 2\bar{b}$

- a. $-6\bar{i} - 3\bar{j}$ b. $-6\bar{i} + 6\bar{j}$ c. $6\bar{i} - 6\bar{j}$
 d. $\bar{i} - 6\bar{j}$ e. $\bar{i} + 6\bar{j}$

19. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} + 8\bar{k}$

- a. 32; b. 76; c. 20; d. 26; e. 25.

20. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$

- a. 16, b. 20, c. 17, d. 18

РАЗДЕЛ III. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия – это раздел математики, в котором с помощью алгебраических методов изучаются геометрические объекты. Основным методом аналитической геометрии является метод координат.

§4. Метод координат на плоскости

Координатами точки на плоскости называются числа, заданием которых определяется положение точки на плоскости. Метод координат позволяет геометрические задачи сводить к алгебраическим. Заслуга введения метода координат принадлежит Р. Декарту и П. Ферма.

4.1 Координаты на прямой

Рассмотрим некоторую прямую. Фиксируем одно из двух определяемых ею направлений и назовем его положительным, другое – отрицательным. Прямая, на которой указано положительное направление, называется осью.

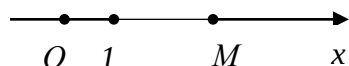
Отрезок, ограниченный точками A и B , называется направленным отрезком или вектором, если указано, какая из данных точек является началом, а какая – концом. Направлением отрезка считается направление от начала к концу. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в

точке B обозначается символом $\overline{AB}$. Две различные точки A и B определяют два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$. Если точки A и B совпадают, отрезок называется нулевым. Нулевой отрезок не имеет определенного направления.

Величиной вектора $\overline{AB}$ некоторой оси называется его длина, взятая со знаком плюс, когда направление этого вектора совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус, когда направление вектора совпадает с отрицательным направлением оси.



Величину вектора $\overline{AB}$ будем обозначать через AB . Очевидно равенство $AB = -BA$.



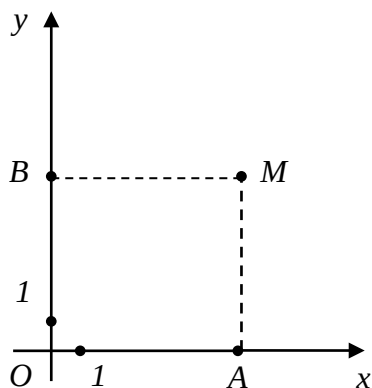
Выберем на прямой x положительное направление и некоторую точку O – начало координат. Кроме того, укажем единицу масштаба.

Прямая Ox , на которой фиксировано положительное направление, начало отсчета и выбран масштаб для измерения длин, называется координатной осью.

Координатой произвольной точки M координатной оси называется величина направленного отрезка $\overline{OM}$ этой оси. Если обозначить координату точки M через x , то по определению $OM = x$, где OM – величина направленного отрезка $\overline{OM}$ оси Ox . Запись $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x .

Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ – две заданные точки оси, то величина направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ и его длина выражаются соответственно формулами $M_1M_2 = x_2 - x_1$, $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$.

4.2 Декартовы прямоугольные координаты на плоскости



Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат.

В данной плоскости проведем две взаимно перпендикулярные координатные оси: горизонтальную Ox (ось абсцисс) и вертикальную Oy (ось ординат). Точку O пересечения координатных осей назовем началом координат. Кроме того, выберем единицу масштаба для измерения расстояний.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на соответствующие оси Ox и Oy .

Декартовыми прямоугольными координатами x и y точки M на плоскости будем называть соответственно величины OA и OB направленных отрезков $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. При выбранной системе координат точке M плоскости соответствует упорядоченная пара чисел (x, y) – ее декартовы прямоугольные координаты, и обратно, каждой упорядоченной паре чисел (x, y) соответствует единственная точка M плоскости Oxy такая, что ее абсцисса равна x , а ордината равна y . Запись $M(x, y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y .

Итак, введение декартовой прямоугольной системы координат на плоскости позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех пар чисел, что дает возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы.

§5. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

5.1 Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Теорема. Для любых двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости расстояние d между ними выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры M_1B и M_2A на оси Oy и Ox соответственно и обозначим через K точку пересечения прямых M_1B и M_2A .

Точки M_1 и K имеют одинаковую ординату y_1 и абсциссы x_1 и x_2 , соответственно. Они лежат на прямой параллельной оси Ox , следовательно, по формуле указанной в пункте 4.1, имеем $|M_1K| = |x_2 - x_1|$. Точки M_2 и K имеют одинаковую абсциссу x_2 и ординаты y_2 и y_1 соответственно. Они лежат на прямой параллельной оси Oy , значит, $|M_2K| = |y_2 - y_1|$.

Треугольник M_1M_2K – прямоугольный, поскольку его стороны M_1K и M_2K лежат на прямых, параллельных осям координат. По теореме Пифагора находим

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{M_1K^2 + M_2K^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Теорема доказана.

Пусть на плоскости задан произвольный отрезок M_1M_2 (точки M_1 и M_2 различны) и M – любая точка этого отрезка, отличная от точки M_2 .

Число λ , определяемое равенством $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, называется

отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 . Очевидно, что $\lambda \geq 0$.

Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том чтобы по

заданному λ и заданным координатам точек M_1 и M_2 , найти координаты точки M . Решить эту задачу позволяет следующая теорема.

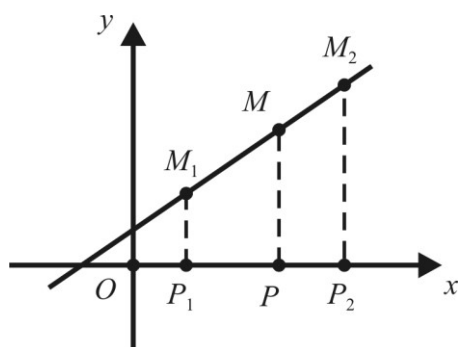
Теорема. Если точка $C(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в заданном отношении λ , то координаты этой точки определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

где (x_1, y_1) - это координаты точки M_1 , (x_2, y_2) - это координаты точки M_2 .

Доказательство. Пусть прямая M_1M_2 не перпендикулярна оси Ox .

Спроектируем точки M_1 , M , M_2 на ось Ox , обозначив их проекции соответственно P_1 , P , P_2 .



На основании обобщенной теоремы Фалеса о пропорциональных отрезках из элементарной геометрии (параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки) имеем $\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$, где

$|P_1P| = |x - x_1|$, $|PP_2| = |x_2 - x|$. Так как числа $(x - x_1)$ и $(x_2 - x)$ одного и того же знака, (при $x_1 < x_2$ они положительны, а при $x_1 > x_2$ - отрицательны), то

$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$. Поэтому $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$, откуда $x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x)$ и $x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$.

Разделив последнее равенство на $(1 + \lambda) \neq 0$, получим формулу $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

Если прямая M_1M_2 перпендикулярна оси Ox , то $x_1 = x_2 = x$ и формула

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ принимает вид $x = \frac{x \cdot (1 + \lambda)}{1 + \lambda}$, то есть получим верное тождество.

Вторая из формул $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ доказывается аналогично (точки M_1 , M и M_2 необходимо предварительно спроектировать на ось Oy).

Теорема доказана.

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Пример. Даны точки $M_1(1,1)$ и $M_2(7, 4)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x, y)$, которая в 2 раза ближе к M_1 , чем к M_2 .

Решение. Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|M_1M|}{2|M_1M|} = \frac{1}{2}$. Применяя формулы деления отрезка в данном отношении, получим

$$x = \frac{1 + 7 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4,5}{1,5} = 3, \quad y = \frac{1 + 4 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{1,5} = 2.$$

Таким образом, точка M имеет координаты $(3, 2)$.

Пример. Найти длину медианы BM в треугольнике ABC с вершинами $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(3,1)$.

Решение. Для того чтобы найти длину медианы BM , нужно знать координаты x и y точки M – середины отрезка AC :

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{2+1}{2} = 1,5.$$

Зная координаты точек $B(4;3)$ и $M(2;1,5)$, найдем $|BM|$:

$$|BM| = \sqrt{(2-4)^2 + (1,5-3)^2} = \sqrt{4+2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5.$$

Таким образом, $|BM| = 2,5$.

5.2 Уравнение линии на плоскости

Выше мы применили метод координат для решения ряда важных, но частных задач. Теперь приступим к систематическому изложению того, как в аналитической геометрии решается общая задача, состоящая в исследовании формы, расположения и свойств данной линии.

Сущность метода координат на плоскости заключается в том, что всякой плоской линии сопоставляется ее уравнение, а затем свойства этой линии изучаются путем аналитического исследования соответствующего уравнения. Рассмотрим соотношение вида

$$F(x, y) = 0,$$

связывающее переменные величины x и y .

Равенство $F(x, y) = 0$ будем называть *уравнением с двумя переменными* x, y , если это равенство справедливо не для всех пар чисел x и y . Примеры уравнений: $2x + 3y = 0$, $x^2 + y^2 - 16 = 0$.

Если равенство $F(x, y) = 0$ справедливо для всех пар чисел x и y , то оно называется *тождеством*. Примеры тождеств: $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$.

Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие *уравнения линии*. Пусть на плоскости заданы декартова прямоугольная система координат и некоторая линия L .

Определение. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением линии L , если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.

Таким образом, для определения того, является ли уравнение $F(x, y) = 0$ уравнением линии L , нужно:

1) показать, что координаты любой точки, лежащей на линии L , удовлетворяют этому уравнению;

2) доказать, что если координаты некоторой точки плоскости удовлетворяют этому уравнению, то точка лежит на линии L .

Из определения следует, что линия L представляет собой множество всех тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.

Приведем некоторые примеры уравнений линий.

1) $x - y = 0$. Записав данное уравнение в виде $y = x$, заключаем, что оно определяет прямую линию – биссектрису I и III координатных углов (координаты любой точки этой прямой удовлетворяют данному уравнению; это следует из свойства биссектрисы – множества точек, равноудаленных от сторон угла).

2) $x^2 - y^2 = 0$. Представив уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 0$, откуда $x - y = 0$ или $x + y = 0$, заключаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, – это две прямые, содержащие биссектрисы четырех координатных углов.

3) $x^2 + y^2 = 0$. Так как при любых x и y выполняются условия $x^2 \geq 0$ и $y^2 \geq 0$, то этому уравнению удовлетворяют координаты только одной точки $(0, 0)$.

4) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ – пустое множество точек, так как при любых x и y выполняется условие $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Таким образом, никакого геометрического образа на плоскости данное уравнение не определяет.

В этих примерах по заданному уравнению линии исследованы ее свойства и тем самым установлено, что представляет собой эта линия.

Рассмотрим теперь обратную задачу: для заданного какими-то свойствами множества точек, то есть для заданной линии L , найти ее уравнение.

Пример. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a, b)$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данной окружности. Тогда $|MC|=R$, то есть $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$ или $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Обратно, если координаты некоторой точки $N(x, y)$ удовлетворяют этому уравнению, то $|NC|=R$ и N лежит на окружности. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. При $a=b=0$ получается уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат.

Пример. Составить уравнение линии, состоящей из точек, равноудаленных от двух данных точек $A(-1, 2)$ и $B(7, 5)$.

Решение. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит данной линии. Тогда по условию должно выполняться $|MA|=|MB|$, то есть

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y-5)^2}.$$

Обратно, если некоторая точка $N(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y-5)^2},$$

то $|NA|=|NB|$ и N принадлежит линии. Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x-7)^2+(y-5)^2,$$

откуда

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=x^2-14x+49+y^2-10y+25,$$

или

$$16x+6y-69=0.$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (из элементарной геометрии известно, что геометрическим местом точек, указанных в условии задачи, будет прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину).

Две основные задачи аналитической геометрии на плоскости состоят в следующем:

- 1) Дана линия, рассматриваемая как множество точек. Составить уравнение этой линии.
- 2) Дано уравнение некоторой линии. Изучить по этому уравнению ее геометрические свойства (форму и расположение).

Алгебраической линией (кривой) n -го порядка называется линия, определяемая алгебраическим уравнением n -й степени относительно текущих декартовых прямоугольных координат.

Линии первого порядка определяются уравнением 1-й степени $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$. Как будет показано ниже, все кривые первого порядка – прямые линии.

Линии второго порядка определяются уравнением 2-й степени:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Важнейшими представителями линий второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Отметим, что не всякое уравнение второго порядка определяет на плоскости некоторую линию. Так, уравнению $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяет никакая кривая на плоскости Oxy .

Уравнение кривой n -го порядка может быть записано в виде

$$\sum_{p,q=0}^n A_{pq} x^p y^q = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A_{pq} \neq 0$.

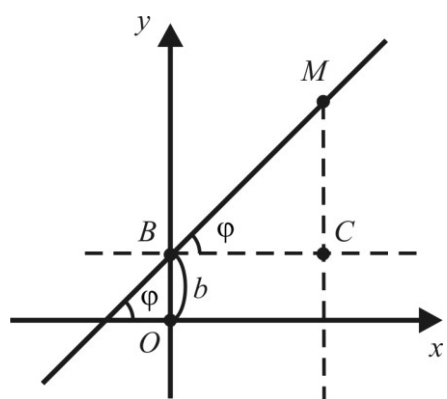
5.3 Линии первого порядка

Прямую линию на плоскости относительно системы декартовых прямоугольных координат можно задать различными способами. Так, прямая может быть однозначным образом определена углом, образуемым

ею с осью Ox , и величиной направленного отрезка, отсекаемого на оси Oy , координатами двух точек и т. п. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнений.

1. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом

Пусть дана некоторая прямая на плоскости Oxy . Углом наклона данной прямой к оси Ox называется наименьший неотрицательный угол φ ,



на который нужно повернуть (против часовой стрелки) ось Ox , чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой. Тангенс угла наклона называется угловым коэффициентом прямой. Пусть известны угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \varphi$ ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$) прямой и величина b отрезка OB , который

она отсекает на оси Oy . Пусть, далее, $M(x, y)$ – произвольная точка прямой. Проведем прямые BC и MC , параллельные осям координат. В случае, когда $k = 0$, образуется прямоугольный треугольник BCM . Имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MC}{BC} = \frac{y - b}{x}, \text{ откуда } y - b = kx, \text{ то есть}$$

$$y = kx + b, \quad (5.1)$$

где k – это угловой коэффициент наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \varphi$), b – величина отрезка отсекаемого прямой на оси Oy .

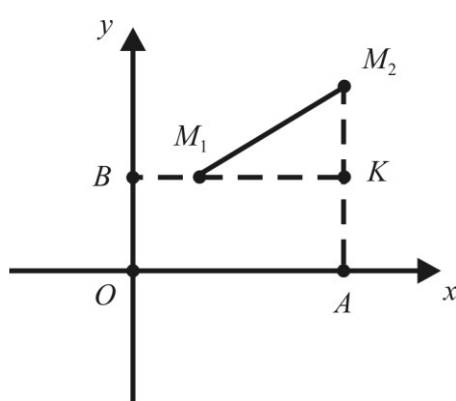
Таким образом, координаты любой точки M прямой удовлетворяют уравнению (5.1). Обратно, если координаты некоторой точки $N(x_1, y_1)$, $x_1 \neq 0$, удовлетворяют уравнению (5.1), то $\frac{y_1 - b}{x_1} = k$ и N принадлежит данной прямой.

Уравнение (5.1) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат. Если $k = 0$, то прямая параллельна Ox и ее уравнение имеет вид $y = b$. В случае, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, прямая перпендикулярна оси Ox и ее уравнение имеет вид $x = a$, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox . В частности, ось Ox определяется уравнением $y = 0$, а ось Oy – уравнением $x = 0$.

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Известно, что через две различные точки можно провести прямую, и притом только одну. Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$.



Так как прямая проходит через точку M_1 , то $y - y_1 = k(x - x_1)$, где k – угловой коэффициент, который требуется определить. Поскольку прямая проходит через точку M_2 , то $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Таким образом, искомое уравнение прямой

имеет вид $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (5.2)$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = y_1$. В этом случае прямая параллельна оси Ox . Если $x_1 = x_2$, то прямая параллельна оси Oy и ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ с данным угловым коэффициентом

Пусть прямая образует угол φ с положительным направлением оси Ox и проходит через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$. Выведем уравнение этой прямой, предполагая сначала, что прямая не перпендикулярна оси Ox .

Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то координаты (x_1, y_1) удовлетворяют уравнению (5.1): $y_1 = kx_1 + b$. Определяя b из этого равенства и подставляя в уравнение (5.1), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Если прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно оси Ox , то есть угловой коэффициент обращается в бесконечность, то ее уравнение, очевидно, будет иметь вид $x = x_1$.

4. Общее уравнение прямой

Теорема. Каждое уравнение 1-й степени вида

$$Ax + By + C = 0, \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (5.4)$$

определяет некоторую прямую в декартовой прямоугольной системе координат Oxy . Обратно, каждая прямая на плоскости в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением 1-й степени вида (5.4).

Доказательство. Если $B \neq 0$, то уравнение (5.4) можно представить в виде

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} \text{ или } y = kx + b, \text{ где } k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}.$$

Но уравнение $y = kx + b$ задает прямую, имеющую угловой коэффициент k и проходящую через точку $B(0, b)$. Если $B = 0$, то в силу условия $A^2 + B^2 \neq 0$ коэффициент $A \neq 0$, поэтому уравнение (5.4) можно привести к виду $x = a$, где $a = -\frac{C}{A}$. В этом случае уравнение определяет прямую, параллельную оси Oy . Следовательно, уравнение (5.4) определяет некоторую прямую на плоскости.

Докажем обратное утверждение, а именно: каждая прямая на плоскости задается уравнением (5.4).

Действительно, если прямая не параллельна оси Oy , то она может быть задана уравнением вида $y = kx + b$ или $kx - y + b = 0$, то есть уравнением 1-й степени вида (5.4), где $A = k$, $B = -1$, $C = b$. Если прямая параллельна оси Oy , то она имеет уравнение вида $x = a$ или $x - a = 0$, то есть уравнение вида (5.4), где $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$.

Доказанная теорема означает, что линии первого порядка – это прямые.

Уравнение (5.4) называется общим уравнением прямой. Оно содержит уравнение любой прямой при соответствующем выборе коэффициентов A , B и C .

Отметим некоторые частные случаи уравнения (5.4), а именно: выясним, к чему приводит равенство нулю некоторых его коэффициентов.

1) $C = 0$, то есть уравнение (5.4) имеет вид $Ax + By = 0$. В данном случае прямая проходит через начало координат.

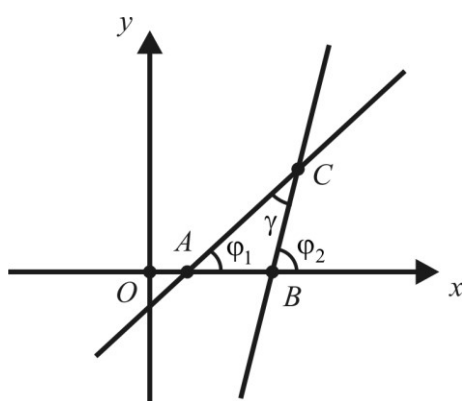
2) $B = 0$, $C \neq 0$, то есть уравнение (5.4) имеет вид $Ax + C = 0$. Это, очевидно, уравнение прямой, параллельной оси Oy и не совпадающей с этой осью (так как $x = -\frac{C}{A}$).

3) $B = 0$, $C = 0$, то есть уравнение (5.4) имеет вид $x = 0$. В данном случае уравнение задает ось Oy .

4) $A = 0$, $C \neq 0$, то есть уравнение (5.4) имеет вид $By + C = 0$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox и не совпадающей с этой осью (так как $y = -\frac{C}{B}$).

5) $A = 0$, $C = 0$, то есть уравнение (5.4) имеет вид $y = 0$. В данном случае уравнение задает ось Ox .

5. Угол между двумя прямыми



Рассмотрим две прямые. Предположим, что ни одна из них не параллельна оси Ox . В этом случае прямые можно задать уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$.

Под углом γ между прямыми будем понимать наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения данных прямых первую из них, чтобы она совпала со второй: $\gamma = \angle ACB$.

Выведем формулу, по которой можно найти угол γ , если даны k_1 и k_2 .

Из элементарной геометрии известно, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных. Поэтому $\varphi_2 = \varphi_1 + \gamma$, или $\varphi_2 - \varphi_1 = \gamma$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}$$

и, окончательно,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (5.5)$$

Замечание. При другой нумерации прямых (замене k_1 и k_2 на k_2 и k_1) правая часть формулы (5.5) меняет знак; в этом случае формула определяет тангенс другого угла $\tilde{\gamma}$ между двумя прямыми, причем $\tilde{\gamma} = \pi - \gamma$. Выведем теперь условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

1) Прямые на плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны между собой (то есть $k_1 = k_2$).

Действительно, если прямые параллельны, то $\varphi_1 = \varphi_2$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ и, значит, $k_1 = k_2$. Обратно, если выполнено равенство $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ и, так как углы заключены в пределах от 0 до π , то $\varphi_1 = \varphi_2$, то есть прямые параллельны.

2) *Прямые на плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то есть $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.*

Действительно, пусть прямые перпендикулярны, то есть $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{1+k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, откуда $1+k_1 k_2 = 0$ и, следовательно, $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Обратно, если $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, то $1+k_1 k_2 = 0$, $\operatorname{ctg} \gamma = 0$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то есть прямые k_1 и k_2 перпендикулярны.

Пусть теперь уравнения прямых заданы в общем виде:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ и } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Отсюда, предполагая, что $B_1 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$, получаем

$$y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1} \text{ и } y = -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2}.$$

Следовательно, $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ и $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Тогда тангенс угла между прямыми определяется формулой

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}} = \frac{B_2 A_1 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Условие *параллельности* прямых выражается равенством

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

а условие их *перпендикулярности* – равенством $\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2}$, или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Пример. Найти угол между прямыми, определяемыми уравнениями $3x - 5y + 15 = 0$ и $8x - 2y - 1 = 0$.

Решение. Согласно условию задачи имеем $A_1 = 3, B_1 = -5, A_2 = 8, B_2 = -2$, откуда $\operatorname{tg} \gamma = \frac{B_2 A_1 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{-2 \cdot 3 - 8 \cdot (-5)}{3 \cdot 8 + (-5) \cdot (-2)} = \frac{34}{34} = 1$.

Следовательно, угол между прямыми $\gamma = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Пример. Через точку $C(-6, 3)$ провести прямую, перпендикулярную прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение заданной прямой в виде $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

Значит, угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -\frac{2}{3}$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Следовательно, угловой коэффициент искомой прямой равен $k_2 = \frac{3}{2}$.

Уравнение искомой прямой находим по формуле

$$y - y_c = k_2(x - x_c),$$

где (x_c, y_c) – координаты точки C . Получаем:

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x - (-6)), \text{ или } 3x - 2y + 24 = 0.$$

Ответ. $3x - 2y + 24 = 0$.

6. Уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ определяется по формуле:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (5.6)$$

5.4 Линии второго порядка

Определение. Линией второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты x и y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

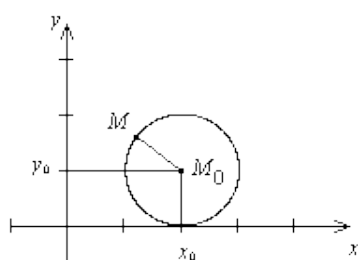
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (5.7)$$

где A, B, C, D, E, F - это действительные числа, такие что $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Уравнение (5.7) называется *общим уравнением линии второго порядка*. Оно определяет на плоскости xOy , в зависимости от значений коэффициентов A, B, C , одну из кривых второго порядка:

- 1) Если $AC - B^2 > 0$, то уравнение определяет эллипс;
- 2) Если $AC - B^2 > 0, A = C$, то уравнение определяет окружность;
- 3) Если $AC - B^2 < 0$, то уравнение определяет гиперболу;
- 4) Если $AC - B^2 = 0$, то уравнение определяет параболу.

Окружность

Определение. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности.



и радиусом r имеет вид:

Окружность радиуса R с центром в точке

$M_0(x_0; y_0)$ имеет уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (5.8)$$

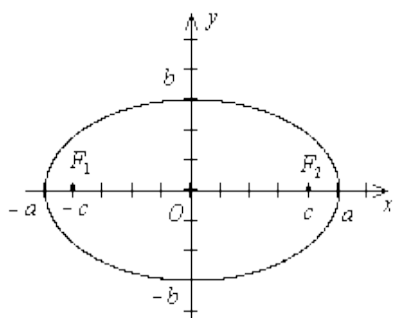
Уравнение окружности с центром в т. $O(0;0)$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Эллипс

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина

постоянная. Фокусы эллипса обозначаются буквами $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, расстояние между ними $|F_1F_2|$ через $2c$.



Каноническое (простейшее) уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.9)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, то есть $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a > b$.

Если эллипс задан каноническим уравнением, то его *осями симметрии* служат оси Ox и Oy , а начало координат - *центр симметрии*.

Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются *вершинами* эллипса. Центр симметрии - *центром* эллипса. Отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы, называется *большой осью* эллипса и обозначается $2a$, половина его длины - *большой полуосью* эллипса и обозначается a . Отрезок между вершинами на оси симметрии, не содержащей фокусов, называется *малой осью* эллипса и обозначается $2b$, половина его длины - *малой полуосью* и обозначается b .

Величина c , являющаяся половиной расстояния между фокусами, определяется из формулы:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$, ($0 < \varepsilon < 1$) называется *эксцентриситетом* эллипса.

Эксцентриситет ε эллипса характеризует степень вытянутости эллипса. Чем ближе эксцентриситет к нулю, тем больше эллипс похож на окружность. Чем ближе эксцентриситет к 1, тем сильнее вытянут эллипс.

Если центром эллипса является точка $M_0(x_0, y_0)$, то каноническое уравнение будет иметь вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Пример. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

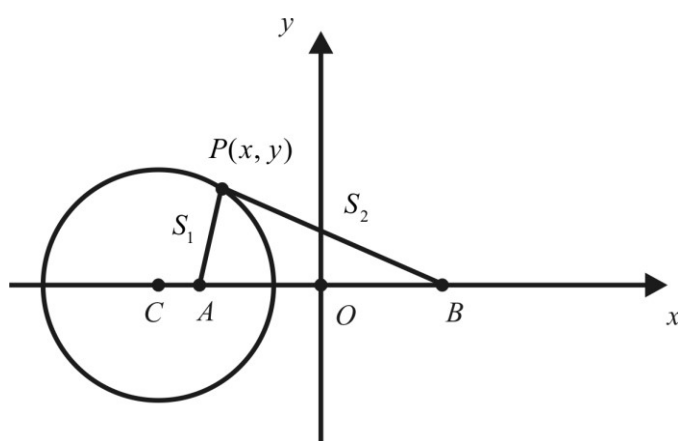
Решение. Разделим обе части уравнения на 225:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Используя формулу (5.9), находим $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,
 $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Пример. Два нефтеперерабатывающих завода A и B , расстояние между которыми 400 км, отпускают нефтепродукты по одинаковой цене. Транспортные расходы на 1 км из A в три раза больше, чем из B . Определить границу района, в котором более выгодно поставлять нефтепродукты из A .

Решение. Выберем декартову прямоугольную систему координат, поместив начало координат в середине отрезка AB и направив оси координат по лучу AB и перпендикуляру к нему.



Определим геометрическое место точек, в которых транспортные расходы на приобретение нефтепродуктов заводов A и B будут одинаковыми. Пусть

потребитель находится в точке $P(x, y)$. Обозначим расстояния $|AP| = S_1$ км, $|BP| = S_2$ км.

Предположим, что транспортные расходы на 1 км из B составляют p денежных единиц. Тогда транспортные расходы на 1 км из A составят $3p$ денежных единиц. Общие транспортные расходы из A равны $3S_1p$

денежных единиц, из $B - S_2 p$ денежных единиц. Так как расходы потребителя должны быть одинаковы, то $3S_1 p = S_2 p$, или $3S_1 = S_2$.

Поскольку начало координат находится в середине отрезка AB , а расстояние между A и B составляет 400 км, то $A(-200, 0)$, $B(200, 0)$. По формуле расстояния между двумя точками находим

$$S_1 = \sqrt{(x+200)^2 + y^2} \text{ и } S_2 = \sqrt{(x-200)^2 + y^2}.$$

Тогда условие $3S_1 = S_2$ перепишется в виде

$$3 \cdot \sqrt{(x+200)^2 + y^2} = \sqrt{(x-200)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат и приведем подобные члены:

$$9((x+200)^2 + y^2) = (x-200)^2 + y^2,$$

$$9(x^2 + 400x + 40000 + y^2) = x^2 - 400x + 40000 + y^2,$$

$$8x^2 + 4000x + 8y^2 + 320000 = 0,$$

$$x^2 + 500x + y^2 + 40000 = 0.$$

Далее, выделяя полный квадрат в левой части, получим:

$$(x+250)^2 + y^2 - 62500 + 40000 = 0,$$

или

$$(x+250)^2 + y^2 = 150^2.$$

Последнее уравнение является уравнением окружности с центром в точке $C(-250, 0)$ и радиуса $R=150$. Для потребителей, находящихся на этой окружности, $3S_1 = S_2$ и, следовательно, расходы на приобретение нефтепродуктов заводов A и B одинаковы. Для потребителей, находящихся внутри ограниченного этой окружностью круга, $3S_1 < S_2$ и, следовательно, более выгодно поставлять нефтепродукты из A .

Ответ. Для потребителей, находящихся на окружности $(x+250)^2 + y^2 = 150^2$ более выгодно поставлять нефтепродукты из A .

Гипербола

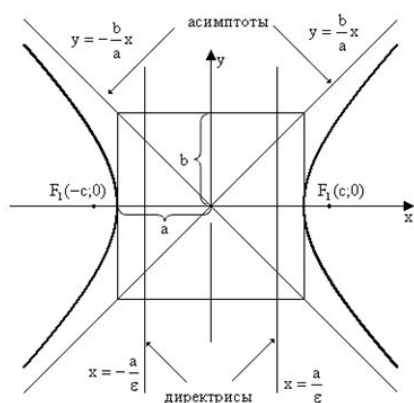
Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.10)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, то есть $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Уравнение гиперболы с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*.

Точки пересечения гиперболы с осью Ox , заданной каноническим уравнением, называются *вершинами* гиперболы, отрезок между ними называется *действительной осью* гиперболы.

Отрезок оси ординат между точками $(0;-b)$ и $(0;b)$ называется *мнимой осью*.

Числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы. Начало координат называется ее *центром*.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$, ($\varepsilon > 1$) называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Пример. Напишите уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$ и имеющей центр в точке $A(-1,-2)$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 63:

$$\frac{7x^2}{63} - \frac{9y^2}{63} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

Используя формулу (5.10), находим: $a=3$, $b=\sqrt{7}$, $c=\sqrt{9+7}=4$, $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$. Таким образом, необходимо найти уравнение окружности, проходящей через точку $F_1(-4,0)$ и имеющей центр в точке A . Найдем радиус этой окружности: $|AF_1| = \sqrt{(-4+1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}$. Следовательно, уравнение искомой окружности по формуле (5.8) имеет вид $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$.

Ответ. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$.

Пример. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 1$ и прямой $2x + y - 8 = 0$.

Решение. Переписывая уравнение гиперболы в виде (5.10), получаем

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1.$$

откуда находим $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$. Значит, асимптоты данной гиперболы имеют

вид $y = \frac{2}{3}x$ и $y = -\frac{2}{3}x$. Очевидно, что они пересекаются в точке $O(0,0)$.

Найдем точки пересечения асимптот гиперболы с прямой $2x + y - 8 = 0$. Для этого решим две системы уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ 2x + y - 8 = 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является точка $A(3,2)$, а второй – точка $B(6,-4)$.

Если точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ являются вершинами треугольника, то его площадь можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} \cdot |(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)|.$$

Тогда, площадь треугольника OAB будет равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot |(3-0)(-4-0) - (6-0)(2-0)| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12.$$

Ответ. $S = 12$.

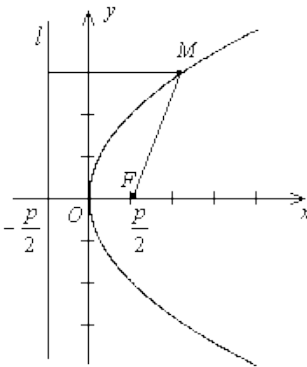
Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой директрисой параболы

Каноническое уравнение параболы с вершиной в т. $O(0,0)$ имеет вид:

$$y^2 = 2Px, \quad (5.11)$$

где p - параметр параболы.



Точка пересечения оси симметрии с параболой называется *вершиной* параболы, и находится в начале координат.

Парабола (5.11) симметрична относительно оси Ox , имеет фокус $F(p/2; 0)$ и директрису $x = -p/2$.

Парабола $x^2 = 2Py$ симметрична относительно оси Oy .

Если вершиной параболы является точка $M_0(x_0, y_0)$, то каноническое уравнение будет иметь вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ или } (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (5.12)$$

Пример. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 12x$. Определить расстояние от точки $M(3, 6)$ до фокуса.

Решение. Сравнивая вид уравнения $y^2 = 12x$ с (5.11), находим p :

$p = 6$, тогда $\frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Следовательно, уравнение директрисы $x = -3$, фокус

$F(3, 0)$. Поскольку точка $M(3, 6)$ лежит на параболе, то

$$r = x + \frac{p}{2} = 3 + 3 = 6.$$

Ответ. $F(3, 0)$, $x = -3$, $r = 6$.

Пример. Составить уравнение параболы, зная, что она симметрична относительно оси Oy , проходит через точку $N(6, 3)$ и начало координат.

Решение. Искомое уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py$. Подставляя сюда координаты точки N , получаем $6^2 = 2 \cdot 3 \cdot p$, откуда $p = 6$ и $x^2 = 2 \cdot 6 \cdot y = 12y$.

Ответ. $x^2 = 12y$.

Теорема. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат задано общее уравнение линии второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс;
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - пустое множество (мнимый эллипс);
- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ - точка $(0, 0)$;
- 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола;
- 5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пара пересекающихся прямых;
- 6) $x^2 = 2py$ - парабола;
- 7) $x^2 - a^2 = 0$ - пара параллельных прямых;
- 8) $x^2 + a^2 = 0$ - пустое множество (пара мнимых параллельных прямых);
- 9) $x^2 = 0$ - пара совпадающих прямых (ось ординат).

Таким образом, любая линия второго порядка является эллипсом, гиперболой, параболой, парой пересекающихся прямых, парой параллельных прямых, прямой, точкой или пустым множеством.

Пример. Выяснить, какую линию определяет уравнение

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$$

в прямоугольной системе координат Oxy .

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 4y + 4) - 36 + 4 = 0,$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Полученное уравнение имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, следовательно, оно определяет эллипс с центром в точке $(1;2)$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение кривой $y = 2x^2 + 8x + 12$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$y = 2(x^2 + 4x + 6) = 2(x^2 + 4x + 4 + 2) = 2(x^2 + 4x + 4) + 4 = 2(x+2)^2 + 4,$$

$$\text{то есть } y = 2(x+2)^2 + 4, \text{ или } y-4 = 2(x+2)^2.$$

Мы получили уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy с центром в точке $(-2;4)$.

Упражнения

1. Даны координаты вершин треугольника ABC

$$A(4;3), \quad B(16;-6), \quad C(20;16).$$

Найти: 1) длину стороны AB ; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) угол B в радианах с точностью до двух знаков;

4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD ; 6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB .

Решение.

1. Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Подставляя координаты точек A и B , находим длину стороны AB :

$$AB = \sqrt{(16 - 4)^2 + (-6 - 3)^2} = \sqrt{144 + 81} = 15.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, вычисляется по формуле (4.2):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя в (5.2) координаты точек A и B , получим уравнение стороны AB :

$$\frac{y - 3}{-6 - 3} = \frac{x - 4}{16 - 4}; \quad \frac{y - 3}{-9} = \frac{x - 4}{12}; \quad \frac{y - 3}{-3} = \frac{x - 4}{4};$$

$$4y - 12 = -3x + 12;$$

$$\underline{3x + 4y - 24 = 0 \text{ (AB)}}.$$

Решив последнее уравнение относительно y , находим уравнение стороны AB в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$4y = -3x + 24; \quad y = -\frac{3}{4}x + 6,$$

откуда $k_{AB} = -\frac{3}{4}.$

Подставив в (5.2) координаты точек B и C , получим уравнение прямой BC :

$$\frac{y + 6}{16 + 6} = \frac{x - 16}{20 - 16}; \quad \frac{y + 6}{22} = \frac{x - 16}{4}; \quad \frac{y + 6}{11} = \frac{x - 16}{2};$$

$$\underline{11x - 2y - 188 = 0 \quad (BC),}$$

$$y = 5,5x - 94,$$

откуда $k_{BC} = 5,5$.

3. Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2 вычисляется по формуле (4.5):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Искомый угол B образован прямыми AB и BC , угловые коэффициенты которых найдены: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $k_{BC} = 5,5$. Применяя (4.5), получим

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{3}{4} - 5,5}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 5,5} = \frac{-25}{4 - 16,5} = 2;$$

$$\underline{B = 63^\circ 26' \text{ или } B \approx 1,11 \text{ рад.}}$$

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид (5.3):

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Высота CD перпендикулярна стороне AB . Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD , воспользуемся условием перпендикулярности прямых. Так как, $k_{BC} = -\frac{3}{4}$, то $k_{CD} = \frac{4}{3}$. Подставив в (5.3) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим:

$$y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20); \quad 3y - 48 = 4x - 80;$$

$$\underline{4x - 3y - 32 = 0 \quad (CD).}$$

Чтобы найти длину высоты CD , определим сперва координаты точки D - точки пересечения прямых AB и CD . Решая совместно систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0 \\ 4x - 3y - 32 = 0 \end{cases},$$

находим $x=8, y=0$, то есть $D(8;0)$.

Находим длину высоты CD :

$$CD = \sqrt{(20-8)^2 + (16-0)^2} = 20.$$

5. Чтобы найти уравнение медианы AE , определим координаты точки E , которая является серединой стороны BC , применяя формулы деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } x_E = \frac{16+20}{2} = 18; \quad y_E = \frac{-6+16}{2} = 5; \quad E(18;5).$$

Подставив в (5.2) координаты точек A и E , находим уравнение медианы:

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-4}{18-4}; \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x-4}{14};$$

$$\underline{x - 7y + 17 = 0 (AE)}.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты CD и медианы AE , решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 32 = 0 \\ x - 7y + 17 = 0. \end{cases}$$

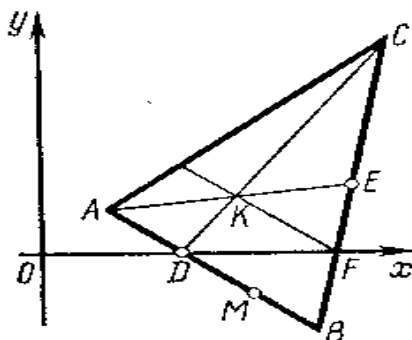
Получим, $x=11, y=4$; $K(11;4)$.

6. Так как искомая прямая параллельна стороне AB , то ее угловой коэффициент будет равен угловому коэффициенту прямой AB . Подставив в (5.3) координаты найденной точки K и угловой коэффициент $k = -\frac{3}{4}$ получим:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 11); \quad 4y - 16 = -3x + 33;$$

$$\underline{3x + 4y - 49 = 0 (KF)}.$$

Треугольник ABC , высота CD , медиана AE , прямая KF построены в системе координат xOy на рис.



2. По уравнению кривой второго порядка определить тип кривой, привести уравнение кривой к каноническому виду. Изобразить данную линию на чертеже, охарактеризовав ее.

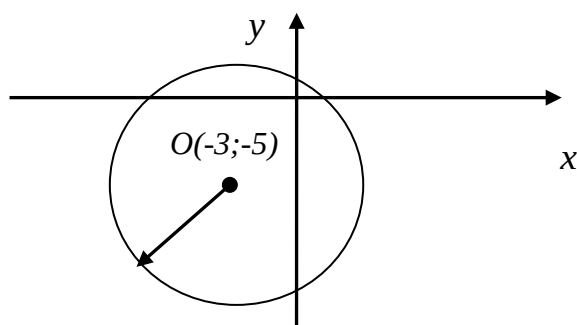
а) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$,

б) $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$.

Решение.

а) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$.

Преобразуем данное уравнение, для этого выделим полный квадрат:



$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} + \underbrace{y^2 + 10y + 25}_{(y+5)^2} - 15 - 9 - 25 = 0;$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 - 49 = 0 \text{ или}$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 49.$$

Получим уравнение окружности с центром в

точке $(-3; -5)$, радиусом 7.

б) $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$.

Найдем каноническое уравнение кривой, для этого сделаем преобразования:

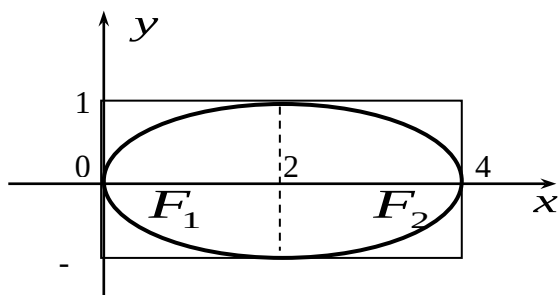
$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 4y^2 = 0,$$

$$(x-2)^2 + 4y^2 = 4.$$

Окончательно, $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$.

Полученное уравнение есть каноническое уравнение эллипса, где $a=2$;
 $b=1$;

центр эллипса в точке $(2,0)$.



Найдем фокусы, для этого вычислим параметр c : $c^2 = a^2 - b^2$; $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Тогда $F_1(2-\sqrt{3};0)$; $F_2(2+\sqrt{3};0)$,

и эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Найти расстояние между точками:

а) $A(-3;-5)$ и $B(2;7)$; б) $A(2;7)$ и $B(6;4)$; в) $A(12;0)$ и $B(0;-5)$; г) $A(-4;0)$ и $B(0;3)$; д) $A(-2;-7)$ и $B(3;-2)$; е) $O(0;0)$ и $A(-8;6)$.

Ответ. а) 13; б) 5; в) 13; г) 5; д) $5\sqrt{2}$; е) 10.

4. На оси абсцисс найти точку, находящуюся на расстоянии $d=10$ от точки $A(2;6)$.

Ответ. $B_1(-6;0)$ и $B_2(10;0)$.

5. Найти длины сторон треугольника с вершинами $A(3;2)$, $B(-1;-1)$ и $C(11;-6)$.

Ответ. 5; 13 и $8\sqrt{2}$.

6. Определить, какие из точек $A(2;0)$, $B(7;4)$ и $C(3;2)$ лежат на линии $y = \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$.

Ответ. A и B лежат, C не лежит.

7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;b)$ и имеющей угловой коэффициент k :

а) $M(0;2)$, $k=1$; б) $M(0;0)$, $k=-1$; в) $M(0;-3)$, $k=0$; г) $M(0;1)$, $k=\frac{1}{2}$.

Ответ. а) $y=x+2$; б) $y=-x$; в) $y=-3$; г) $y=\frac{1}{2}x+1$.

8. Постройте прямые:

а) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$; б) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$; в) $-\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$; г) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$.

9. Под каким углом пересекаются прямые:

а) $x - 2y - 2 = 0$ и $y = \frac{1}{2}x + 3$;

б) $3x + y - 2 = 0$ и $x - 3y + 1 = 0$.

Ответ. а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$.

10. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и параллельно прямой $y = 2x + 5$.

Ответ. $2x - y - 1 = 0$.

11. Параллельны ли прямые:

а) $2x + 3y - 7 = 0$ и $2x + 3y + 9 = 0$;

б) $y = 2x + 3$ и $4y - 8x = 1$;

в) $3x - 5y = 0$ и $6x + 10y + 5 = 0$?

Ответ. а) Параллельны; б) параллельны; в) не параллельны.

12. Перпендикулярны ли прямые:

а) $3x - y - 3 = 0$ и $x + 3y - 17 = 0$;

б) $2x + 5y - 6 = 0$ и $5x + 2y - 3 = 0$.

Ответ. а) Перпендикулярны; б) не перпендикулярны.

13. Найти точку пересечения прямой $4x - 3y - 10 = 0$: а) с осью Ox ; б) с осью Oy .

Ответ. а) $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$; б) $\left(0; -\frac{10}{3}\right)$.

14. Найти точку пересечения двух прямых:

а) $3x - 2y - 4 = 0$ и $x + 3y - 5 = 0$;

б) $7x - 9y + 15 = 0$ и $19x + 12y - 20 = 0$.

Ответ. а) $(2; 1)$; б) $\left(0; \frac{5}{3}\right)$.

15. Определить координаты вершин треугольника, если даны уравнения его сторон $2x + 4y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$ и $3x + 4y - 12 = 0$.

Ответ. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(13; -\frac{27}{4}\right); \left(\frac{4}{7}; \frac{18}{7}\right)$.

16. Через точку пересечения прямых $2x - y - 3 = 0$ и $x - 3y - 4 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $x + y = 1$. Написать уравнение проведенной прямой.

Ответ. $y + x = 0$.

17. Через точку пересечения прямых $x + 2y + 2 = 0$ и $3x + 4y + 9 = 0$ проведен перпендикуляр к прямой $2x + 3y - 6 = 0$. Написать уравнение этого перпендикуляра.

Ответ. $3x - 2y + 18 = 0$.

18. Написать уравнение окружности с радиусом $R = 5$ и с центром $A(-4; 3)$.

Ответ. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

19. Постройте окружности:

а) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$; б) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$; в) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

20. Дана окружность $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$. Лежат ли на ней точки $A(3; -1)$, $B(3; -9)$ и $C(0; -3)$.

Ответ. A и B лежат, C не лежит.

21. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат, с центром в точке $A(1; 0)$.

Ответ. $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

22. Найти уравнение окружности, у которой центр в точке $(4; 2)$ и проходящей через точку $(3; -2)$.

Ответ. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 17$.

23. Написать каноническое уравнение эллипса, если даны его

полуоси $a = 3$ и $b = 4$.

Ответ. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

24. Дан эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти его полуоси и расстояние между фокусами.

Ответ. $a = 5$, $b = 3$, $2c = 8$.

25. Дан эллипс $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. Найти длины осей, координаты вершин фокусов, эксцентриситет.

Ответ. $2a = 26$, $2b = 24$, $A_1(-13;0)$, $A_2(13;0)$, $B_1(0;-12)$, $B_2(0;12)$, $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, $\varepsilon = \frac{5}{13}$.

26. Найти координаты фокусов гиперболы $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Ответ. $F_1(-13;0)$, $F_2(13;0)$.

27. Написать уравнение гиперболы, если ее фокусы находятся в точках $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ и длина вещественной оси равна 6.

Ответ. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

28. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(2;1)$, асимптоты которой $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Ответ. $9x^2 - 16y^2 = 20$.

29. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная, что координаты ее фокуса равны: а) $F(3;0)$; б) $F(0;-5)$.

Ответ. а) $y^2 = 12x$; б) $x^2 = -20y$.

30. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, для которой директрисой служит прямая: а) $x = -2$; б) $x = 3$.

Ответ. а) $y^2 = 8x$; б) $y^2 = -12x$.

31. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A(4; -2)$.

Ответ. $y^2 = x$.

Тест для самоконтроля

Тема: «Элементы аналитической геометрии на плоскости»

1. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле

a. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

b. $d = \sqrt{(y_2 - x_1)^2 + (x_2 - y_1)^2}$

c. $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

2. Если точка $C(x; y)$ делит отрезок в отношении λ , то координаты этой точки находятся по формулам

a. $x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

b. $x_c = \frac{y_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_c = \frac{x_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

c. $x_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, y_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом имеет вид

a. $y - y_0 = k(x - x_0)$, b. $y + y_0 = k(x - x_0)$, c. $y - y_0 = \frac{1}{k}(x + x_0)$

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид

a. $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, b. $\frac{y + y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 + x_1}$, c. $\frac{y - y_1}{y_2 + y_1} = \frac{x + x_1}{x_2 - x_1}$

5. Условие параллельности двух прямых

а. $k_1 = k_2$, б. $\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2}$, с. $k_1 = -k_2$

6. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

а. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, б. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, с. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$

7. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

а. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, б. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, с. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$

8. Условие перпендикулярности двух прямых

а. $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, б. $k_2 = \frac{1}{k_1}$, с. $k_2 = k_1$

9. Расстояние между точками $A(-1;1)$ и $B(k;4)$ равно 5 при k равном...

а. 4, б. -1, с. 15, д. 3

10. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, то длина ее действительной полуоси равна

а. 25, б. 2, с. 4, д. 5

11. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, то длина ее мнимой полуоси равна

а. 25, б. 2, с. 4, д. 5

12. Уравнение вида $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ задает ...

а. Параболу, б. Гиперболу, с. Эллипс, д. Окружность

13. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

а. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, б. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, с. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$

14. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;3)$, $B(-3;-3)$

а. $-6x + 7y + 3 = 0$

б. $6x - 7y - 2 = 0$

с. $-6x - 7y + 3 = 0$

d. $6x+7y+3=0$

e. $6x-7y+3=0$

15. Даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда расстояние между ними равно

a. $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

b. $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)$

c. $\sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}$

d. $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

e. $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

16. Найдите точку пересечения плоскости $5x-2y+4z+15=0$ с осью OX .

a. $(-3,0,0)$, b. $(4,0,0)$, c. $(2,0,0)$, d. $(5,0,0)$, e. $(15,0,0)$

17. Найдите точку пересечения плоскости $5x-2y+4z+12=0$ с осью OY .

a. $(0,6,0)$, b. $(0,4,0)$, c. $(0,2,0)$, d. $(0,-5,0)$, e. $(0,12,0)$

18. Найдите точку пересечения плоскости $5x-2y+4z+12=0$ с осью OZ .

a. $(0,0,-3)$, b. $(0,0,4)$, c. $(0,0,2)$, d. $(0,0,-5)$, e. $(0,0,12)$

19. Две прямые на плоскости xOy , заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, перпендикулярны если...

a. $k_1k_2=-1$, b. $k_1=k_2$, c. $b_1=b_2$, d. $k_1k_2=1$, e. $b_1b_2=-1$

20. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;1;-1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$.

a. $x-2y+3z+3=0$

b. $x+4y+7z+16=0$

c. $x+y+z-3=0$

d. $x-2y+2z-3=0$

e. $3x+6y+2z-15=0$

РАЗДЕЛ IV. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математический анализ – это математическая дисциплина, которая изучает множества и отображения, задаваемые в них (функции) с помощью пределов. Современный математический анализ включает в себя следующие разделы: введение в математический анализ, теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения и т.д.

При изложении материала в этом разделе математики часто используются употребляются специальные символы, позволяющие сократить запись и точнее выразить утверждение.

Математические символы: $+$, $-$, $\times$, $<$, $\perp$, $\parallel$, $\cup$, $\cap$, $\in$, ...

Например, применяя символ « $>$ » к числам a , b , получим запись « $a > b$ », которая является сокращением для предложения: «число a больше числа b ». Если l_1 , l_2 – обозначения прямых, то запись $l_1 \parallel l_2$ есть утверждение, что l_1 параллельна l_2 . Запись « $x \in M$ » означает, что x является элементом множества M .

Наряду с математической символикой в математике широко используется логическая символика, применяемая к **высказываниям** и **предикатам**.

Под **высказыванием** понимается предложение, которое либо только истинно, либо только ложно. Например, высказывание « $-3 > 0$ » ложно, а высказывание « $2 \times 2 = 4$ » истинное. Будем высказывания обозначать

большими латинскими буквами, возможно с индексами. Например, $A = \langle -3 > 0 \rangle$, $B = \langle 2 \times 2 = 4 \rangle$.

Предикат – это предложение с одной переменной или несколькими переменными. Например, предложение: «число x больше числа 0» (в символах $x > 0$) является предикатом от одной переменной x , а предложение: « $a + b = c$ » – предикат от трех переменных a, b, c .

Предикат при конкретных значениях переменных становится высказыванием, принимая истинное и ложное значение.

Будем обозначать предикаты как функции: $Q(x) = \langle x > 0 \rangle$, $F(x, b, c) = \langle x + b = c \rangle$.

Логические символы: $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

1. **Отрицание** применяется к одному высказыванию или предикату, соответствует частице «не» и обозначается $\overline{A}$ (или $\neg A$).

Например, формула $\overline{-3 > 0}$ есть сокращение для предложения: « -3 не больше 0» («неверно, что -3 больше 0»).

2. **Конъюнкция** применяется к двум высказываниям или предикатам, соответствует союзу «и», обозначается: $A \& B$ (или $A \wedge B$).

Так формула $(-3 > 0) \& (2 \times 2 = 4)$ означает предложение « $-3 > 0$ и $2 \times 2 = 4$ », которое, очевидно, ложно.

3. **Дизъюнкция** применяется к двум высказываниям или предикатам, соответствует союзу «или» (неразделительному) и обозначается $A \vee B$.

Предложение: «число x принадлежит множеству M_1 или множеству M_2 » изображается формулой: $x \in M_1 \vee x \in M_2$.

4. **Импликация** соответствует союзу «если ..., то ...» и обозначается: $A \rightarrow B$.

Так, запись « $a > -1 \rightarrow a > 0$ » есть сокращение для предложения «если $a > -1$, то $a > 0$ ».

5. **Эквиваленция** $A \leftrightarrow B$ соответствует предложению: « A тогда и только тогда, когда B ».

Символы $\forall, \exists$ называются **кванторами общности и существования**, соответственно применяются к предикатам (а не к высказываниям). Квантор $\forall$ читается, как «любой», «каждый», «все», или с предлогом «для»: «для любого», «для всех» и т.д. Квантор $\exists$ читается: «существует», «найдется» и др.

6. **Квантор общности** применяется к предикату $F(x, \dots)$, содержащему одну переменную (например, x) или несколько переменных, при этом получается формула $\forall x F(x, \dots)$, которая соответствует предложению: «для любого x выполняется $F(x, \dots)$ » или «все x обладают свойством $F(x, \dots)$ ».

Например: $\forall x (x > 0)$ есть сокращение для фразы: «любое x больше 0», которая является ложным высказыванием. Предложение: $\forall a (a > 0 \rightarrow a > -1)$ является истинным высказыванием.

7. **Квантор существования**, примененный к предикату $F(x, \dots)$ соответствует предложению «существует x , такой, что $F(x, \dots)$ » («найдется x , для которого $F(x, \dots)$ ») и обозначается: $\exists x F(x, \dots)$.

Например, истинное высказывание «существует действительное число, квадрат которого равен 2» записывается формулой $\exists x (x \in R \ \& \ x^2 = 2)$. Здесь квантор существования применен к предикату: $F(x) = (x \in R \ \& \ x^2 = 2)$ (напомним, что множество всех действительных чисел обозначается через R).

Если квантор применяется к предикату с одной переменной, то получается высказывание, истинное или ложное. Если квантор применяется к предикату с двумя или большим числом переменных, то получается предикат, в котором переменных на одну меньше. Так, если предикат $F(x, y)$ содержит две переменные, то в предикате $\forall x F(x, y)$ одна переменная y (переменная x является «связанной», вместо нее нельзя

подставлять значения x). К предикату $\forall x F(x, y)$ можно применить квантор общности или существования по переменной y , тогда полученная формула $\exists y \forall x F(x, y)$ или $\forall y \forall x F(x, y)$ является высказыванием.

Так, предикат « $|\sin x| < a$ » содержит две переменные x, a . Предикат $\forall x (|\sin x| < a)$ зависит от одной переменной a , при $a = 1/2$ этот предикат обращается в ложное высказывание $\forall x (|\sin x| < 1/2)$, при $a = 2$ получаем истинное высказывание $\forall x (|\sin x| < 2)$.

Если к предикату $\forall x (|\sin x| < a)$ применить квантор существования, то получим формулу: $\exists a \forall x (|\sin x| < a)$, выражающую истинное высказывание: «функция $\sin x$ является ограниченной».

Для некоторых формул введем сокращенную запись.

Так, вместо формулы $\exists x (x \in R \ \& \ x^2 = 2)$ будем писать: $\exists x \in R (x^2 = 2)$, вместо $\exists x (x > 0 \ \& \ x^2 + 3 = 4)$ пишем: $\exists x > 0 (x^2 + 3 = 4)$.

Формулу $\forall x (x \in R \rightarrow x^2 \geq 0)$ сократим так: $\forall x \in R (x^2 \geq 0)$ и т.д.

Будем называть $\forall x \in R, \exists x > 0$ и т.д. **ограниченными кванторами**.

Несколько кванторов общности (существования) заменяем на один: вместо $\forall x \forall y (P(x, y))$ пишем $\forall x, y (P(x, y))$, вместо $\exists x_1 \in M \exists x_2 \in M (Q(x_1, x_2))$ будем писать $\exists x_1, x_2 \in M (Q(x_1, x_2))$.

§6. Постоянные и переменные величины. Понятие функции с одной и двумя переменными

6.1 Постоянные и переменные величины

При изучении природных и технических процессов, человек постоянно сталкивается с величинами. Величина - это есть то, что можно измерить числом. Выделяют величины постоянные и переменные.

Определение. Постоянной величиной называется такая величина, которая не изменяет своего числового значения в рассматриваемом процессе.

Например, в году 12 месяцев; температура кипения воды при нормальных условиях; скорость тела, движущегося равномерно или прямолинейно и т.д.

Постоянные величины в свою очередь делятся на абсолютно постоянные и параметры. Абсолютно постоянные – те, которые не изменяют своего числового значения в любом рассматриваемом процессе. Например, сумма внутренних углов треугольника равна 180^0 или $\pi = \frac{c}{2r} = 3,14$ и др.

Рассмотрим уравнение вида $y = kx + b$. Пусть $y = x + 5$, здесь $k = 1$, $b = 5$, если $y = 2x - 8$, то $k = 2$, $b = -8$. Постоянные k и b называются параметрами.

Определение. Переменными величинами называются такие величины, которые изменяют свое числовое значение в рассматриваемом процессе.

Например, скорость тела при неравномерном движении является величиной переменной.

Постоянные величины принято обозначать первыми малыми буквами латинского алфавита $a, b, c, d, \dots$, а переменные величины последними буквами латинского алфавита $x, y, z, t, \dots$

6.2 Понятие множества

Определение. Множеством называют объединение каких-либо предметов, обладающих общим признаком.

Все множества состоят из элементов. Как правило, множества обозначают большими буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \dots$, а их элементы, малыми буквами латинского алфавита $x, y, z, \dots$.

Множество X , состоящее из элементов x , принято обозначать следующим образом $X = \{x\}$.

Пример. а) X – множество, состоящее из четырех имен, то есть $X = \{\text{Мария, Петр, Василий, Николай}\}$. Тогда имя Иван не будет принадлежать данному множеству, то есть $\text{Иван} \notin X$.

б) $Z = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $3 \notin Z$

6.3 Функция с одной переменной

Определение. Пусть даны два числовые множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$. Если каждому значению переменной $x \in X$ соответствует по некоторому закону (правилу) вполне определенное значение $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **функция с одной переменной** $y = f(x)$, где x – независимая переменная (аргумент) а y – зависимая переменная (функция).

Пример. Пусть $y = x^2 - 2x + 3$. Тогда, при $x = 1$, $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$; при $x = 0$, $y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$. То есть, определенному значению x , соответствует единственное значение y . Следовательно $y = x^2 - 2x + 3$ - есть функция одной переменной x .

Определение. Совокупность всех значений аргумента x , для которых функция $y = f(x)$ определена (имеет смысл), называется областью определения этой функции.

Чтобы найти область определения функции нужно найти последнюю операцию в этой функции, и записать условие, при котором эта операция выполнима.

Пример. Дана функция $y = \sqrt{4 - x^2}$. Требуется найти область определения этой функции.

Решение. Эта функция будет иметь смысл, если подкоренное выражение будет неотрицательным, то есть когда $4 - x^2 \geq 0$. Решим данное неравенство.

$$-x^2 \geq -4, \text{ или } x^2 \leq 4, \text{ или } |x| \leq 2, \\ -2 \leq x \leq 2.$$

Ответ. $x \in [-2; 2]$.

Совокупность всех значений, принимаемых переменной y , называется областью значения функции.

6.4 Способы задания функции

Аналитический способ. При аналитическом способе задания, функция задается формулой либо в явном, либо в неявном виде.

При явном способе задания, функция выражается через аргумент, например, $y = 2x^3 + 6x - 7$.

При неявном задании, функция через аргумент не выражается, например,

$$xy - \frac{1}{\cos(xy)} = 5 \ln y.$$

Табличный способ состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей, в первой строке значения аргумента x и во второй – соответствующие значения функции $f(x)$.

x	x_1	x_2		x_n
$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$		$f_n(x)$

Примерами табличного задания функции являются таблицы тригонометрических функций, логарифмов и т.п. табличный способ

задания широко используется в различных экспериментах и наблюдениях. Таблицы просты в обращении, для нахождения значения функции не нужно производить вычислений. Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

Графический способ. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости xOy , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$.

Говорят, что функция задана графически, если на плоскости имеется ее график. Преимуществом графического способа задания функции по сравнению с аналитическим и табличным, является его наглядность.

6.5 Основные свойства функции

Четность и нечетность функции.

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого значения аргумента x , из области определения функции, $f(-x) = f(x)$, и **нечетной**, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция называется функцией **общего вида** (не четной и ни нечетной).

Пример. Выяснить, является функция четной или нечетной:

а) $f(x) = x^2$.

Так как $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, то данная функция является четной функцией.

б) $f(x) = x^3 - x^5$.

Так как $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) = -f(x)$, то есть выполняется условие нечетности функции, то данная функция нечетная.

Монотонность функции.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** (**убывающей**) на промежутке X , если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$. Тогда функция возрастает на промежутке X , если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает, если $f(x_2) < f(x_1)$.

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными функциями**.

Ограниченность.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке X , если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любых $x \in X$. В противном случае функция называется **неограниченной**.

Пример. Функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой отрезком $[-1, 1]$, так как $|\sin x| \leq 1$ для любого x из области определения.

Периодичность.

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$.

Пример. Функция $y = \cos x$ имеет период $T=2\pi$, так как для любого значения x выполняется условие $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

6.6 Сложная функция

В математике встречаются функции разных видов. Выделяют функции элементарные и сложные.

Основными элементарными функциями называются следующие функции: степенная (x^n), показательная (a^x , где $a \neq 1$, $x > 0$), логарифмическая ($\log_a x$, где $x > 0$, $a \neq 1$), тригонометрические ($\sin x$, $\cos x$, tgx , $ctgx$), обратные тригонометрические ($\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$). Приведем пример не элементарной функции.

Пример. $y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 0 \\ x+1, & \text{если } x > 0 \end{cases}.$

Эта функция не является элементарной, так как она задана в промежутке $(-\infty; 0]$ одной формулой, а в промежутке $(0; +\infty)$ – другой, то есть функция определена разными формулами на различных промежутках изменения аргумента x .

Определение. Функция называется сложной, если ее аргумент есть в свою очередь функция от другой переменной.

Пусть переменная y зависит от переменной u , которая в свою очередь зависит от переменной x , то есть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда, при изменении x , будет изменяться u , а следовательно и y . Значит, y является функцией, зависящей от переменной x : $y = f[\varphi(x)]$.

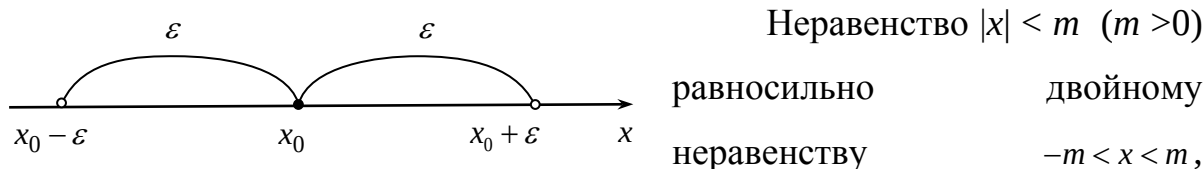
Пример. Пусть $y = \sin u$, где $u = \lg x$. Тогда $y = \sin(\lg x)$ – сложная функция, зависящая от переменной x .

Пусть $y = f(x)$ с областью определения A и множеством значений B такова, что для любого значения $y \in B$ существует единственное значение $x \in A$, такое, что $f(x) = y$, тогда переменная x является функцией от y , обозначим $x = \varphi(y)$. Эту функцию называют **обратной** для $y = f(x)$. Для обратной функции $x = \varphi(y)$ область определения B , а множество значений A . Иногда функцию, обратную к функции $y = f(x)$, обозначают: $x = f^{-1}(y)$.

Например, для функции $y = x^2$ с областью определения $(-\infty; +\infty)$ и таким же множеством значений обратной является функция: $x = \sqrt{y}$.

В дальнейшем часто будет использоваться понятие **абсолютной величины числа**, а также понятие ε – **окрестности точки**.

Абсолютной величиной числа a называется неотрицательное число, обозначаемое $|a|$, такое, что $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}.$



неравенство $|x - x_0| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) равносильно $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. Множеством точек с таким свойством является интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и называется ε – **окрестностью точки** x_0 .

§ 7. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1 Предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые величины и их свойства

Рассмотрим одно из центральных понятий математического анализа – **понятие предела функции**. Ввиду сложности для понимания этого понятия сначала дадим его описательное определение, подкрепленное примерами, а затем строгое определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве всех действительных чисел R или на бесконечном интервале $(a; +\infty)$.

Число b называют **пределом функции** $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ ($x \rightarrow +\infty$), если значения $f(x)$ приближаются к числу b как угодно близко при достаточно больших x .

Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Пример. Функция $y = \frac{2x+1}{x}$ определена на интервале $(0, +\infty)$.

Составим таблицу ее некоторых значений и построим ее график:

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	5	10	20
y	4	3	$2\frac{2}{3}$	2,5	2,2	2,1	2,05

Из таблицы видно, что значения функции приближаются к числу 2 с увеличением x .

Убедимся, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} = 2$.

Разность $f(x) - 2 = \frac{2x+1}{x} - 2 = \frac{1}{x}$

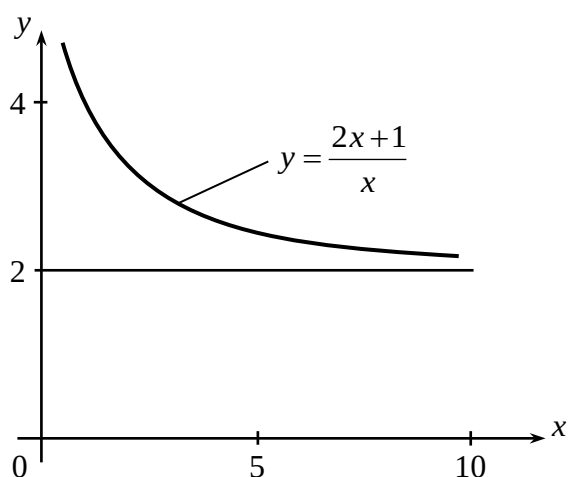
показывает, на сколько отличается $f(x)$ от 2. Так, если x равно 10, то $f(x)$ отличается от 2 на $1/10$, а если $x = 100$,

то $f(x) - 2 = \frac{1}{100}$. Разность $f(x) - 2$ может

стать меньше любого заданного

положительного числа ε , если x взять достаточно большим. Например, $\varepsilon = 1/1000$. Чтобы определить, для каких значений x выполняется

неравенство $f(x) - 2 < 1/1000$, надо решить это неравенство: $\frac{1}{x} < \frac{1}{1000}$, отсюда $x > 1000$.



Пусть ε – произвольное (малое) положительное число, тогда найдется такое x_0 , что $f(x) - 2 < \varepsilon$ для всех $x > x_0$. Действительно, $f(x) - 2 = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} < \varepsilon$, $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Обозначив $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, получаем, что для всех x , если $x > x_0$, то

$f(x) - 2 < \varepsilon$. Итак мы показали, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$.

Пример. Функция $y = \frac{x-1}{2+x}$ определена на $(-2, +\infty)$. Выпишем таблицу ее некоторых значений и построим график.

x	0	1	2	3	10	98	998
y	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{97}{100}$	$\frac{997}{1000}$

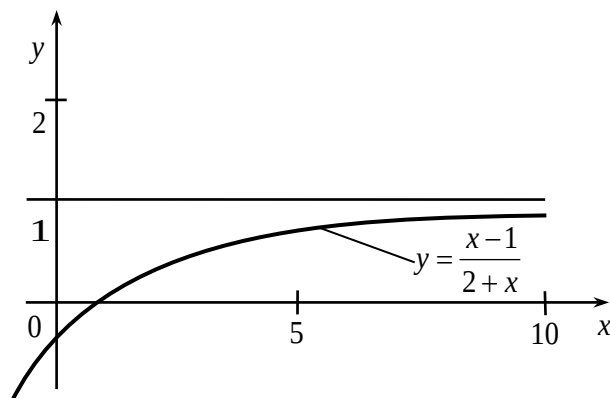
Из таблицы значений и графика видим, что с ростом x значения $f(x)$ приближаются к 1, оставаясь меньше 1.

Покажем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2+x} = 1$. Разность $f(x) - 1$ отрицательна, поэтому вычислим ее абсолютную величину:

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{x-1}{2+x} - 1 \right| = \left| \frac{x-1-2-x}{2+x} \right| = \left| -\frac{3}{2+x} \right| = \frac{3}{2+x}.$$

Покажем, что $|f(x) - 1|$ может стать меньше любого заданного положительного числа ε при достаточно больших x . Для этого решим неравенство $\frac{3}{2+x} < \varepsilon$, получим: $2+x > \frac{3}{\varepsilon}$, и $x > \frac{3}{\varepsilon} - 2$. Обозначим:

$x_0 = \frac{3}{\varepsilon} - 2$. Таким образом, если $x > x_0$, то $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Например, возьмем в качестве ε число 0,01, тогда:



$$x_0 = \frac{3}{0,01} - 2 = 300 - 2 = 298,$$

$x_0 = 298$. Если $x > 298$, то

$$\left| \frac{x-1}{2+x} - 1 \right| < 0,01.$$

Этим мы показали, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2+x} = 1$.

Дадим строгое определение предела функции при $x \rightarrow +\infty$.

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$, если для любого положительного числа ε найдется такое число x_0 , что для всех x , больших x_0 , выполняется неравенство:

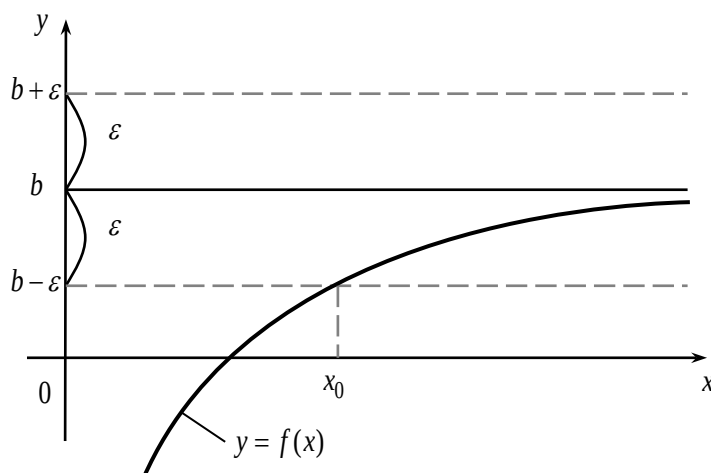
$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

В логических символах это определение выглядит так:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ означает } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \quad \forall x > x_0 \quad (|f(x) - b| < \varepsilon).$$

Пример. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad x \in (0; +\infty)$.

Доказательство.



$$f(x) = \frac{1}{x}. \quad \text{Зафиксируем}$$

произвольное $\varepsilon > 0$, покажем, что найдется такое x_0 , что для всех x , больших x_0 : $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Действительно,

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{x} < \varepsilon, \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Обозначим: $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, тогда при $x > x_0$: $|f(x) - 0| < \varepsilon$, значит, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Пусть для некоторой функции $y = f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, геометрически

это означает, что точки графика $y = f(x)$ приближаются к точкам прямой $y = b$ (с той же абсциссой) при неограниченном возрастании x . В этом случае говорят, что прямая $y = b$ является **асимптотой** графика $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству: $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Из определения предела следует, что по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0 , что для всех x , больших x_0 , график $y = f(x)$ заключен внутри полосы, ограниченной прямыми: $y = b + \varepsilon$, $y = b - \varepsilon$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором числовом множестве $X = \{x\}$ и точка a является предельной точкой для множества X , то есть в любой малой окрестности точки a содержатся значения $x \in X$, отличные от a . Точка a может принадлежать множеству X , или не

принадлежать ему, следовательно, функция $y = f(x)$ либо определена в точке a , либо не определена.

Определение. Функция $f(x)$ имеет предел A (конечный или бесконечный), при стремлении x к a (или в точке a), если для любой, стремящейся к a последовательности значений аргумента $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, входящих в область определения функции, но отличных от a , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$, всегда стремится к A .

Этот факт символически записывается в виде

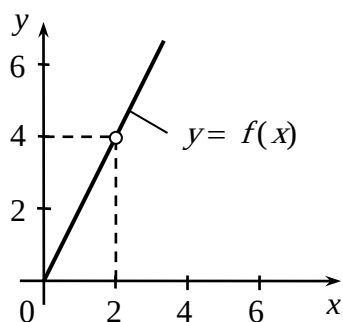
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ или } f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a.$$

Пример. Функция $y = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$ определена во всех точках числовой оси, за исключением $x_0 = 2$. Найдем $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, для этого вычислим значения $f(x)$ для значений аргумента x , близких к 2, и построим график: $y = f(x)$.

Заметим, что для $x \neq 2$: $\frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = 2x$.

x	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4
y	3,2	3,4	3,6	3,8	4,2	4,4	4,6	4,8

График функции: $y = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$ совпадает с прямой: $y = 2x$ для всех $x \neq 2$. Из таблицы и графика видим, что значения $f(x)$ тем меньше отличаются от числа 4, чем ближе значения аргумента x подходят к 2.



Покажем, что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = 4$. Для этого убедимся, что $|f(x) - 4|$ может стать настолько малым, насколько пожелаем: $|f(x) - 4| = \left| \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} - 4 \right| = |2x - 4|$, так как $x \neq 2$.

Потребуем, чтобы $|f(x) - 4| < \frac{1}{10}$, тогда из неравенства: $|2x - 4| < \frac{1}{10}$ получаем $|x - 2| < \frac{1}{20}$. То есть при значениях x , удовлетворяющих неравенству: $2 - \frac{1}{20} < x < 2 + \frac{1}{20}$, выполняется неравенство $|f(x) - 4| < \frac{1}{10}$.

Аналогично можно показать, что $|f(x) - 4| < \frac{1}{100}$, если $2 - \frac{1}{200} < x < 2 + \frac{1}{200}$ и, вообще, для любого (малого) положительного числа ε имеем $|f(x) - 4| < \varepsilon$, если $2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$ (или, что то же самое, $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$). Обозначим $\frac{\varepsilon}{2} = \delta$. Итак, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = 4$.

Дадим строгое определение предела функции в точке.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к a (или в точке a), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что $\forall x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Рассмотрим бесконечно большие и бесконечно малые функции.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то есть если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$, такое что $\forall x > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. Эта функция является бесконечно малой, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Доказательство: выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем число N , такое что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$, так

как $\alpha(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Что и требовалось доказать.

Свойства бесконечно малых функций

1. Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ - бесконечно малые функции, то их сумма $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ - есть функция бесконечно малая функция.
2. Произведение ограниченной при $x \rightarrow a$ функции на бесконечно малую, есть функция бесконечно малая.
3. Произведение постоянной на бесконечно малую функцию, есть функция бесконечно малая.
4. Произведение двух бесконечно малых функций, есть функция бесконечно малая.

Определение. Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε , найдётся такой номер N , зависящий от ε , что для всех $x > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\beta(x)| > \varepsilon$.

Свойства бесконечно больших функций

1. Если $\beta(x)$ - бесконечно большая функция, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - функция бесконечно малая.
2. Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция не обращается в нуль, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая.
3. Если $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - бесконечно большая функции, то их сумма $\beta(x) + \gamma(x)$ - есть функция бесконечно большая.
4. Если $\beta(x)$ - бесконечно большая функция и $\gamma(x)$ - ограничена, то $\beta(x) + \gamma(x)$ - есть функция бесконечно большая.
5. Произведение двух бесконечно больших функций, есть функция бесконечно большая.

7.2 Теоремы о пределах

Теорема 1. Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в

виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция.

Теорема 2. Предел постоянной величины равен самой этой постоянной, то есть $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

Теорема 3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$, то при $x \rightarrow a$ имеют пределы также их сумма $f_1(x) + f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и, при условии $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$, частное $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причём

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}.$$

Теорема 4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, где $c = const$.

Теорема 5. Если для функций $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Следствие. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, то будет справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n.$$

Теоремы о пределах позволяют находить пределы функций, определяемых алгебраическими действиями над переменной, предел

которой задан. В простейших случаях достаточно в выражение функции вместо переменной x подставить её предельное значение.

Пример. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$.

Решение. Используя приведенные теоремы, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2} = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{1^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 0$.

Теоремы о пределах позволяют находить пределы функций, определяемых алгебраическими действиями над переменной, предел которой задан. В простейших случаях достаточно в выражение функции вместо переменной x подставить её предельное значение. Проверим правильность этого способа на примере.

Пример.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2) + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 1 = 2 \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 1} x \right]^2 + 1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$\text{или } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 + 1} = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 1}{1^3 + 1} = -\frac{3}{2}.$$

7.3 Способы раскрытия неопределённостей

Иногда, при вычислении пределов, получают выражения

$$\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right], (0 \cdot \infty), (1^\infty), (\infty - \infty), (0^0), (\infty^0),$$

по которым нельзя судить о том, существуют или нет искомые пределы. Такие выражения называют неопределёнными (или неопределённостями). В этих случаях решают вопрос о раскрытии неопределённостей. Рассмотрим несколько случаев.

1. Если непосредственная подстановка в дробную функцию предельного значения обращает числитель и знаменатель дроби в нуль, то получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, это значит, что предельное значение в выражение функции можно подставлять только после предварительного сокращения данной дроби.

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 + 14 \cdot 2 - 32}{2^2 - 6 \cdot 2 + 8} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Получили неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, сократим данную дробь, предварительно разложив числитель и знаменатель дроби на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ - это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант. Получим:

$$x^2 + 14x - 32 = (x - 2)(x + 16) \text{ и } x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4).$$

Тогда исходный предел перепишем в виде:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (x + 16)}{(x - 2) \cdot (x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 16)}{(x - 4)} = \frac{2 + 16}{2 - 4} = -9.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = -9$.

2. Рассмотрим предел дроби, в знаменателе (числителе) которой содержится иррациональная функция. Если, при непосредственной подстановке в такую дробь предельного значения, числитель и знаменатель обращаются в нуль, то для того чтобы раскрыть полученную неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, нужно числитель и знаменатель данной дроби умножить на выражение сопряжённое знаменателю (числителю).

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{\sqrt{1+8}-3}{1-1} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Помножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю (избавляемся от иррациональности в числителе). В данном примере выражением, сопряжённым знаменателю $\sqrt{x+8}-3$, является выражение вида $\sqrt{x+8}+3$. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3) \cdot (\sqrt{x+8}+3)}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 3^2}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+8-9}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{(\sqrt{1+8}+3)} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{1}{6}$.

Замечание: Если делимое при $x \rightarrow a$, конечно (равно $c = \text{const}$), а делитель стремится к нулю, то предел частного бесконечен, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{0} = \infty.$$

3. Рассмотрим частное двух функций $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$, числитель дроби $f(x) \rightarrow \infty$ и знаменатель дроби $\varphi(x) \rightarrow \infty$, то имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Пусть в числителе и знаменателе некоторые многочлены. Тогда для раскрытия неопределённости необходимо каждое слагаемое числителя и знаменателя разделить на x в наивысшей степени из числа слагаемых числителя и знаменателя, а затем перейти к пределу.

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, необходимо под знаком предела числитель и знаменатель дроби разделить на переменную x с наивысшим показателем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{-x^2} + \cancel{x} + \cancel{1}}{\cancel{2x^2} + \cancel{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{3}{\infty}} = \frac{-1 + 0 + 0}{2 + 0} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x} = -\frac{1}{2}.$

Также при раскрытии неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ можно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремиться к бесконечности) равен пределу отношения их старших членов, то есть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^k} = \begin{cases} 0, & (n < k) \\ \frac{a_0}{b_0}, & (n = k) \\ \infty, & (n > k) \end{cases}.$$

7.4 Первый и второй замечательные пределы

Рассмотрим предел вида $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$. Этот предел называют *первым замечательным пределом* и используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0} \right)$ различных функций, содержащих тригонометрические выражения и степени x .

Следствия: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

Пример. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. Подставим в выражение функции вместо x предельное значение, получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$. Для избавления от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, помножим числитель и знаменатель дроби на «3» и получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x}$.

Используя теоремы о пределах и первый замечательный предел, получаем:

$$3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$.

Рассмотрим предел функции $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$. Если, при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), функция $f(x) \rightarrow 1$, а функция $\varphi(x) \rightarrow \infty$, то говорят, что имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Для раскрытия этой неопределённости пользуются *вторым замечательным пределом*, который имеет вид

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ где } e \approx 2,7.$$

Пример. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$.

Решение. В данном случае, при подстановке предельного значения, получим неопределенность вида $[1^\infty]$. Для ее раскрытия сделаем замену $y = \frac{x}{2}$. Тогда $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{2y} = \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)^2 = e^2.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = e^2.$

Следствия: При вычислении пределов полезно иметь в виду следующие равенства:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln x}.$$

Замечание. Неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ можно выражать одну через другую. Неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ сводятся к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ следующим образом:

1) $\left[0 = \frac{1}{\infty}, \quad \infty = \frac{1}{0} \right]$, следовательно $[0 \cdot \infty] = \left[\frac{1}{\infty} \cdot \infty \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ или $[0 \cdot \infty] = \left[0 \cdot \frac{1}{0} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$.

2) $[\infty - \infty] = \ln e^{\infty - \infty} = \ln \frac{e^\infty}{e^\infty} \sim \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

3) $[\infty^0] = e^{\ln \infty^0} = e^{0 \cdot \ln \infty} \sim [0 \cdot \infty]$.

4) $[0^0] = e^{\ln 0^0} = e^{0 \cdot \ln 0} \sim [0 \cdot \infty]$.

5) $[1^\infty] = e^{\ln 1^\infty} = e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$.

7.5 Сравнение бесконечно малых функций.

Рассмотрим отношение двух бесконечно малых функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow a$. Выделим три случая:

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0.$

В этом случае говорят, что $\alpha_1(x)$ - б/м более высокого порядка малости, чем $\alpha_2(x)$.

Пример. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{x-2} = \frac{(2-2)^3}{2-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = (2-2)^2 = 0,$

следовательно, при $x \rightarrow 2$, функция $(x-2)^3$ - б/м более высокого порядка малости, чем $x-2$.

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A.$

В этом случае функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются бесконечно малыми одного и того же порядка малости.

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{x^2} = 5$, следовательно, при $x \rightarrow 0$, функции $5x^2$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка.

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty.$

В этом случае говорят, что $\alpha_1(x)$ - б/м более низкого порядка малости, чем $\alpha_2(x)$ (или $\alpha_2(x)$ - б/м более высокого порядка малости, чем $\alpha_1(x)$).

Пример. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x-1) \cdot (x+1)^2} = \infty$, следовательно, при $x \rightarrow -1$, функция $(x+1)$ - б/м более низкого порядка малости, чем $(x-1) \cdot (x+1)^2$.

Определение. Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ - бесконечно малые одного и того же порядка, причём $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то они называются эквивалентными бесконечно малыми. Символически это записывается следующим образом: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Теорема. Если существует предел отношения двух бесконечно малых α и β , то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых.

Доказательство. Действительно, если $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ и существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta}$, то перейдя к пределу в равенстве $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta}$, причем,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Теорема доказана.

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left[\begin{matrix} \sin 5x \sim 5x \\ \tan 3x \sim 3x \end{matrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$

Таблица эквивалентности

1. $P_n(x) \sim a_n \cdot x^n, x \rightarrow \infty$

2. $\begin{cases} \sin x \sim x \\ \tan x \sim x \\ 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \end{cases}, x \rightarrow 0$

3. $\begin{cases} \arcsin x \sim x \\ \arctan x \sim x \end{cases}, x \rightarrow 0$

4. $\begin{cases} e^x - 1 \sim x \\ a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \end{cases}, x \rightarrow 0$

5. $\begin{cases} \ln(x+1) \sim x \\ \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \end{cases}, x \rightarrow 0.$

Пример.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - 1}{nx} = \frac{e^0 - 1}{0} = \left(\frac{0}{0} \right) = [e^{mx} - 1 \sim mx] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 4}{5x^3 - 6x + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left[\begin{matrix} 2x^2 + 5x + 4 \sim 2x^2 \\ 5x^3 - 6x + 2 \sim 5x^3 \end{matrix} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{5x} = \frac{2}{\infty} = 0.$

7.6 Непрерывность функции. Точки разрыва

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 ,

если она удовлетворяет следующим трём требованиям:

- 1) Определена в некоторой окрестности точки x_0 ;
- 2) Имеет конечный предел функции при $x \rightarrow x_0$;
- 3) Предел функции при $x \rightarrow x_0$ равен значению функции в точке x_0 ,

то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример. Функция $f(x) = x^3$ определена на R .

Покажем, что $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 2$. Для этого проверим три условия определения:

- 1) $f(2) = 2^3 = 8$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 8$.

Так как все три условия выполнены, то функция $f(x) = x^3$ непрерывна в точке $x_0 = 2$.

Определение. Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 *слева (справа)*, называется предел, вычисляемый в предположение, что $x \rightarrow x_0$, оставаясь всегда меньше (больше) значения x_0 . Пределы справа и слева называются односторонними пределами и обозначаются следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ (для левостороннего),}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ (для правостороннего).}$$

Пример. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$.

Покажем, что $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$:

- 1) $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 - 0} 2x = 0$ (левосторонний предел),
 $\lim_{x \rightarrow 0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \sin x = 0$ (правосторонний предел).

$$3) \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0) = 0.$$

Так как все три условия выполнены, то функция $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$

непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0 , то говорят, что в этой точке функция $f(x)$ разрывна, а точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

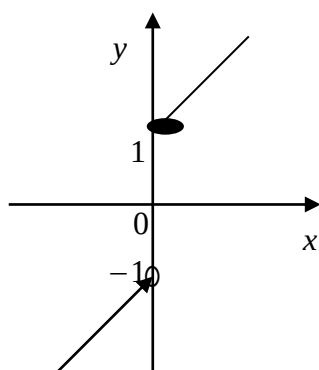
Пример 3. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x_0 = 0$, но определена в любой окрестности этой точки, поэтому $x_0 = 0$ является точкой разрыва для $f(x)$.

Различают три вида точек разрыва.

Определение. Точкой разрыва первого рода называют точку, в которой существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при $x \rightarrow x_0$, не равные друг другу, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Пример. Исследовать непрерывность функции $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 0 \\ x-1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Проверим все условия определения непрерывной функции.



1) Найдем значение функции в $x_0 = 0$, получим, $y(0) = 0 + 1 = 1$. Следовательно, первое условие выполнено.

2) Предел данной функции не существует, так как функция определена разными формулами на различных промежутках изменения переменной x . Но здесь существуют односторонние пределы функции

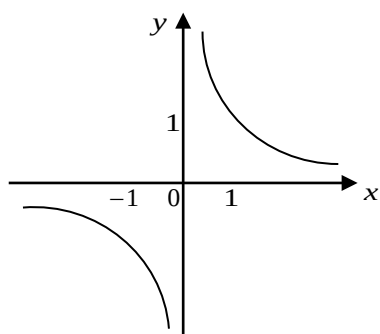
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x-1) = 0-1 = -1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0+0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x+1) = 0+1 = 1.$$

Так как второе условие не выполняется, но существуют односторонние пределы функции при $x_0 \rightarrow 0$, не равные между собой, то точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода.

Определение. Точкой разрыва второго рода называют точку, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции слева и справа при $x \rightarrow x_0$ бесконечен или не существует.

Пример. Исследовать непрерывность функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Проверим все условия определения непрерывной функции.



1) В точке $x_0 = 0$ функция $y = \frac{1}{x}$ не существует, следовательно, первое условие определения непрерывности функции не выполняется. Таким образом, в этой точке она не является непрерывной.

Найдём односторонние пределы функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

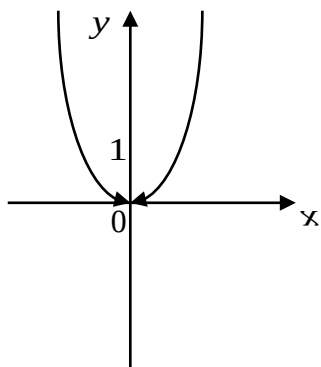
Так как оба односторонние предела функции при $x_0 \rightarrow 0$ равны бесконечности, то точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода.

Определение. Точкой устранимого разрыва называют точку, в которой существует конечный предел функции, но он не равен значению функции в этой точке.

Пример. Исследовать непрерывность функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

Решение. Так как при переходе через точку $x = 0$ функция задана разными формулами, то эта точка может являться точкой разрыва

данной функции. Проверим все условия определения непрерывности функции в точке $x = 0$.



$$1) y(0) = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0;$$

$$3) y(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} y(x).$$

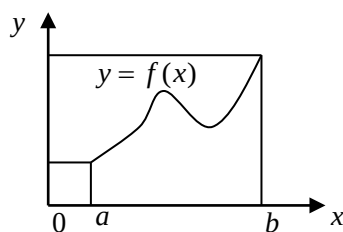
Так как предел функции в точке $x = 0$ существует, но он не равен значению функции в этой точке, то точка $x = 0$ - точка устранимого разрыва.

Определение. Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

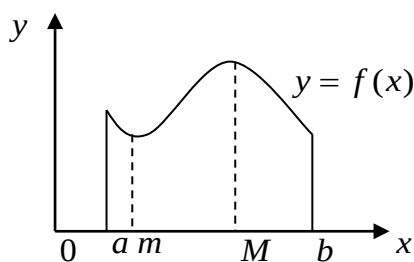
Замечание. Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

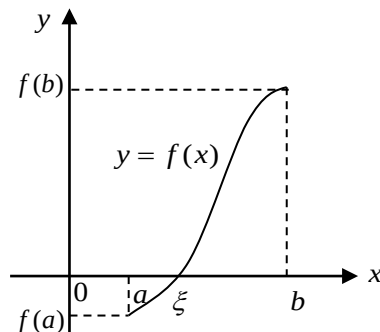
1°. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.



2°. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M (теорема Вейерштрасса).



3°. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и значения её на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдётся точка $\xi \in [a; b]$, такая, что $f(\xi) = 0$



Упражнения

1. Вычислить пределы следующих функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + x - 1}{2x^2 - x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{2x^4 - x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^x$.

Решение.

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Разложим квадратный трехчлен в числителе на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. В знаменателе вынесем общий множитель $3x$ за скобки.

Получим $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$ и $3x^2 - 9x = 3x(x - 3)$.

Подставим полученные выражения в числитель и знаменатель данной дроби и сократим дробь на $x - 3$. Получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{3x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{3x} = \frac{1}{9}.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \frac{1}{9}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} = \left[\frac{0}{0} \right].$

Пределы числителя и знаменателя при $x \rightarrow 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})$ и затем сократив дробь на x , получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}}{-2} = \frac{2\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} = -\sqrt{5}.$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + x - 1}{2x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$

Разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x^4}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{1}{x^4}}{\frac{2x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{-1 + 0 - 0}{0 + 0} = \infty.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + x - 1}{2x^2 - x} = \infty.$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 1}{2x^4 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$

Разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4 , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} - \frac{x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \frac{-0 + 0}{2 - 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{2x^4-x} = 0.$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0} \right].$

Поделим числитель дроби под знаком предела на $2x$ и умножим на $2x$, а знаменатель поделим на $5x$ и умножим на $5x$. После чего воспользуемся формулой первого замечательного предела, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)}{5x \cdot \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 1}{5x \cdot 1} = \frac{2}{5}.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}.$

е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = \left[1^\infty \right].$

Сделаем замену $y = \frac{x}{2}$. Тогда $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{2} \right)} \right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{2y} = \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right)^2 = e^2.$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = e^2.$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^x.$

Очевидно, что $\frac{x-2}{x-1} = 1 + \frac{x-2}{x-1} - 1 = 1 + \frac{x-2-x+1}{x-1} = 1 + \frac{-1}{x-1}$

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^x &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x-1} \right)^x = (1)^\infty = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{-1}} \right]^{\frac{-1}{x-1} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x/x}{x/x - 1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 - \frac{1}{x}}} = e^{-1}.\end{aligned}$$

Ответ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^x = e^{-1}.$

2. Доказать непрерывность функции $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$

или установить характер точки разрыва функции в этой точке.

Решение. Проверим все условия определения непрерывной функции.

1) $f(0) = 1$, следовательно, первое условие выполнено;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1.$

Так как все три условия определения непрерывности функции в точке выполнены, то функция $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x = 0$.

3. Задана функция $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

1) Исследовать функцию на непрерывность на всей числовой оси.

2) Найти и классифицировать точки разрыва, если они существуют.

3) Построить график функции.

Решение.

1) Функция непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty; 0)$, $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

2) Рассмотрим поведение функции в точках $x=0$ и $x=1$, так как при переходе через эти точки функция меняет свое аналитическое выражение.

Найдем правосторонний и левосторонний пределы функции в точке $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{1-x^2} = 1.$$

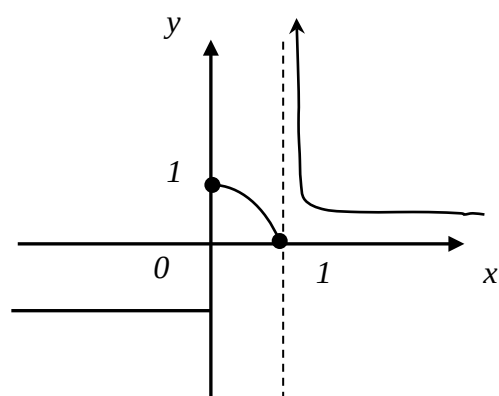
Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то $x=0$ – точка разрыва первого рода.

Найдем правосторонний и левосторонний пределы функции в точке $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x^2} = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

Так как один из односторонних пределов равен бесконечности, то $x=1$ – точка разрыва второго рода.

3) Построим график функции.



4. Найти область определения функции

1) $y = 3\sqrt{4-x^2}$.

Ответ. $[-2; 2]$

2) $y = \frac{2}{\sqrt{25-x^2}}$.

Ответ. $(-5; 5)$

$$3) y = \frac{5 - \sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}.$$

Ответ. $[-2; 5)$

$$4) y = \frac{1+x}{1-x}.$$

Ответ. $x \neq 1$

5. Постройте графики функций

а) $y = 3x + 5$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; в) $y = 4 - 4x^2$; г) $y = \frac{5}{x}$; д) $y = x^3 + 1$; е) $y = \sin 2x$.

6. Вычислите указанные пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 6x + 8). \quad [0]$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}. \quad [-1]$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 - x}{7x}. \quad \left[-\frac{1}{7}\right]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}. \quad \left[\frac{1}{3}\right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}. \quad \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}. \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}. \quad [1]$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}. \quad [3]$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 + 7x - 1}. \quad [0]$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}. \quad [\infty]$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 5}{3x^4 - 5x^2 + 1}. \quad \left[\frac{2}{3}\right]$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x. \quad \left[\frac{1}{e}\right]$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^x. \quad [e^4]$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^x. \quad [e]$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}. \quad \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}. \quad [2]$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x. \quad [1]$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \cos \pi x}{x}. \quad \left[\frac{1}{2} \right]$$

7. Исследовать на непрерывность функции и построить их графики

1) $f(x) = x+1$ в точках $x=1$ и $x=-1$. [В обеих точках непрерывна]

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1 \\ x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$ в точке $x=1$. [В точке $x=1$ непрерывна]

3) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } 0 \leq x < 3 \\ 3-x, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$ в точке $x=3$. [В точке $x=3$ разрывна]

Тест для самоконтроля

Тема: «Введение в математический анализ»

1. Предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x}-3}{2-\sqrt{x+3}}$ равен...

а. $\frac{1}{2}$, б. $-\frac{1}{3}$, в. $\frac{2}{3}$, г. -1

2. Выберите условие, при выполнении которого функция $y = f(x)$, определенная на интервале $(a;b)$, является непрерывной в точке $x_0 \in (a;b)$...

а. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, б. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, в. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, г. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$

3. Пределов функций $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 4x^2 + 5x - 4)$ равен...

а. 2, б. 3, с. 21, d. 6

4. Пределов функций $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 2}{3x^2 - 7}$ равен...

а. $\frac{14}{17}$, б. $\frac{6}{5}$, с. $-\frac{15}{19}$, d. $\frac{12}{7}$

5. Формула первого замечательного предела имеет вид...

а. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} = 0$, б. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} 2x} = 1$, с. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x} = 1$, d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

6. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ равен...

а. 0, б. 2, с. $\frac{\pi}{2}$, d. 1

7. Областью определения функции $\frac{1}{x+1}$ является...

а. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
б. $x \in (-1; 1)$
с. $x \in (-\infty; -1)$
d. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

8. Формула второго замечательного предела имеет вид

а. $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2 = 9$
б. $\lim_{x \rightarrow 1} (2+x)^x = 3$
с. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
d. $\lim_{x \rightarrow 0} (x+2)^x = 1$

9. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e$ равен...

а. -1, б. 0, с. e, d. 2

10. Точкой разрыва функции $y = \frac{x-5}{x+3}$ является точка...

a. $x=3$, b. $x=2$, c. $x=-2$, d. $x=-3$

11. Установите соответствие между пределами и их значениями

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2}{2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x - \pi}$

a. 2, b. 1, c. 3, d. 0

12. Число точек разрыва функции $y = \frac{1}{x^2(x-2)^4(x-1)^3}$ равно...

a. 0, b. 7, c. 4, d. 3

13. Какая функция называется бесконечно малой?

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = \infty$, b. $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, c. $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = A$

14. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть ...

a. бесконечно малая функция;

b. ограниченная функция;

c. постоянная.

15. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство

a. $|f(x) - A| > \varepsilon$

b. $|f(x) - A| = \varepsilon$

c. $|f(x) - A| < \varepsilon$

16. Если функция $\alpha = \alpha(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, то функция

$y(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ стремится к ...

a. бесконечности

b. нулю

c. единице

17. Функция $y=y(x)$ при $x \rightarrow a$

a. может иметь более одного предела

b. имеет пределы

с. не может иметь более одного предела

18. Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a,b) , называется непрерывной в точке $x_0 \in (a;b)$, если

a. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(a)$

b. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

с. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(b)$

19. Если x_0 - точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то

a. конечные пределы существуют и равны значению функции в этой точке

b. конечные пределы существуют

с. конечные пределы равны

20. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - 1}{x^3 + 2x + 7}$

a. 2

b. 0

с. 0,5

РАЗДЕЛ V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§8. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1 Приращение функции и приращение аргумента.

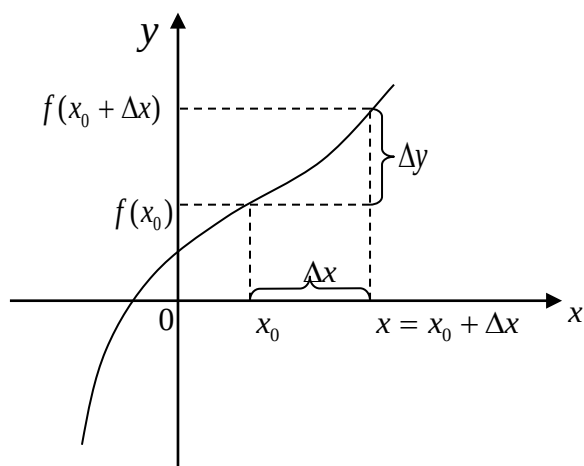
Задачи, приводящиеся к понятию производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где x - независимая переменная или аргумент функции, а y - зависимая переменная или функция.

$D(f)$ - область определения функции;

$E(f)$ - область значения функции.

Определение 1. Если x и x_0 - два значения независимой переменной из $D(f)$, то их разность $x - x_0$ называется **приращением независимой переменной** и обозначается Δx .



По определению имеем, $\Delta x = x - x_0$, следовательно, $x = x_0 + \Delta x$. При этом говорят, что первоначальное значение x_0 независимой переменной «получило приращение Δx ». Следовательно, значение функции изменяется на

величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 2: Разность между новым значением функции $f(x_0 + \Delta x)$ и её первоначальным значением $f(x_0)$, называется **приращением функции в точке x_0** и обозначается символом $\Delta f(x_0)$ («дельта эф в точке x_0 »)

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Пример. Найти приращение функции $f(x) = x^2 + x - 2$ в точке x .

Решение. Дадим аргументу x приращение Δx . Получим, $x = x + \Delta x$. Тогда, новое значение функции примет вид:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 2.$$

Найдем, приращение функции по формуле $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, получим

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 2 - (x^2 + x - 2) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x - 2 - x^2 - x + 2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x.$$

Ответ. $\Delta f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x$.

Переходим к изложению основ дифференциального исчисления. В качестве введения в дифференциальное исчисление рассмотрим задачу о скорости, задачу о касательной и экономические задачи. Эти задачи оказались связанными с формированием основного понятия дифференциального исчисления, получившего название **производной**.

Задача о скорости. Материальная точка движется прямолинейно так, что в каждый момент времени t она находится на расстоянии $S = f(t)$ от некоторой выбранной в качестве начальной точки O (говорят, что задан закон движения $S = f(t)$). Найти скорость v движения точки в момент t_0 .

В момент времени t_0 пройденное расстояние равно $f(t_0) = S_0$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ расстояние равно $f(t_0 + \Delta t) = S_1$. Таким образом, за

промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка пройдет путь $\Delta S = S_1 - S_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. При этом значение Δt называют приращением аргумента, а значение ΔS приращением функции.

Средняя скорость движения материальной точки за указанный промежуток времени равна $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Средняя скорость движения зависит не только от выбранного момента времени t_0 , но и от длительности рассматриваемого промежутка времени Δt . Чем меньше величина Δt , тем точнее средняя скорость «характеризует» это движение в момент времени t_0 . Поэтому предел средней скорости движения при стремлении Δt к нулю называют *скоростью движения точки в данный момент времени t_0 (мгновенной скоростью)*:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Задача о касательной. Пусть имеется кривая и лежащая на ней некоторая точка M . Возьмём на этой кривой любую другую точку N и будем перемещать её по кривой, неограниченно приближая к точке M (то есть, чтобы расстояние между ними стремилось к нулю). При этих условиях секущая MN , вообще говоря, меняет своё положение, вращаясь вокруг точки M (рис. 8.1). Если существует прямая MT , являющаяся предельным положением секущей MN при неограниченном приближении точки N по кривой к точке M , то эта прямая называется **касательной** к кривой в точке M . Следует иметь в виду, что кривая в её точке M может и не иметь касательной.

Рассмотрим некоторую плоскую кривую с уравнением $y = f(x)$ и точку $M(x_0, f(x_0))$ этой кривой (рис. 8.2). Пусть кривая в точке M имеет невертикальную касательную MT . Напишем уравнение этой касательной.

Значению аргумента $x_0 + \Delta x$ соответствует значение функции $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$ и, значит, точка $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ кривой. Здесь Δx – произвольное приращение аргумента, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции при $x = x_0$.

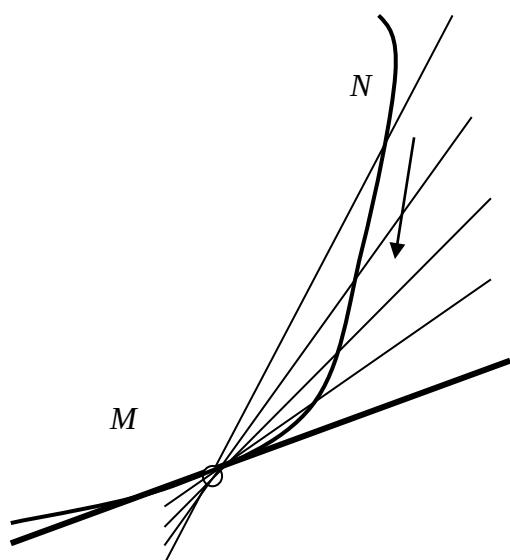


Рис.8.1.

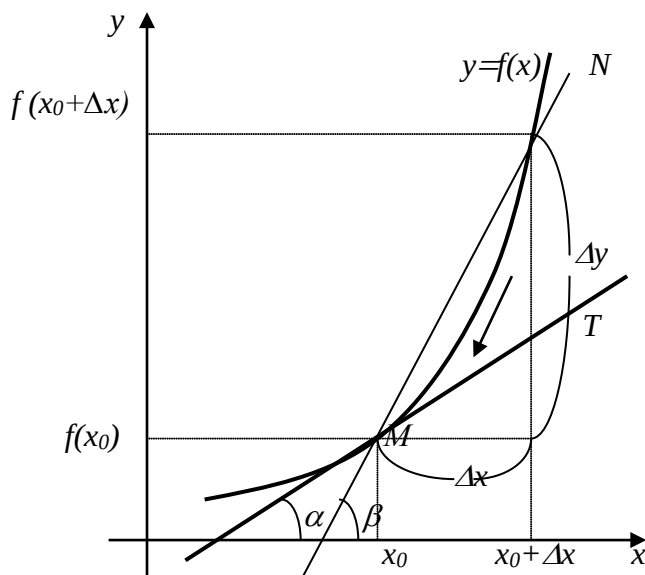


Рис.8.2.

Значению аргумента $x_0 + \Delta x$ соответствует значение функции $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$ и, значит, точка $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ кривой. Здесь Δx – произвольное приращение аргумента, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции при $x = x_0$.

Пусть теперь $\Delta x \rightarrow 0$, тогда точка N по кривой стремится к точке M , секущая MN , меняя своё положение, будет стремиться занять положение касательной MT к кривой в точке M . Обозначим через β угол наклона к оси Ox секущей MN , а через α – угол наклона касательной к кривой в точке M . Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow \alpha$ и, значит, $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$. Но $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной MT – прямой, проходящей через точку $M(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$, запишется в виде

$$y - f(x_0) = k(x - x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (x - x_0).$$

Рассмотрим экономические задачи, приводящие к понятию производной.

Задача 1. Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t . Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0 .

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени равна $\frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что **производительность труда в момент времени t_0** можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то есть равна

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Задача 2. Обозначим через x объем производства некоторой продукции, через K – суммарные затраты или издержки производства. Производственная функция (функция затрат) описывает зависимость издержек производства K от объема x выпускаемой продукции:

$$K = f(x).$$

Если объем производства увеличится на Δx единиц, то затраты возрастут на $\Delta K = f(x + \Delta x) - f(x)$ единиц.

Среднее приращение издержек выражается отношением $\frac{\Delta K}{\Delta x}$.

Под **предельными издержками** производства понимают предел

среднего приращения издержек при безграничном уменьшении Δx , то есть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Полученный предел выражает дополнительные затраты на производство продукции при увеличении объема производства на малую единицу, если исходный объем производства составляет x единиц.

Итак, если сопоставить операции, которые осуществлялись при решении рассмотренных задач, то легко заметить, что во всех случаях по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной и затем вычислялся предел их отношения. Таким путём приходим к основному понятию дифференциального исчисления – к понятию производной.

8.2 Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x . Дадим аргументу x приращение Δx (при этом предполагается, что точка $x + \Delta x$ принадлежит области определения функции). Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует и конечен. Производная функции $y = f(x)$ в точке x обозначается символами: y' , $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Итак, по определению

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (8.1)$$

Производная $f'(x)$ является функцией аргумента x , поскольку, если для данного значения аргумента x существует предел отношения (8.1), то только один. При конкретных числовых значениях аргумента x производная – число. В случаях, когда может возникнуть сомнение относительно переменной, по которой взята производная, эта переменная указывается в виде значка внизу: y'_x , $f'_x(x_0)$.

Процесс нахождения производной функции называют дифференцированием, а саму функцию при этом называют дифференцируемой.

Рассматривая в пункте 8.1 задачу о скорости, мы получили, что $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$, то есть $v = \frac{dS}{dt}$. Введя обозначение производной, последнюю формулу можно переписать в виде $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'_t$. Отсюда следует **механический смысл производной**: скорость v есть производная от пройденного пути S по времени t .

Если слово «скорость» понимать в более широком смысле, то можно производную функции $y = f(x)$ по x считать скоростью изменения переменной y в точке x . Поэтому понятие производной находит широкое применение при изучении скорости течения различных процессов (например, скорость охлаждения нагретого тела; скорость осуществления работы – мощность; скорость обесценивания оборудования и т.п.).

Из рассмотренной задачи о касательной следует, что $tg\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть $tg\alpha = y'$. Отсюда следует **геометрический смысл производной**: производная функции $y = f(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной $tg\alpha$ в точке $M(x, f(x))$ графика функции, то есть $k = tg\alpha$.

На основании ранее приведённых рассуждений получаем, что уравнение не вертикальной касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Из рассмотренных экономических задач, приводящих к понятию производной, следует экономический смысл производной:

1) производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени, то есть $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_t$;

2) производная выражает предельные издержки производства при данном объеме и характеризует приблизительно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'_x$.

Производная логарифмической функции $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ называется логарифмической производной, а так же относительной скоростью изменения функции или темпом изменения функции.

Запишем **общее правило вычисления производной по определению**:

1. Дадим аргументу x произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. Найдём новое значение функции $f(x + \Delta x)$.

2. Найдём приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4. Найдём предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть производную функции

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пример. Найти производную функции $y = x^3$ по определению.

Решение. Воспользуемся общим правилом нахождения производной по определению.

1. Дадим аргументу x приращение Δx , получим $x + \Delta x$. Найдем значение данной функции в точке $x + \Delta x$, получим $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$.

2. Найдем приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x.$$

3. Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

4. Тогда, производная функции будет равна

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + (0)^2 = 3x^2.$$

Ответ. $y' = (x^3)' = 3x^2$.

Пример. Вычислить по определению производную функции $y = x^2$.

Решение.

1. Дадим аргументу x приращение Δx , получим $x + \Delta x$. Найдем значение данной функции в точке $x + \Delta x$, получим

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

2. Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

$$3. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

$$4. y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x.$$

Ответ. $y' = (x^2)' = 2x$.

Установим связь между дифференцируемостью функции $f(x)$ в точке x_0 и ее непрерывностью в этой точке. Напомним, что функция $f(x)$

непрерывна в точке x_0 , если она определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, и выполняется равенство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Переформулируем это определение, используя понятия приращения аргумента и приращения функции. Из этого равенства получаем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Другими словами, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Дано, что $f'(x_0)$ существует, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - есть некоторое число.

Покажем, что выполняется равенство $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Итак, доказано, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Замечание. Если в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, то в этой точке функция может и не иметь производной, что подтверждается следующим примером.

Пример. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$.

Покажем, что эта функция не имеет производной в точке x_0 :

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$\text{но } \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0 \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases}, \text{ поэтому } \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$, значит $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует, то есть $f(x)$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

8.3 Производные некоторых элементарных функций

Для того чтобы научиться дифференцировать функции, надо знать производные основных элементарных функций и правила дифференцирования. Выведем производные некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = c$ – постоянное число.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Итак, $(c)' = 0$.

$$2. f(x) = x: f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Получили: $(x)' = 1$.

$$3. f(x) = \sqrt{x}.$$

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Таким образом, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$4. f(x) = \frac{1}{x}. \left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

$$5. f(x) = \sin x. (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Значит, $(\sin x)' = \cos x$

6. Аналогично доказывается, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Для дальнейшего изложения вычислим два вспомогательных предела, а именно:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y},$$

используя для этого второй замечательный предел и непрерывность функций $\log_a x$ и a^x .

Первый предел:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \log_a(1+y) = \lim_{y \rightarrow 0} \log_a(1+y)^{\frac{1}{y}} = \log_a\left(\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\text{Таким образом, } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \frac{1}{\ln a}.$$

Для вычисления второго предела введем новую переменную: $z = a^y - 1$, тогда $a^y = z + 1$, откуда $y = \log_a(z + 1)$. Если $y \rightarrow 0$, то $z \rightarrow 0$, следовательно,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\log_a(z+1)} = \ln a, \quad \text{то есть} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a.$$

7. $f(x) = \log_a x$:

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \\ &= \left| \text{по первому из доказанных пределов} \right| = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Значит, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

8. Убедимся, что $(a^x)' = a^x \ln a$:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \\ &= \left| \text{по второму из доказанных пределов} \right| = a^x \ln a.\end{aligned}$$

8.4 Основные правила дифференцирования.

Таблица производных

Дифференцирование функции (отыскание производных) непосредственно на основе определения производной оказывается практически неудобной процедурой. Нахождение производных значительно упрощается, если использовать общие правила дифференцирования и формулы нахождения производной основных элементарных функций, которые были выведены по определению производной.

Правила дифференцирования

1. Производная постоянной величины равна нулю.

$$(C)' = 0.$$

2. Производная суммы функций (имеющих производные) равна сумме производных этих функций.

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(Cu)' = Cu', \quad (C - \text{Постоянная}).$$

4. Производная произведения двух функций равняется сумме произведений производной первого множителя на второй и производной второго множителя на первый.

$$y' = (u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

5. Производная частного или дроби (при условии, что числитель и знаменатель дроби имеют производные и знаменатель в нуль не равен нулю) равняется разности произведений производной числителя на её знаменатель и производной знаменателя на числитель, делённую на квадрат знаменателя.

$$y' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

С помощью правила 5 можно вычислить производные функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}.$$

В пункте 8.3 выведены формулы нахождения производной функций $\sin x$ и $\cos x$. Пользуясь этими формулами, получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\cos x) \cdot (\cos x) - (\sin x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, получили формулу: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Производная для $\operatorname{ctg} x$ находится аналогично (докажите самостоятельно): $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Таблица производных элементарных функций

$$1. (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$2. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$3. (e^x)' = e^x$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$4. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$5. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$6. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$14. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример. Вычислить производную функции:

а) $y = x^4 \cdot \ln x$;

б) $y = \frac{1}{x} + 3x^2 - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. а) Так как данная функция представляет собой произведение двух функций, то для вычисления производной применяем правило дифференцирования $y' = (u \cdot v)' = u'v + uv'$, где $u = x^4$, а $v = \ln x$. Получим

$$y' = (x^4 \cdot \ln x)' = (x^4)' \ln x + x^4 (\ln x)'.$$

Так как, по таблице производных $(x^4)' = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$ и $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то имеем

$$y' = (x^4 \cdot \ln x)' = 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = 4x^3 \cdot \ln x + x^3 = x^3(4 \ln x + 1).$$

Ответ. $y' = x^3(4 \ln x + 1)$.

б) Так как данная функция представляет собой алгебраическую сумму трех функций, то для вычисления производной применяем правило дифференцирования $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$.

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 3x^2 - \sqrt[3]{x^2} \right)' = \left(x^{-1} + 3x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right)' = (x^{-1})' + 3(x^2)' - \left(x^{\frac{2}{3}} \right)'.$$

Используя формулу нахождения производной степенной функции, то есть $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, получим

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 3x^2 - \sqrt[3]{x^2} \right)' = -1 \cdot x^{-2} + 3 \cdot 2x - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^2} + 6x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Ответ. $y' = \frac{1}{x^2} + 6x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$

8.5 Дифференцирование сложной функции

Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причем $f(u)$ и $\varphi(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда y будет сложной функцией $y = f[\varphi(x)]$, дифференцируемой по переменной x .

Теорема. Если существуют производные функций $f'(u_0)$ и $\varphi'(x_0)$, где $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ имеет производную в точке x_0 , которая вычисляется по формуле: $y' = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

Здесь x - независимая переменная, а u - промежуточная переменная. Таким образом производная по независимой переменной равна произведению производной функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной.

Таблица производных сложных функций

$$1. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$8. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$2. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$9. (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$3. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$10. (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$4. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$11. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$5. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$12. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$6. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

$$13. (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$7. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$14. (arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Пример. Вычислить производную функции:

а) $y = \sqrt[5]{(1+3x^2)^3}$.

б) $y = \ln(\sin x + x^3)$.

в) $y = \sin(x^2)$.

г) $y = (\sin x)^2$.

д) $y = (x^5 + 2x + 1)^5$.

Решение.

а) Записываем данную функцию в виде степенной, получим

$$y = (1 + 3x^2)^{\frac{3}{5}}.$$

Воспользуемся формулой $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, где $u = 1 + 3x^2$. Получим

$$y' = \frac{3}{5} (1 + 3x^2)^{-\frac{2}{5}} \cdot (1 + 3x^2)' = \frac{3}{5} (1 + 3x^2)^{-\frac{2}{5}} \cdot 6x = \frac{18}{5\sqrt[5]{(1+3x^2)^2}}.$$

$$\text{Таким образом, } y' = \left(\sqrt[5]{(1+3x^2)^3} \right)' = \frac{18}{5\sqrt[5]{(1+3x^2)^2}}.$$

б) Укажем формулу, которая используется для вычисления производной данной функции в квадратных скобках. Тогда оформление примера может иметь вид.

$$y' = \left(\ln(\sin x + x^3) \right)' = \left[\begin{array}{l} (\ln u)' = \frac{u'}{u} \\ u = \sin x + x^3 \end{array} \right] = \frac{(\sin x + x^3)'}{\sin x + x^3} = \frac{(\sin x)' + (x^3)'}{\sin x + x^3} = \frac{\cos x + 3x^2}{\sin x + x^3}.$$

$$\text{Таким образом, } y' = \left(\ln(\sin x + x^3) \right)' = \frac{\cos x + 3x^2}{\sin x + x^3}.$$

$$\text{в) } y' = (\sin(x^2))' = \left[\begin{array}{l} (\sin u)' = \cos u \cdot u' \\ u = x^2 \end{array} \right] = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot \cos(x^2).$$

$$\text{г) } y' = ((\sin x)^2)' = \left[\begin{array}{l} (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \\ u = \sin x \end{array} \right] = 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x.$$

$$\begin{aligned} \text{д) } y' &= ((x^5 + 2x + 1)^5)' = \left[\begin{array}{l} (u^n)' = n \cdot u^n \cdot u' \\ u = x^5 + 2x + 1 \end{array} \right] = 5 \cdot (x^5 + 2x + 1)^4 \cdot (x^5 + 2x + 1)' = \\ &= 5 \cdot (x^5 + 2x + 1)^4 \cdot ((x^5)' + 2 \cdot (x)' + (1)') = 5 \cdot (x^5 + 2x + 1)^4 \cdot (5x^4 + 2). \end{aligned}$$

8.6 Дифференцирование степенно-показательной функции

Для того чтобы найти производную степенно-показательной функции, достаточно дифференцировать ее вначале как степенную, а затем как показательную и полученные результаты сложить.

Пусть $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Прологарифмируем обе части последнего равенства и найдем производную от каждой части, считая при этом y сложной функцией. Получим,

$$\begin{aligned} \ln y &= \varphi(x) \ln f(x) \Rightarrow (\ln y)' = (\varphi(x) \ln f(x))' \Rightarrow \\ \frac{y'}{y} &= \varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) (\ln f(x))' = \varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Учитывая что $y = f(x)^{\varphi(x)}$, получим после преобразований:

$$y' = (f(x)^{\varphi(x)})' = f(x)^{\varphi(x)} \left[\varphi'(x) \ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)} \right].$$

Пример. Вычислить производную функции $y = (7x)^{\cos x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \ln y &= \cos x \cdot \ln 7x \Rightarrow (\ln y)' = (\cos x \cdot \ln 7x)' \Rightarrow \\ \frac{y'}{y} &= (\cos x)' \cdot \ln 7x + \cos x \cdot (\ln 7x)' = \cos x \cdot \ln 7x + \frac{\cos x \cdot (7x)'}{7x} \Rightarrow \\ \frac{y'}{y} &= -\sin x \cdot \ln 7x + \frac{\cos x \cdot 7}{7x} \Rightarrow \frac{y'}{(7x)^{\cos x}} = -\sin x \cdot \ln 7x + \frac{\cos x \cdot 7}{7x} \Rightarrow \\ y' &= (7x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln 7x + \frac{\cos x \cdot 7}{7x} \right). \end{aligned}$$

8.7 Дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую на некотором множестве X . Пусть некоторая точка $x \in X$. По условию функция имеет производную в точке x , то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

По свойствам пределов будет справедливо равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(\Delta x), \quad (8.2)$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция.

Умножим обе части равенства на Δx , получим $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Пусть $y' \neq 0$. Тогда первое слагаемое $y' \cdot \Delta x$ линейно по Δx , поскольку y' не зависит от Δx . При $\Delta x \rightarrow 0$ это слагаемое бесконечно мало, но порядок его малости ниже порядка малости второго слагаемого, так как для всех $y' \neq 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{y' \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{y'} = 0.$$

Поэтому слагаемое $y' \cdot \Delta x$ является главной частью приращения функции.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть приращения функции, линейная относительно Δx .

Дифференциал функции принято обозначать символом dy . Таким образом, из определения имеем:

$$dy = y' \cdot \Delta x, \quad (8.3)$$

то есть дифференциал функции равен произведению производной функции на приращение аргумента.

Найдем дифференциал аргумента

$$dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x.$$

Тогда равенство (8.3) примет вид

$$dy = y' \cdot dx, \quad (8.4)$$

то есть дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.

Из равенства (8.4) найдём y' , получим $y' = \frac{dy}{dx}$. Это равенство показывает, что производная функции, есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Пример. Вычислить дифференциал функции:

а) $y = \sin(6x - 4)$.

б) $y = \frac{1}{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}$.

Решение. а) Найдём производную данной функции используя формулу

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u', \text{ где } u = 6x - 4, \text{ получим}$$

$$y' = (\sin(6x - 4))' = \cos(6x - 4) \cdot (6x - 4)' = 6 \cdot \cos(6x - 4).$$

Тогда $dy = 6 \cdot \cos(6x - 4) \cdot dx$ - дифференциал данной функции.

б) По формуле (8.4) имеем

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{1}{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4} \right)' \cdot dx = \left(\left(\frac{1}{x^2 + 4} \right)' + \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)' \right) \cdot dx = \\ &= \left(- (x^2 + 4)^{-2} \cdot (x^2 + 4)' + \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right) = \left(- \frac{1}{(x^2 + 4)^2} \cdot 2x + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right) dx = \\ &= \left(- \frac{2x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \right) dx. \end{aligned}$$

Так как в равенстве $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ слагаемое $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ - бесконечно малая функция более высокого порядка малости чем $y' \cdot \Delta x$, то его можно отбросить, и получим $\Delta y \approx dy$. Мы знаем, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$ или

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + dy \approx f(x_0) + y' \cdot \Delta x = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

или
$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (8.5)$$

Формула (8.5) используется для приближённого вычисления значения функции от $x_0 + \Delta x$, если $f(x_0)$ можно вычислить точно и без затруднений.

Пример. Вычислить приближённо $\sqrt{1,03}$.

Решение. 1. Пусть $1,03 = x$, тогда получим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Представим x в следующем виде: $x = x_0 + \Delta x = 1 + 0,03$, тогда $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0,03$.

2. Найдём $f(x_0)$ и $f'(x_0)$:

$$f(x_0) = f(1) = \sqrt{1} = 1,$$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

3. Найдём приближенное значение функции по формуле (8.5), получим

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x,$$

$$\sqrt{1,03} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0,03 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,03 = 1 + 0,015 = 1,015.$$

Ответ. $\sqrt{1,03} \approx 1,015$.

8.8 Производные и дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Производная $y' = f'(x)$ является в общем случае новой функцией от переменной x , и ее называют производной первого порядка (первая производная). От найденной первой производной можно при необходимости еще взять производную.

Определение. Производная от производной первого порядка называется производной второго порядка и обозначается следующим образом

$$y'' = (y')' = (f'(x))' = f''(x).$$

Зная производную второго порядка, можно вычислить производную третьего порядка следующим образом $y''' = (y'')' = (f''(x))' = f'''(x)$. Продолжая рассуждения далее, можно найти производную n -го порядка, то есть

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = (f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x).$$

Пример. Вычислить:

а) Производную третьего порядка от функции $y = \frac{1}{x}$.

б) $f'''(x)$ и $f'''(4)$ для функции $f(x) = \sqrt{x}$.

в) Производную n -го порядка для функции $y = e^{3x}$

Решение. а) Найдем производную первого порядка. Для этого приведем данную функцию к табличному виду, а именно представим в виде степенной функции. Получим $y = x^{-1}$. Тогда, по формуле $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, имеем

$$y' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

Полученная первая производная является степенной функцией, поэтому для нахождения производной второго порядка, снова пользуемся формулой $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

$$y'' = (y')' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3}.$$

Аналогично находим производную третьего порядка.

$$y''' = (y'')' = (-2 \cdot x^{-3})' = -2 \cdot (x^{-3})' = -2 \cdot (-3)x^{-3-1} = 6x^{-4}.$$

Таким образом, $y''' = 6x^{-4}$.

$$\text{б) } f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}},$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8\sqrt{4^5}} = \frac{3}{8 \cdot 2^5} = \frac{3}{256}.$$

$$\text{в) } y' = 3e^{3x}, y'' = 3 \cdot 3e^{3x} = 3^2 e^{3x}, y''' = 3^3 e^{3x}.$$

По аналогии находим: $y^{(n)} = 3^n e^{3x}$.

Рассмотрим механический смысл второй производной.

Пусть путь S , пройденный телом по прямой за время t , выражается формулой $S = f(t)$.

Известно, что при этом скорость V в момент времени t равна производной от пути по времени: $V = S'(t)$. В момент времени $t + \Delta t$ скорость получит приращение

$$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t).$$

Отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ называется средним ускорением за время Δt .

Ускорением a в данный момент времени называется предел среднего ускорения, когда $\Delta t \rightarrow 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}, \text{ то есть } a = V'(t) = (S(t))' = S''(t).$$

Следовательно, ускорение при прямолинейном движении равно второй производной от пути по времени: $a = S''(t)$.

Перейдем к рассмотрению дифференциалов высших порядков.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$. Дифференциал этой функции $y = f'(x)dx$ является функцией от x (если x – не фиксированное число), dx – приращение аргумента x , оно не зависит от x .

Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка и обозначается $d^2 y$ или $d^2 f(x)$.

Итак, $d^2 y = d(dy)$, где $dy = f'(x)dx$, поэтому

$$d^2y = d(f'(x)dx) = (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Будем вместо $(dx)^2$ писать dx^2 .

Дифференциалом третьего порядка называется дифференциал от дифференциала второго порядка и обозначается d^3y или $d^3f(x)$:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3 \text{ и т.д.}$$

Дифференциалом n -го порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Итак, $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Заметим, что выражение производной через отношение дифференциалов часто бывает удобно, поэтому оно широко используется.

Так, вместо y'_x будем писать: $\frac{dy}{dx}$, вместо y'_t пишем: $\frac{dy}{dt}$ и т.п.

Пример. Найти d^3y для функции $y = \cos^2 x$.

Решение. $d^3y = y'''dx^3$. Вычислим y''' , находя последовательно y' , y'' , y''' :

$$y' = (\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$$

$$y'' = (-\sin 2x)' = -2\cos 2x,$$

$$y''' = 4\sin 2x.$$

Следовательно, $d^3y = 4\sin 2x dx^3$.

8.9 Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна на интервале (a, b) и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает свое наибольшее или наименьшее значение. Если в точке x_0 существует производная этой функции, то $f'(x_0) = 0$.

Экономический смысл теоремы Ферма.

Один из базовых законов теории производства звучит так: *оптимальный для производства уровень пуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода.*

Обозначим функцию прибыли за $C(x)$. Тогда $C(x) = D(x) - S(x)$, где $D(x)$ - функция дохода, $S(x)$ - функция издержек. Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, то есть такое значение выпуска x_0 , при котором функция $C(x)$ имеет экстремум (максимум). По теореме Ферма в этой точке $C'(x) = 0$. Но $C'(x) = D'(x) - S'(x)$, поэтому $D'(x_0) = S'(x_0)$, то есть предельные издержки $S'(x_0)$ и предельный доход $D'(x_0)$ равны при оптимальном выпуске x_0 .

Другое важное понятие теории производства - это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству минимальны. Соответствующий экономический закон гласит: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек.*

Получим это условие как следствие теоремы Ферма. Средние издержки определяются как $\frac{S(x)}{x}$, то есть издержки по производству товара, деленные на произведенное количество товара. Минимум этой величины достигается в критической точке функции $y = \frac{S(x)}{x}$, то есть при условии $y' = \frac{S'x - S}{x^2} = 0$, откуда $S'x - S = 0$, то есть $S' = \frac{S}{x}$. Что и требовалось доказать.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в каждой внутренней точке и $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, что $f'(x_0)=0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , то найдется хотя бы одна внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Экономический смысл теоремы Лагранжа.

Пусть $y = f(x)$ описывает зависимость выпуска y от затрат x некоторого специфического ресурса. Если объем затрат увеличили с a до b единиц, то разность $f(b) - f(a)$ выражает соответствующее изменение выпуска.

Отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

показывает на сколько единиц в среднем изменяется выпуск продукции, если затраты возросли на одну единицу. Другими словами, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ - средняя производительность ресурса на промежутке $[a, b]$.

Предельная производительность ресурса равна значению производной функции выпуска при данном уровне затрат. Если затраты ресурса r составляют c единиц, то $f'(c)$ - соответствующая им предельная производительность r .

На основании теоремы Лагранжа можно утверждать, что для процесса производства описываемого функцией выпуска $y = f(x)$, которая непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b) , существует, по крайней мере, один уровень затрат c , при котором предельная производительность соответствующего ресурса совпадает с его средней

производительностью на $[a, b]$.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ для любой точки x из интервала (a, b) . Тогда существует внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

8.10 Правило Лопиталья

В разделе IV мы познакомились с приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, то есть раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. В этом разделе мы рассмотрим новый способ вычисления таких пределов, так называемое правило Лопиталья.

Теорема Лопиталья. (Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$)

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены, непрерывны и дифференцируемы в точке x_0 и некоторой ее окрестности, причем $g'(x) \neq 0$ для любого x из этой окрестности, и пусть $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ (следовательно, $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$). Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

существует, то существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (8.6)$$

Равенство (8.6) называют правилом Лопиталья для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$.

Доказательство. Дадим значению аргумента x_0 приращение Δx , такое, чтобы точка $x = x_0 + \Delta x$ принадлежала рассматриваемой окрестности точки x_0 .

Случай 1. $\Delta x > 0$, тогда $x > x_0$. Функции $f(x)$, $g(x)$, рассматриваемые на отрезке $[x_0, x]$, удовлетворяют теореме Коши, поэтому найдется такое $c \in (x_0, x)$, что выполняется равенство: $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Так как $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то получим: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Заметим, что число c зависит от x , но если $x \rightarrow x_0$, то $c \rightarrow x_0$, так как $x_0 < c < x$. Переходя к пределу в последнем равенстве, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Случай 2. $\Delta x < 0$, тогда $x < x_0$. Функции $f(x)$, $g(x)$, рассматриваемые на отрезке $[x, x_0]$, удовлетворяют условиям теоремы Коши, и потому доказательство аналогично, как в случае 1. Итак, *теорема Лопиталя доказана*.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x}$.

Решение. Поскольку функции $f(x) = 1 - \cos 3x$, $g(x) = 2x$ удовлетворяют условию теоремы Лопиталя, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

Замечание 1. Теорема Лопиталя справедлива и в том случае, когда функции $f(x)$, $g(x)$ не определены в точке x_0 , но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. В самом деле, если доопределить $f(x)$, $g(x)$, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$, тогда $f(x)$, $g(x)$ будут непрерывны в точке x_0 , а потому теорема Лопиталя будет применима к ним.

Замечание 2. Правило Лопиталя применимо и в том случае, когда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Действительно, введя новую переменную $y = 1/x$, видим, что $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема Лопиталя. (Раскрытие неопределенностей типа $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 , за исключением самой точки x_0 , причем $g'(x) \neq 0$, и пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим, его можно найти в учебниках.

Отметим, что эта теорема верна для случая, когда $x \rightarrow \infty$, в этом можно убедиться, повторяя рассуждения замечания 2.

Замечание 3. Предел отношения двух функций может существовать, в то время как предел отношения их производных не существует.

Например, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ — не существует, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ не существует.

Замечание 4. Если $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Таким образом, для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ иногда приходится применять правило Лопиталя несколько раз.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. При $x \rightarrow 0$ и $x > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty$, следовательно, имеем отношение двух бесконечно больших при $x \rightarrow 0$ и неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Вычислим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$$

Замечание 5. Теорема Лопиталя остается верной и тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя теорему Лопиталя два раза, получим: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$.

Можно показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$. Это означает, что показательная функция e^x растет быстрее любой степенной функции x^n .

Рассмотрим неопределенности других видов.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot F(x)$ называют неопределенностью типа $0 \cdot \infty$, а $\lim_{x \rightarrow x_0} [F(x)]^{\alpha(x)}$ — неопределенностью типа ∞^0 .

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} F_1(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} F_2(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (F_1(x) - F_2(x))$ — неопределенность типа $\infty - \infty$.

Аналогично понимаются и другие неопределенности. При раскрытии таких неопределенностей зачастую помогает способ сведения их к неопределенностям типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с последующим применением правила Лопиталя.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \infty$, то имеем неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Преобразуем ее к виду $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x^2}$, затем применим правило Лопиталя,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$.

Упражнения

1. Найти производные следующих функций:

- а) $y = \sqrt[4]{3x} + 5x^2 + \frac{7}{x^3}$, б) $y = 2^{\sqrt{\sin x}}$, в) $y = x^2 \arcsin x$,
 г) $y = \operatorname{Intg}(\frac{\pi}{4} + x)$, д) $y = \frac{x^3}{x-3}$, е) $y = e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x$.

Решение.

а) $y = \sqrt[4]{3x} + 5x^2 + \frac{7}{x^3}$.

Перепишем данную функцию, записав слагаемые в виде степени

$$y = \sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 5x^2 + 7x^{-3}.$$

Используя правила дифференцирования и формулу $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, получим

$$y' = (\sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{1}{4}})' + (5x^2)' + (7x^{-3})' = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} + 2 \cdot 5x + 7(-3)x^{-4} = \frac{\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{x}} + 10x - \frac{21}{x^4}.$$

$$\text{б) } y = 2^{\sqrt{\sin x}}.$$

Данная функция является сложной показательной, следовательно, производную будем вычислять по формуле $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, где $u = \sqrt{\sin x}$. Получим

$$y' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{\sin x})'.$$

Так как функция $\sqrt{\sin x}$ является сложной, то ее производную найдем по формуле $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, где $u = \sin x$. Получим

$$y' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{\sin x})' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}.$$

$$\text{в) } y = x^2 \arcsin x.$$

Применив формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, получим

$$y' = (x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)'.$$

Используя табличные формулы нахождения производной, получим

$$y' = (x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)' = 2x \cdot \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{г) } y = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right).$$

Дифференцируя функцию $y = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)$ как сложную, воспользуемся формулой $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$, где $u = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$. Получим

$$y' = \left(\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)' = \frac{\left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)'}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}.$$

Производную функции $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$ найдем по формуле $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$,

где $u = \frac{\pi}{4} + x$. Получим

$$y' = \frac{(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x))'}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)} \cdot \frac{(\frac{\pi}{4}+x)'}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+x)} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4}+x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}+x)} = \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)} = \frac{2}{\cos 2x}.$$

$$\text{д) } y = \frac{x^3}{x-3}.$$

В соответствии с формулой $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ получаем

$$y' = \frac{(x^3)'(x-3) - x^3 \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{3x^2(x-3) - x^3}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 9x^2}{(x-3)^2}.$$

$$\text{е) } y = e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x.$$

По аналогии с примером в) пользуемся правилом $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, получаем

$$\begin{aligned} y' &= \left(e^{\frac{x}{3}}\right)' \cdot \cos^2 2x + e^{\frac{x}{3}} \cdot (\cos^2 2x)' = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x + e^{\frac{x}{3}} \cdot 2 \cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 2x - 2e^{\frac{x}{3}} \sin 4x. \end{aligned}$$

2. Вычислить приближённо значение $\sqrt{4,1}$.

Решение. Рассмотрим: $f(x) = \sqrt{x}$, где $x = x_0 + \Delta x$, тогда $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$.

Найдем значение функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f(x_0) = f(4) = 2.$$

Найдем производную первого порядка от функции $f(x)$ и значение этой производной в точке x_0 .

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Используя формулу (8.5), получим:

$$\sqrt{4,1} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,1 = 2 + 0,025 = 2,025/$$

Ответ. $\sqrt{4,1} \approx 2,025$.

3. Объем продукции u , произведенной бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, $1 \leq t \leq 8$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Производительность труда выражается производной

$$u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100,$$

а скорость и темп изменения производительности – соответственно производной $u''(t)$ и логарифмической производной $[\ln u''(t)]'$:

$$u''(t) = -5t + 15 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$[\ln u''(t)]' = \frac{u''(t)}{u'(t)} = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40} \text{ (ед./ч)}.$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1$ и $t_2 = 8 - 1 = 7$ соответственно имеем:

$$u'(1) = 112,5 \text{ (ед./ч)}, u''(1) = 10 \text{ (ед./ч}^2\text{)}, [\ln u''(1)]' = 0,09 \text{ (ед./ч)}, u'(7) = 82,5 \text{ (ед./ч)},$$

$$u''(7) = -20 \text{ (ед./ч}^2\text{)}, [\ln u''(7)]' = -0,24 \text{ (ед./ч)}.$$

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $u''(t)$ и логарифмической производной с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется её снижением в последние часы.

4. Пусть зависимость спроса на товар от цены на него выражается формулой $d = \frac{100}{p + 1}$. Определим скорость изменения спроса, когда цена на товар составляет 1 ден.ед., 4 ден. ед.

Решение. Скорость изменения любой функции равна ее

производной. В данном случае

$$d'(p) = -\frac{100}{(p+1)^2}.$$

Отсюда $d'(1) = -25, d'(4) = -4$.

Знак “минус” показывает, что с увеличением цены спрос на товар падает.

5. Найдите производные функций, пользуясь непосредственно определением производной (общим правилом нахождения производной по определению):

$$1) y = 3x. \quad [y' = 3]$$

$$2) y = 8 - x^2. \quad [y' = -2x]$$

$$3) y = (4x+1)^2. \quad [y' = 8(4x+1)]$$

$$4) y = \frac{x^3}{3}. \quad [y' = x^2]$$

6. Найти производные следующих функций:

$$1) y = 1 - 2x^2. \quad [y' = -6x^2]$$

$$2) y = \frac{x+2}{x}. \quad [y' = -\frac{2}{x^2}]$$

$$3) y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5. \quad [y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}]$$

$$4) y = x^2(2x-1). \quad [y' = 6x^2 - 2x]$$

$$5) y = (x^3+3)(4x^2-5). \quad [y' = 20x^4 - 15x^2 + 24x]$$

$$6) y = (x-5)^4(x+3)^5. \quad [y' = (x-5)^3(x+3)^4(9x-13)]$$

$$7) y = \frac{x^3-3}{5-x^2}. \quad [y' = -\frac{x^4-15x^2+6x}{(5-x^2)^2}]$$

$$8) y = \frac{5x}{(5-2x)^3}. \quad [y' = \frac{25+20x}{(5-2x)^4}]$$

$$9) y = \sqrt[3]{6x^2 - 5}. \quad [y' = \frac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2 - 5)^2}}]$$

$$10) y = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 4}}. \quad [y' = -\frac{5x}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}]$$

$$11) y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}. \quad [y' = \frac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2 + x - 6}}]$$

$$12) y = \cos^2 \frac{x}{2}. \quad [y' = -\frac{\sin x}{2}]$$

$$13) y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}. \quad [y' = \frac{5 \cos x - \cos 5x}{2 \cos^2 3x}]$$

$$14) y = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x. \quad [y' = x^2 \cos x]$$

$$15) y = \operatorname{tg}^4(x^2 + 1). \quad [y' = \frac{8x \operatorname{tg}^3(x^2 + 1)}{\cos^2(x^2 + 1)}]$$

$$16) y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}. \quad [y' = -\frac{4x - \sin x}{4x\sqrt{x} \cos^2 x}]$$

$$17) y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}. \quad [y' = -\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}]$$

$$18) y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad [y' = \frac{1}{\sin x}]$$

$$19) y = (x^2 - 4x + 8)e^{\frac{x}{2}}. \quad [y' = \frac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}]$$

$$20) y = \ln(e^{-x} + xe^{-x}). \quad [y' = -\frac{x}{1+x}]$$

$$21) y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}. \quad [y' = -\frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{ctg} \frac{2x+4}{x+1}]$$

$$22) y = \arcsin(e^{x^2}). \quad [y' = \frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1 - e^{2x^2}}}]$$

7. Напишите уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке $A(2; 4)$.

$$[y = 4x - 4]$$

8. Напишите уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точке

$(0; \pi)$.

$$[y = \pi - x]$$

9. Найдите угловой коэффициент к кривой $y = 5 - 3x^2$ в точке с абсциссой $x = -2$.

$$[k = 12]$$

10. Лифт после включения движется по закону $s = 1,5t^2 + 2t + 12$, где s - путь (в мерах), t - время (в секундах). Найдите скорость лифта в момент времени $t = 2$.

$$\left[8 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) \right]$$

11. Найдите дифференциалы следующих функций:

1) $y = (a^2 - x^2)^2$.

$$[dy = -4x(a^2 - x^2)dx]$$

2) $y = \sqrt{4 + x^2}$.

$$\left[dy = \frac{xdx}{\sqrt{4 + x^2}} \right]$$

3) $y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

$$\left[dy = \frac{dx}{1 - x^2} \right]$$

4) $y = \arctg(x^2)$.

$$\left[dy = \frac{2xdx}{1 + x^4} \right]$$

5) $y = e^{x^2} + x + 1$.

$$[dy = (2xe^{x^2} + 1)dx]$$

6) $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

$$\left[dy = -\frac{1}{2} \sin x dx \right]$$

12. Найдите с помощью дифференциала приближенные значения:

1) $\sqrt[3]{1,1}$.

$$[\sqrt[3]{1,1} \approx 1,033]$$

2) $\sqrt[5]{1,02}$

$$[\sqrt[5]{1,02} \approx 1,004]$$

3) $\sqrt[3]{26,19}$

$$[\sqrt[3]{26,19} \approx 2,97]$$

4) $\ln 1,007$

$$[\ln 1,007 \approx 0,007]$$

13. Найдите производные высших порядков следующих функций:

1) $y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 1$; $y'' = ?$.

$$[y'' = 20x^3 - 36x^2 + 6x - 10]$$

2) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; $y''' = ?$.

$$[y''' = 12]$$

3) $y = x^3 + 3x^2 + 4$; $y^V = ?$.

$$[y^V = 0]$$

4) $y = x \ln x$; $y'' = ?$.

$$[y'' = \frac{1}{x}]$$

5) $y = \arctg x$; $y'' = ?$.

$$[y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}]$$

14. Вычислить предел функции используя правило Лопиталья:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}$. [$\frac{1}{2}$]

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$. [-3]

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$. [1]

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$. [0]

5) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$. [$\frac{1}{6}$]

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$. [0]

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. [1]

8) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$. [$-\frac{3}{5}$]

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$. [$\frac{a^2}{b^2}$]

10) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$. [$\frac{1}{2}$]

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$. [$\frac{1}{10}$]

12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. [1]

13) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$. [1]

Тест для самопроверки

Тема: «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1. Производной функции одной переменной называют...
- a. Отношение приращения функции к приращению аргумента
 - b. Предел отношения функции к приращению аргумента (когда приращение аргумента стремится к нулю)
 - c. Отношение предела функции к аргументу
 - d. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента (когда приращение аргумента стремится к нулю)
2. Первая производная функции показывает...
- a. Скорость изменения функции
 - b. Направление функции
 - c. Приращение функции
 - d. Приращение аргумента функции
3. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке, равен...
- a. Отношению значения функции к значению аргумента в этой точке
 - b. Значению производной первого порядка функции в этой точке
 - c. Значению функции в этой точке
 - d. Значению тангенса производной функции в этой точке
4. Производная второго порядка функции $\ln 8x$ равна...
- a. $\frac{1}{x}$, b. $-\frac{1}{x^2}$, c. $\frac{1}{x^2}$, d. x^2
5. Дифференциал функции равен...
- a. отношению приращения функции к приращению аргумента
 - b. произведению приращения функции на приращение аргумента
 - c. произведению производной на приращение аргумента
 - d. приращению аргумента
6. Дифференциал постоянной равен...
- a. этой постоянной
 - b. произведению данной постоянной на величину dx

с. бесконечно большой величине

d. нулю

7. Укажите функции, для которых существует конечная производная в каждой точке числовой оси

a. $y = \ln x$, b. $y = |\sin x|$, c. $y = x^3$, d. $\frac{1}{x}$

8. Если функция $y(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $y(a) = y(b)$, то на $(a; b)$ можно найти хотя бы одну точку, в которой...

a. функция не определена

b. производная функции не существует

с. нельзя провести касательную к графику функции

d. производная функции обращается в ноль

9. Производная функции $y = \ln \frac{x+2}{2x-1}$ равна ...

a. $-\frac{5}{(x+2)(2x-1)}$, b. $\frac{5}{(x+2)(2x-1)}$

с. $\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}$, d. $\frac{2x-1}{x+2}$

10. Производная второго порядка функции $y = e^{5-2x}$ равна...

a. $4e^{5-2x}$, b. $-4e^{5-2x}$, c. $25e^{5-2x}$, d. e^{5-2x}

11. Производная функции $y = \operatorname{ctg}^6 3x$ равна

a. $y' = 6 \cdot \operatorname{tg}^5 3x \cdot \frac{1}{\sin^2 3x}$

b. $y' = 18 \cdot \operatorname{ctg}^4 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x}$

с. $y' = -18 \cdot \operatorname{ctg}^5 3x \cdot \frac{1}{\sin^2 3x}$

d. $y' = 18 \cdot \operatorname{ctg}^5 3x$

12. Угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = 2x^2 - 3$ в точке $x_0 = -1$ равен

a. 4, b. - 4, c. 5, d. - 3

13. Найти дифференциал функции $y = e^{6x}$.

a. $dy = e^{6x} dx$ b. $dy = -e^{6x} dx$ c. $dy = 6e^{6x} dx$ d. $dy = -3e^{6x} dx$

14. Если в точке x функции $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ имеют производные, причем в этой точке функция $\varphi(x)$ отлична от нуля, то частное этих функций имеет в точке x производную, которая вычисляется по формуле

a. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$

b. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

c. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v'}{v^2}$

d. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$

15. Предел отношения (если он существует) приращения $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x к приращению Δx аргумента, при условии, что приращение аргумента Δx стремится к нулю,

т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, называется

a. непрерывностью $y = f(x)$ в точке x

b. производной функции $y = f(x)$ в точке x

c. приращением аргумента x

d. пределом функции $y = f(x)$ в точке x

16. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t сек, $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$. Найти скорость движения данной точки в момент времени 2 сек

a. 6, b. 2, c. 8, d. 0

17. Найти производную $y'(1)$, если $y = \ln(x^2 + 5)$

a. $1/3$, b. 1, c. 2, d. 0, e. 3

18. Если в некоторой точке x функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеют производные, то производная от суммы этих функций $(f(x) + \varphi(x))'$ равна

- a. $f(x) - \varphi'(x)$ b. $f'(x) - \varphi(x)$ c. $f'(x) \cdot \varphi'(x)$
d. $f(x) + \varphi'(x)$ e. $f'(x) + \varphi'(x)$

19. Производная функции $y = 3^{2x-1}$ равна

- a. $y' = 3^{2x-1}$ b. $y' = (2x-1)3^{2x-1}$ c. $y' = 2 \cdot 3^{2x-1} \ln 3$
d. $y' = 3^{2x-1} \cdot \ln 2 \cdot 3$ e. $y' = (2x-1) \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 2$

20. Производная функции $y = e^{4x-5}$ равна

- a. $y' = 4e^{4x-5}$ b. $y' = 5e^{4x-5}$ c. $y' = (7x-5) \cdot e^{4x-6}$
d. $y' = (7x-5) \cdot e^{4x-5}$ e. $y' = 2 \cdot e^{4x-5}$

§9. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

9.1 Признаки возрастания и убывания функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и x_1, x_2 – любые две точки этого отрезка, для которых выполнено условие $x_1 < x_2$. Тогда, функцию $f(x)$ называют на $[a, b]$:

- 1) возрастающей, если $f(x_1) < f(x_2)$;
- 2) неубывающей, если $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- 3) убывающей, если $f(x_1) > f(x_2)$;
- 4) невозрастающей, если $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Во всех четырех случаях функцию называют монотонной на $[a, b]$, причем в случаях 1) и 3) говорят, что функция строго монотонна, а в случаях 2) и 4) – просто монотонна.

Замечание. Для возрастающей функции приращение аргумента Δx и соответствующее приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ имеют одинаковый знак, поэтому $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. Для убывающей функции Δx и Δf имеют разные знаки, поэтому $\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$.

Теорема (признак монотонности функции). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in [a, b]$. Тогда функция $f(x)$ - неубывающая (невозрастающая) на отрезке $[a, b]$.

Теорема. (Достаточное условие возрастания функции)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Функция возрастает на $[a, b]$, если

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Пусть x_1, x_2 – любые два числа из $[a, b]$, такие, что $x_1 < x_2$. Докажем, что $f(x_1) < f(x_2)$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где c удовлетворяет неравенству $x_1 < c < x_2$. По условию теоремы $f'(c) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то есть $f(x_1) < f(x_2)$. Теорема доказана.

Теорема. (Необходимое условие возрастания функции)

Если функция $f(x)$ непрерывна и возрастает на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , то $f'(x) > 0$ для любого x из интервала (a, b) .

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Дадим аргументу приращение Δx , тогда функция получит приращение $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$, поэтому, если $\Delta x > 0$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, а если

$\Delta x < 0$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. В обоих случаях $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$, а потому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, то есть $f'(x_0) \geq 0$. Теорема доказана.

Аналогичные теоремы справедливы для убывающей функции, только условие $f'(x) > 0$ заменяется на условие: $f'(x) < 0$.

Сформулируйте и докажите достаточное условие и необходимое условие для убывания функции.

Пример. Исследовать на монотонность (то есть возрастание и убывание) функцию:

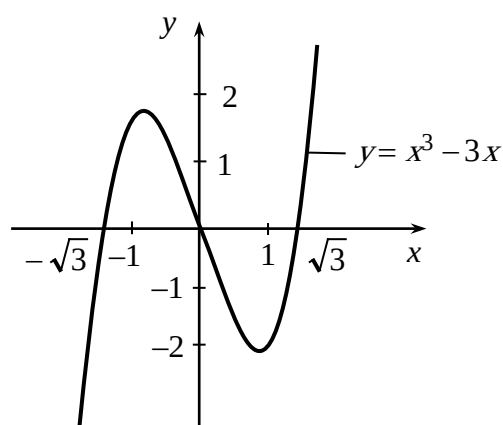
$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Решение. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

Неравенство $f'(x) > 0$, то есть $3(x^2 - 1) > 0$, справедливо для $x < -1$ и для $x > 1$.

Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Поскольку

неравенство $f'(x) < 0$, то есть $3(x^2 - 1) < 0$ справедливо для $x \in (-1, 1)$, то на интервале $(-1, 1)$ функция $f(x)$ убывает.



Построим график функции $y = x^3 - 3x$, используя ее значения в точках:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -\sqrt{3}, \quad x_5 = \sqrt{3}:$$

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(0) = 0, \quad f(-\sqrt{3}) = 0, \quad f(\sqrt{3}) = 0.$$

Заметим, что в точке $x_1 = -1$ значение $f(-1)$ больше, чем значение $f(x)$ в соседних с x_1 точках. Говорят, что в точке x_1 функция имеет максимум (локальный максимум). Аналогично, $f(x_2) < f(x)$ для x , близких к x_2 . В этом случае говорят, что в точках x_2 функция имеет минимум (локальный минимум).

Можно использовать схему для исследования функции на монотонность.

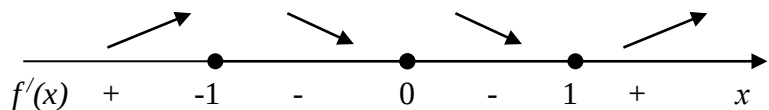
Схема исследование дифференцируемой функции на возрастание и убывание

1) Находим точки из области определения функции $f(x)$, в которых производная функции равна нулю или не существует. Эти точки называют **критическими точками 1-го рода**, они разбивают область определения функции $f(x)$ на интервале монотонности (так как на каждом из них производная $f'(x)$ сохраняет знак).

2) Исследуем знак $f'(x)$ на каждом из этих интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) > 0$, то на этом интервале график функции возрастает, если же $f'(x) < 0$, то на этом интервале график функции убывает.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Её производная $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ существует в области определения функции $f(x)$ и $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$. Отметим на числовой оси Ox точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Эти точки разбивают числовую ось на четыре интервала: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.



Нетрудно исследовать знак производной, вычислив ее значение в «удобных» контрольных точках внутри каждого интервала.

$$f'(-2) = 1 - \frac{1}{(-2)^2} = 0,75 > 0,$$

$$f'(-0,5) = 1 - \frac{1}{(-0,5)^2} = -3 < 0,$$

$$f'(0,5) = 1 - \frac{1}{(0,5)^2} = -3 < 0,$$

$$f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 0,75 > 0.$$

Так как, на интервалах $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ первая производная положительная ($f'(x) > 0$), то график функции на этих интервалах

возрастает. Так как на интервалах $(-1,0)$ и $(0,1)$ первая производная отрицательная ($f'(x) < 0$), то на этих интервалах график функции убывает.

9.2 Экстремум функции

Определение. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие

$$f(x) \leq f(x_0), (f(x) \geq f(x_0)).$$

Максимум и минимум функции называют экстремумами функции, а точка x_0 - точкой экстремума.

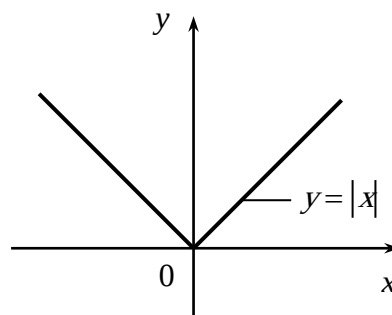
Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 является точкой максимума. Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак с «-» на «+», то x_0 является точкой минимума. Если производная не меняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

Теорема. (Необходимое условие существования экстремума) Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в некоторой точке, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Доказательство. Пусть для определенности x_0 – точка максимума, тогда найдется окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 такая что, для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $f(x) < f(x_0)$, то есть $f(x_0)$ – наибольшее значение функции $f(x)$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

В качестве примера приведем функцию $f(x) = |x|$.



Очевидно, что $x_0 = 0$ является точкой минимума, так как $|0| < |x|$ для любого $x \neq 0$. А в точке $x_0 = 0$ производной $f'(0)$ не существует.

Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, то точку x_0 будем называть **критической** (или подозрительной на экстремум). Критическая точка может и не быть точкой экстремума.

Теорема. (Первое достаточное условие экстремума)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и некоторой ее окрестности, дифференцируема в этой окрестности, за исключением, может быть, точки x_0 , и x_0 – критическая точка для функции $f(x)$ (то есть $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует). Тогда: 1) если при $x < x_0$ производная $f'(x) > 0$, а для $x > x_0$: $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимума; 2) если при $x < x_0$: $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$: $f'(x) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Доказательство. Пусть для $x < x_0$: $f'(x) > 0$, а для $x > x_0$: $f'(x) < 0$, то есть при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с «+» на «-». Тогда слева от x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от x_0 функция $f(x)$ убывает, следовательно, x_0 – точка максимума. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема. (Второе достаточное условие экстремума).

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и некоторой ее окрестности и пусть $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

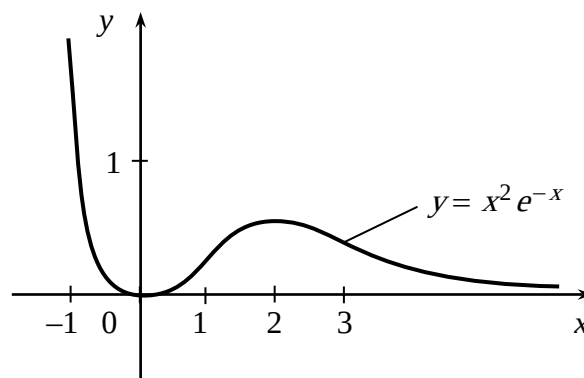
Доказательство. Пусть $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$. Покажем, что x_0 – точка минимума:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

Тогда в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$. Отсюда, если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, а если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$, то есть слева от точки x_0 функция $f(x)$ убывает, а справа –

возрастает, это означает, что x_0 – точка минимума. Аналогично доказывается вторая часть теоремы для $f''(x_0) < 0$.

При исследовании функции на монотонность и экстремумы бывает удобно результаты заносить в таблицу. Как это делается, покажем в следующем примере.



Пример. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $f(x)=x^2e^{-x}$. Построить ее график.

Решение. Эта функция определена и непрерывна на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$. Найдем производную: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$. Тогда $f'(x)=0$ при $x_1=0$ и $x_2 = 2$, где x_1, x_2 – критические точки. Эти точки разбивают всю числовую ось на три интервала: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$. Составим таблицу, в первой строке которой поместим указанные точки и интервалы, во второй строчке – сведения о производной $f'(x)$ в точках и на интервалах, а в третьей – поведение данной функции $f(x)$:

x	$(-\infty, 0)$	$x_1 = 0$	$(0, 2)$	$x_2 = 0$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$
$f(x)$	убывает	$y_{\min}(0) = 0$	возрастает	$y_{\max}(2) = \frac{4}{e^2}$	убывает

Определим знак $f'(x)$ на каждом из интервалов: если $x \in (-\infty, 0)$, то $f'(x) < 0$; если $x \in (0, 2)$, то $f'(x) > 0$; если $x \in (2, +\infty)$, то $f'(x) < 0$. Отсюда определяется поведение функции $f(x)$: на первом и последнем интервалах $f(x)$ убывает, а на втором – возрастает. Отсюда следует, что $x_1 = 0$ является точкой минимума, $y_{\min}(0) = 0$, а $x_2 = 2$ – точка максимума, $y_{\max}(2) = \frac{4}{e^2} =$

0,54. Для построения графика заметим, что $f(x) > 0$ для всех x , отличных от нуля, и $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty, \quad f(-1) = e \approx 2,7.$$

График этой функции изображен на рисунке.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

Решение. Область определения функции $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, в каждом из этих интервалов функция непрерывна. Найдем $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{x^3}.$$

Теперь найдем критические точки функции, для этого решим уравнение $f'(x) = 0$: $1 - \frac{4}{x^2} = 0$, отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = +2$ –

критические точки. Для нахождения критических точек, вычислим $f''(x)$ в точках x_1 и x_2 . Так как

$$f''(-2) = \frac{8}{(-2)^3} = -1 < 0, \quad \text{то } x_1 = -2 \text{ является точкой максимума и}$$

$$f_{\max}(-2) = -2 - \frac{4}{2} = -4. \quad \text{Для } x_2: \quad f''(2) = \frac{8}{8} = 1 > 0, \quad \text{поэтому } x_2 = 2 \text{ – точка}$$

$$\text{минимума, } f_{\min}(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4.$$

Таким образом, функция $f(x) = x + \frac{4}{x}$ имеет максимум при $x_1 = -2$,

$$f(-2) = -4 \text{ и имеет минимум при } x_2 = 2, \quad f(2) = 4.$$

Можно использовать схему для нахождения точек экстремума.

Схема исследование дифференцируемой функции на экстремум

1. Найти производную функции первого порядка.

2. Найти те значения x , при которых первая производная обращается в нуль. Для этого нужно приравнять найденную производную к нулю и решить уравнение с одной неизвестной.

3. Установить знак производной вблизи критических точек и определить характер экстремума.

4. Вычислить значение функции в точках максимума и минимума.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ на экстремум.

Решение. Используем для решения приведенную схему.

1. Данная функция определена и непрерывна при всех x . Найдем производную функции первого порядка, получим

$$f'(x) = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = 2 \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Найдем точки, подозрительные на экстремум.

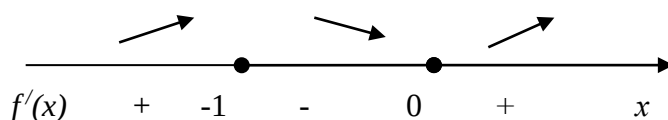
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} \neq 0; 1 + \sqrt[3]{x} = 0.$$

Следовательно, производная не существует в точке $x_1 = 0$ и обращается в нуль, если $1 + \sqrt[3]{x} = 0$, то есть при $x_2 = -1$.

3. Отметим точки $x = 0$ и $x = -1$ на числовой оси и разобьем числовую ось на три числовых промежутка $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; \infty)$. Определим знак производной функции на полученных промежутках.

$$f'(-8) = 2 \frac{1 + \sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{-8}} = 1 > 0; \quad f'\left(-\frac{1}{8}\right) = 2 \frac{1 + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}}{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}} = -1 < 0; \quad f'(1) = 2 \frac{1 + \sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}} = 4 > 0.$$

Так как на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; \infty)$ первая производная положительная, то на этих промежутках график функции возрастает. Так как на промежутке $(-1; 0)$ первая производная отрицательная, то на этом промежутке график функции убывает.



Так как, при переходе через точку $x = -1$, производная дифференцируемой функции меняет знак с «+» на «-», то $x = -1$ – абсцисса точки максимума. При переходе через точку $x = 0$, производная дифференцируемой функции меняет знак с «-» на «+», но $x = 0$ – не является абсциссой точки минимума, так как при $x = 0$ первая производная не существует.

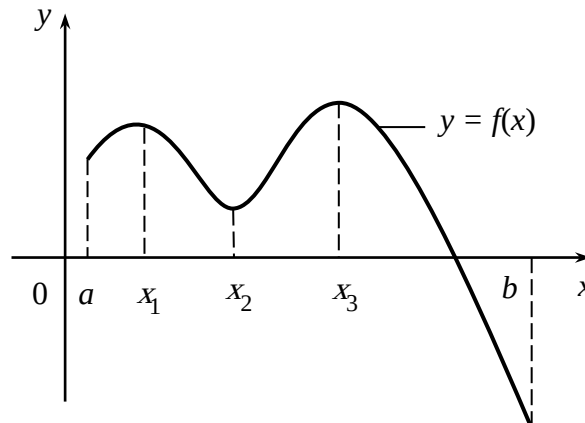
4. Вычислим значение функции в точке $x = -1$, получим

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3\sqrt[3]{(-1)^2} = -2 + 3 = 1.$$

Таким образом, точка $(-1; 1)$ – точка максимума графика функции $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего значения и своего наибольшего значения. Иногда требуется найти наименьшее или наибольшее значение такой функции.

Если на отрезке $[a, b]$ есть точки минимума и максимума функции $f(x)$, то наименьшее значение функция будет принимать либо в одной из точек минимума, либо на конце отрезка $[a, b]$. Аналогично для наибольшего значения.



Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$, непрерывной на отрезке:

- найти критические точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ функции $f(x)$, принадлежащие отрезку $[a, b]$;
- вычислить значения функции $f(x)$ в критических точках и на концах отрезка;

• из этих значений выбрать самое большое и самое малое, эти числа и будут наибольшим и наименьшим значениями $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Найдем критические точки для данной функции, для этого вычислим производную первого порядка и найдем значения x , при которых эта производная обращается в 0.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1);$$

$$4x(x^2 - 1) = 0; \quad 4x = 0 \text{ или } x^2 - 1 = 0;$$

$$\text{или } x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Таким образом, $f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, все три критические точки принадлежат данному отрезку. Вычислим значения функции в точках $-2, -1, 0, 1, 2$:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13, \quad f(-1) = 1 - 2 + 5 = 4,$$

$$f(0) = 5, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 13.$$

Из найденных значений самое малое число 4, а самое большое число 13.

Итак, наименьшее значение функции равно 4, наибольшее значение равно 13.

9.3 Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Пусть $f(x)$ – функция, дифференцируемая на интервале (a, b) . Рассмотрим кривую, являющуюся графиком функции $y = f(x)$.

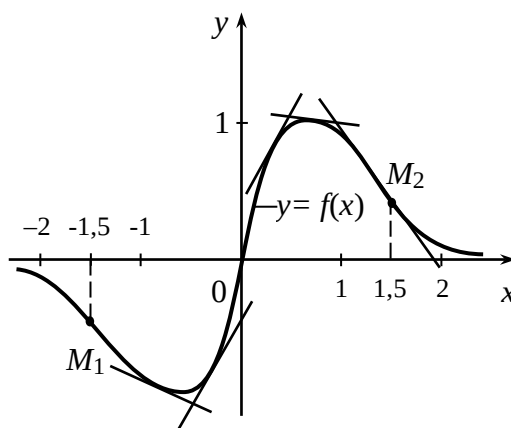
Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым (*выпуклым вверх*) на интервале (a, b) , если график на этом промежутке расположен ниже касательной, проведенной к графику этой функции в любой точке $x \in (a, b)$. Если же на интервале (a, b) график

функции $y = f(x)$ располагается выше любой касательной, проведённой к графику этой функции, то его называют вогнутым (выпуклым вниз).

Определение. Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости.

Пример. Кривая $y = f(x)$, приведенная на рисунке, является выпуклой на интервалах $(-2; -1,5)$ и $(0; 1,5)$, вогнутой на интервалах $(-1,5; 0)$ и $(1,5; 2)$. Точки

$M_1(-1,5; f(-1,5))$, $O(0,0)$, $M_2(1,5; f(1,5))$ – точки перегиба.



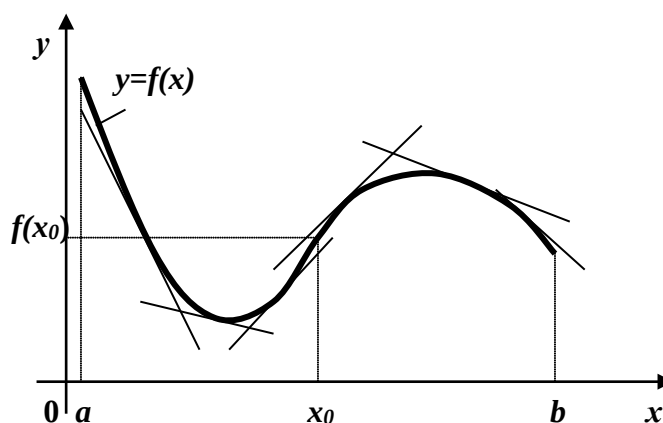
Теорема (необходимый и достаточный признак выпуклости и вогнутости). Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна $f''(x) \geq 0$ (отрицательна $f''(x) \leq 0$) внутри некоторого промежутка X , то график функции $f(x)$ выпуклый (вогнутый) на этом промежутке.

Теорема (необходимый признак существования точки перегиба). Пусть точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, тогда производная дважды дифференцируемой функции равна 0, то есть $f''(x) = 0$.

Замечание. График функции может иметь точку перегиба и при $x = x_0$ таком, что вторая производная не существует. Поэтому возможными точками перегиба («подозрительными на перегиб») являются точки, где вторая производная или равна нулю, или не существует. Такие точки называют **критическими точками 2-го рода**. Заметим, что не всякая такая точка является точкой перегиба.

Например, для функций $y = x^3$ и $y = x^4$ вторые производные $y'' = 6x$ и $y'' = 12x^2$ при $x = 0$ обращаются в нуль. При этом точка $O(0;0)$ для графика функции $y = x^3$ является точкой перегиба, а для графика функции $y = x^4$ не является. Выясним, в каком случае критическая точка 2-го рода будет точкой перегиба.

Теорема (*достаточный признак существования точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности критической точки 2-го рода $x = x_0$ и дважды непрерывно дифференцируема (хотя бы в проколотой окрестности точки x_0). Если вторая производная меняет знак при переходе через x_0 , то $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.



На приведенном рисунке график функции $y = f(x)$ является вогнутым на интервале (a, x_0) и выпуклым на интервале (x_0, b) . Точка $(x_0, f(x_0))$ является **точкой перегиба**.

Пример. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба график функции $y = x^2 e^{-x}$.

Решение.

$$f(x) = x^2 e^{-x},$$

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x},$$

$$f''(x) = 2e^{-x} - 2x e^{-x} - 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} = e^{-x}(2 - 4x + x^2).$$

Найдем значения x , при которых $f''(x) = 0$ и интервалы знакопостоянства второй производной $f''(x)$:

$$f''(x) = 0, \Rightarrow e^{-x}(2 - 4x + x^2) = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} = 0,58 \text{ и } x_2 = 2 + \sqrt{2} = 3,41.$$

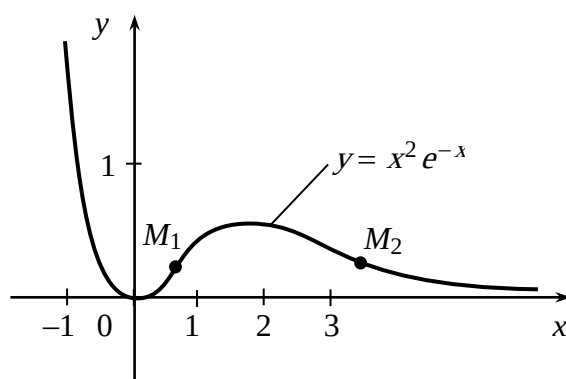
Значения функции $f(x)$ в точках x_1, x_2 :

$$y_1 = f(x_1) = 0,34 \text{ и } y_2 = f(x_2) = 0,38.$$

Результаты исследования занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 2 - \sqrt{2})$	$x_1 = 2 - \sqrt{2}$	$(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$	$x_2 = 2 + \sqrt{2}$	$(2 + \sqrt{2}, +\infty)$
$f''(x)$	$f''(x) > 0$	$f''(x_1) = 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x_2) = 0$	$f''(x) > 0$
$f(x)$	Кривая вогнутая	$M_1(x_1, y_1)$ – точка перегиба	Кривая выпуклая	$M_2(x_2, y_2)$ – точка перегиба	Кривая вогнутая

Построим график функции $y = x^2 e^{-x}$ с учетом исследования примера в пункте 9.2.



Можно использовать схему для исследования функции на точки перегиба.

Схема исследования функции на выпуклость (вогнутость) и точки перегиба

1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах вогнутости (выпуклости) и точек перегиба.

4. Найти значение функции в точках перегиба.

Пример. Исследовать на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба графика функции $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$.

Решение.

1. Используя определение модуля, данную функцию можно записать в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^5, & x \leq 1 \\ 3 - x^5, & x > 1 \end{cases}.$$

Заметим, что функция непрерывна $\forall x \in R$. Вычислим производную первого порядка, получим

$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4, & x \leq 1 \\ -5x^4, & x > 1 \end{cases}.$$

При $x = 1$ производная $f'(x)$ не существует ($f'(1-0) = 5 \neq f'(1+0) = -5$), поэтому $f''(1)$ также не существует. При $x \neq 1$ имеем:

$$f''(x) = \begin{cases} 20x^3, & x \leq 1 \\ -20x^3, & x > 1 \end{cases}.$$

2. Критические точки 2-го рода:

- $x_1 = 0$, так как $f''(0) = 0$,
- $x_2 = 1$, так как $f''(1)$ не существует.

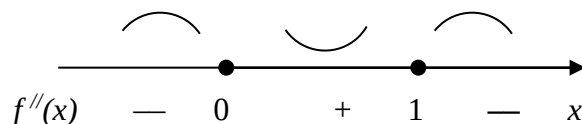
Отметим эти точки на числовой оси.

3. В каждом из полученных интервалов определим знак второй производной:

$$f''(-1) = -20 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0);$$

$$f''(0,5) = 2,5 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1);$$

$$f''(2) = -160 \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in (1,+\infty).$$



Согласно вышеизложенным теоремам делаем вывод: на интервале $(-\infty, 0)$ график выпуклый, на $(0, 1)$ – вогнутый, на $(1, +\infty)$ – выпуклый. Так как при переходе через точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ вторая производная меняет знак на противоположный, то они являются абсциссами точек перегиба.

4. Найдем значение функции в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Получим

$$f(0) = 2 - |0^5 - 1| = 1, \quad f(1) = 2 - |1^5 - 1| = 2.$$

Таким образом, точки $(0, 1)$ и $(1, 2)$ - точки перегиба графика функции $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$.

9.4 Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, то есть при $x \rightarrow \pm\infty$ или вблизи точек разрыва второго рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют асимптотами.

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Теорема (необходимый и достаточный признак существования вертикальной асимптоты). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и хотя бы один из пределов функции при $x \rightarrow x_0 - 0$ (слева) или при $x \rightarrow x_0 + 0$ (справа) равен бесконечности, то есть

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тогда прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0 так как в этом случае $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения (a, b) , если a и b – конечные числа.

Пример. Найти вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. Данная функция имеет единственную точку разрыва $x_1 = -1$ (значение $f(-1)$ не определено).

Так как $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left(\frac{-1}{+0} \right) = -\infty$, то прямая $x = -1$ – единственная вертикальная асимптота.

Займёмся нахождением наклонных асимптот, уравнения которых можно записать в виде

$$y = kx + b.$$

Теорема (необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты). Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$. Тогда прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Тогда прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Экономический смысл выпуклости функции

Закон убывающей доходности: с увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает.

Иными словами, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δx - приращение ресурса, а Δy - приращение выпуска продукции, уменьшается при увеличении x . Таким образом, закон убывающей доходности формулируется так: функция $y = f(x)$, выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией выпуклой вверх.

Закон убывающей полезности: с ростом количества товара дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает.

Функция полезности $U = U(x)$, где x - товар, U - полезность, есть величина субъективная для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективная для общества в целом. Очевидно, закон убывающей полезности можно переформулировать так: функция полезности является функцией выпуклой вверх.

9.5 Схема полного исследование функции методами дифференциального исчисления и построение её графика

Исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
 2. Выяснить, является ли функция чётной, нечётной, периодической.
- При наличии какого-либо из этих свойств можно использовать симметрию при построении графика.

3. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в этих точках.

4. Определить асимптоты графика и поведение функции на границе области определения.

5. С помощью производной первого порядка найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции.

6. С помощью производной второго порядка найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.

7. Используя результаты исследования, построить график функции. При необходимости можно дополнительно найти значения функции в некоторых точках из тех промежутков, для которых предыдущие пункты исследования дали недостаточно информации.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x = 1$ (в этом случае знаменатель обращается в нуль, то есть $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$).

2. Выясним, является ли данная функция четной, нечетной или общего вида:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x) - 1} = \frac{x^2 + 1}{-x - 1} \neq -f(x) \neq f(x) \text{ - функция общего вида.}$$

3. Выясним характер разрыва функции при $x = 1$. Для этого рассмотрим односторонние пределы функции в точке $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \left(\frac{2}{+0} \right) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \left(\frac{2}{+0} \right) = \infty.$$

Полученный результат говорит о том, что точка $x = 1$ является точкой разрыва 2-го рода для данной функции, а прямая с уравнением $x = 1$ — вертикальной асимптотой графика функции.

4. Найдем наклонные асимптоты графика функции.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \div x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1.$$

Следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

5. Найдем точки экстремума функции и определим интервалы возрастания и убывания функции.

Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции, приравняем ее к нулю, найдем критические точки, и интервалы возрастания и убывания.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1)'(x - 1) - (x^2 + 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x - 1 \neq 0 &\Rightarrow x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 &\Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

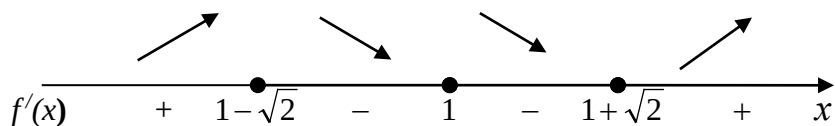
Таким образом, получили две точки, подозрительные на экстремум $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Отметим эти точки, а так же точку $x = 1$ на числовой оси и разобьем числовую ось на четыре промежутка $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; 1)$, $(1; 1 + \sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$. На каждом из промежутков определим знак первой производной.

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1}{(-1 - 1)^2} = \frac{2}{4} = 0,5 > 0;$$

$$f'(0) = \frac{(0)^2 - 2 \cdot 0 - 1}{(0 - 1)^2} = \frac{-1}{1} = -1 < 0;$$

$$f'(2) = \frac{(2)^2 - 2 \cdot 2 - 1}{(2 - 1)^2} = \frac{-1}{1} = -1 < 0;$$

$$f'(3) = \frac{(3)^2 - 2 \cdot 3 - 1}{(3 - 1)^2} = \frac{2}{4} = 0,5 > 0.$$



Получаем, что функция возрастает на интервалах $(-\infty; 1 - \sqrt{2}]$, $[1 + \sqrt{2}; \infty)$ и убывает $[1 - \sqrt{2}; 1)$, $(1; 1 + \sqrt{2})$.

Так как при переходе через точку $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ первая производная меняет знак с «+» на «-», то она является абсциссой точки максимума. Так как при переходе через точку $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ первая производная меняет знак с «-» на «+», то она является абсциссой точки минимума. Найдем значение функции в этих точках.

$$x_{\max} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow f_{\max}(1 - \sqrt{2}) = \frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}{1 - \sqrt{2} - 1} = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$x_{\min} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow f_{\min}(1 + \sqrt{2}) = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}{1 + \sqrt{2} - 1} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, $A(1 - \sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2})$ - точка максимума, $B(1 + \sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$ - точка минимума.

6. Найдем точки перегиба графика функции и определим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Для этого найдем производную второго порядка, приравняем ее к нулю.

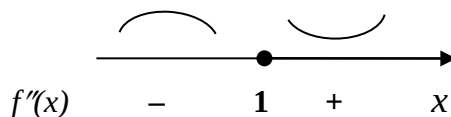
$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

$$f''(x) = 0, \frac{4}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 1.$$

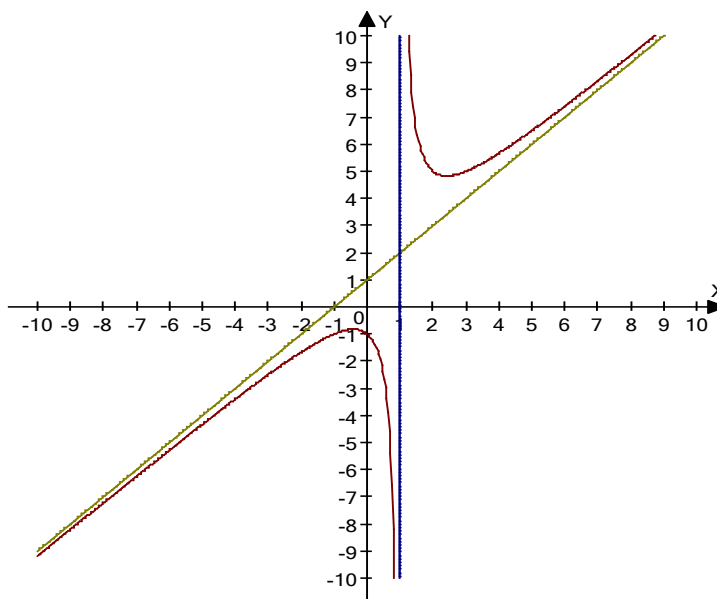
Таким образом, вторая производная в нуль не обращается, следовательно, точек перегиба нет. Отметим на числовой оси точку $x = 1$, разобьем числовую ось на два промежутка $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$. Определим знак второй производной на каждом из промежутков, тем самым определим интервалы выпуклости и вогнутости.

$$f''(0) = \frac{4}{(0-1)^3} = \frac{4}{-1} = -4 < 0,$$

$$f''(2) = \frac{4}{(2-1)^3} = \frac{4}{1} = 4 > 0.$$



7. Используя полученные результаты, строим график функции



На основании экономического смысла производной и аппарата дифференциального исчисления возникает множество экономических задач, связанных с исследованием функций. В частности, представляют интерес экономические понятия и задачи на предельную производительность ресурса, предельный спрос продукции от цены и т.д.

Упражнения

1. Предприятие производит x единиц некоторой однородной продукции в месяц. Исследовать финансовые накопления, если зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой

$$F = -0,02x^3 + 600x - 1000.$$

1. Из экономического смысла независимой переменной следует, что она неотрицательна. Итак,

$$D(F) = [0, \infty).$$

2. $F' = -0,06x^2 + 600$. $F' = 0$ при $x = -100$ и $x = 100$. На промежутке $(0, 100)$ производная положительна, на $(100, \infty)$ - отрицательна. В точке $x = 100$ функция достигает максимума:

$$F_{\max} = F(100) = 39000.$$

Вывод. Финансовые накопления предприятия растут с увеличением объема производства до 100 единиц, при $x = 100$ они достигают максимума, равного 39000 ден.ед., дальнейший рост производства приводит к сокращению финансовых накоплений.

2. Цементный завод производит x тонн цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т цемента. Производительные мощности завода таковы. Что выпуск цемента не может превышать 90 т в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид:

$$K = -x^3 + 98x^2 + 200x.$$

Решение. Удельные затраты - это средние затраты на единицу продукции, в данном случае на 1 т цемента. При объеме производства в x т удельные затраты составят:

$$\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200.$$

Задача сводится к отысканию наибольшего, наименьшего значения функции

$$y = -x^2 + 98x + 200$$

на промежутке $[20, 90]$.

Найдем критические точки функции $y = -x^2 + 98x + 200$.

$$y' = (-x^2 + 98x + 200)' = -2x + 98.$$

$$y' = 0, \text{ то есть } -2x + 98 = 0, \quad x = 49.$$

Так как $49 \in [20, 90]$, то найдем значение функции $\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200$ в точках

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 49, \quad x_3 = 90.$$

$$\frac{K}{x}(20) = -20^2 + 98 \cdot 20 + 200 = 1760.$$

$$\frac{K}{x}(49) = -49^2 + 98 \cdot 49 + 200 = 2601.$$

$$\frac{K}{x}(90) = -90^2 + 98 \cdot 90 + 200 = 920.$$

Таким образом, $\max_{[20, 90]} \frac{K}{x} = f(49) = 2601$, $\min_{[20, 90]} \frac{K}{x} = f(90) = 920$.

Ответ. При объеме производства в 49 т удельные затраты будут наибольшими и составят 2601, а при объеме производства в 90 т удельные затраты будут наименьшими и составят 920.

3. Требуется оградить забором прямоугольный участок земли площадью 294 кв. м. и затем разделить его на две равные части перегородкой. Каковы должны быть размеры участка, чтобы на постройку забора и перегородки было истрачено наименьшее количество материала?

Решение. Обозначим ширину прямоугольного участка через x , а длину через y .

Из условий задачи следует, что $x \in (0, +\infty)$.

Поскольку площадь участка равна 294 кв. м., то

$$x \cdot y = S = 294.$$

Откуда получаем, что

$$y = 294/x,$$

а общая длина P всего забора и перегородки равна:

$$P(x) = 3x + 2y = 3x + 2 \cdot \frac{294}{x}.$$

Найдем производную первого порядка от функции $P(x) = 2x + \frac{588}{x}$ и приравняем к нулю.

$$P'(x) = \left(2x + \frac{588}{x} \right)' = 2 - \frac{588}{x^2},$$

$$2 - \frac{588}{x^2} = 0, \quad x^2 = 588, \quad x = 24.$$

$$\text{Тогда } y = \frac{294}{x} = \frac{294}{24} = 12.25.$$

Таким образом, общая длина ограды представляет собой функцию от одной переменной x , и наша задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции в интервале $(0, +\infty)$.

Ответ: $x = 24$ м, $y = 12.25$ м.

4. Предположим, что на предприятии издержки производства вычисляются по формуле

$$K = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 80x + 300.$$

Предельные издержки

$$K' = x^2 - 10x + 80$$

положительны при любом объеме производства x . Это следует из того, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 80$ отрицателен, а старший коэффициент 1 положителен. Такой трехчлен может принимать только положительные значения.

Вычислим $K'' = 2x - 10$. Легко установить, что $K'' > 0$, если $x > 5$, и $K'' < 0$ при $x < 5$. Следовательно, если выпуск продукции не превышает 5 усл.ед., то издержки производства возрастают все медленнее. Если же $x > 5$, то издержки растут все быстрее.

5. Зависимость спроса от цены описывается функцией

$$d(p) = e^{-2p^2} \quad (p \geq 0).$$

Исследовать функции спроса и выручки от цены, построить их графики.

Решение. Спрос убывает с возрастанием цены, так как

$$d'(p) = -4pe^{-2p^2} < 0.$$

Темп изменения функции

$$d''(p) = 4e^{-2p^2} (4p^2 - 1)$$

отрицателен, если $p < \frac{1}{2}$, и

положителен, когда цена больше

$$\frac{1}{2}.$$

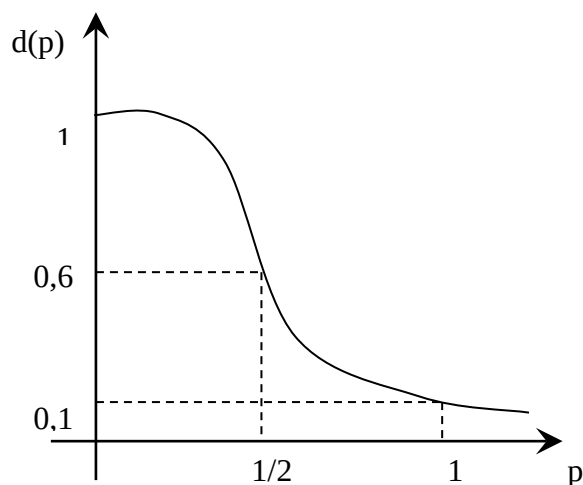


График функции $d(p)$

Выручка от реализации товара по цене p составляет:

$$U(p) = p \cdot d(p) = pe^{-2p^2} \text{ ден.ед.}$$

Производная этой функции

$$U'(p) = e^{-2p^2} (1 - 4p^2)$$

положительна, если $p < \frac{1}{2}$, и отрицательна для $p > \frac{1}{2}$. Это означает, что с

ростом цены выручка вначале увеличивается (несмотря на падение спроса)

и при $p = \frac{1}{2}$ достигает максимального значения, равного

$$U_{\max} = U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,3.$$

Дальнейшее увеличение цены не имеет смысла, так как оно ведет к сокращению выручки.

Темп изменения выручки

$$U''(p) = 4pe^{-2p^2} (4p^2 - 3)$$

положительный, если $p > \frac{\sqrt{3}}{2}$, и отрицательный, пока $p < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

На промежутке $(0, \frac{1}{2})$ функция возрастает все медленнее. Соответствующая часть графика выпукла. Как уже отмечалось, дальнейшее повышение цены невыгодно.

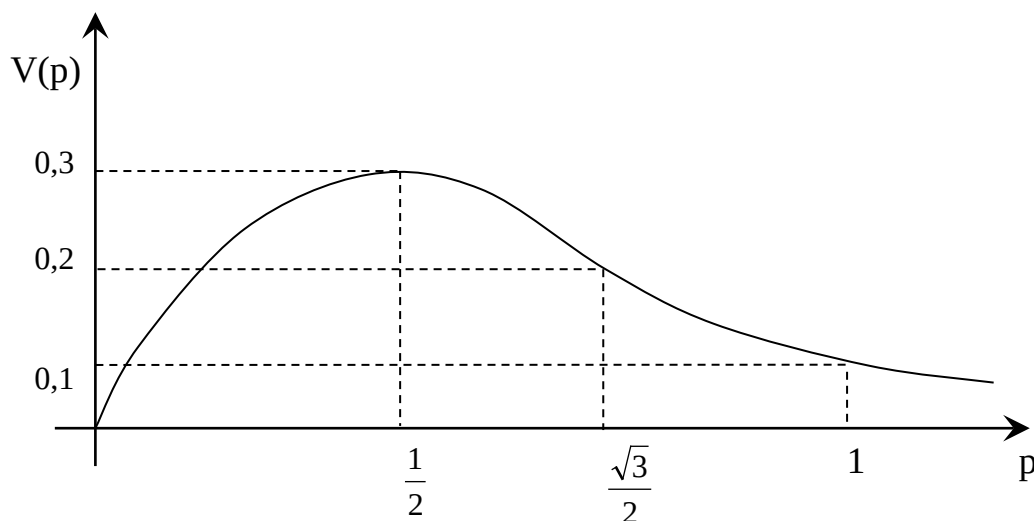


График функции выручки $U(p)$

Для $p > \frac{\sqrt{3}}{2}$ выручка убывает все быстрее и приближается к нулю при неограниченном увеличении цены. На промежутке $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty)$ функция $U(p)$ вогнута. В точке $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0,2)$ график перегибается.

6. Если формула

$$d = \frac{100}{p+1}$$

выражает зависимость спроса на товар от цены на него, то

$$d' = -\frac{100}{(p+1)^2}$$

- скорость изменения спроса, или **предельный спрос**.

Спрос является убывающей функцией цены, т.к. $d' < 0$ при любом значении p . **Темп изменения спроса**

$$d'' = \frac{200}{(p+1)^3} > 0.$$

Другими словами, спрос убывает с нарастающей скоростью. Чем больше цена, тем быстрее уменьшается спрос на товар. Если $p_2 > p_1$, то $d'(p_2) > d'(p_1)$.

7. Объем выпущенной заводом продукции x и выручка z , полученная от ее реализации, связаны следующей зависимостью:

$$z = 10x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{15}x^3.$$

Найдите предельную выручку и постройте ее график. Пользуясь этим графиком, определите, при каком объеме производства выручка максимальна (минимальна). Чему равна при этом предельная выручка? Что это означает?

Замечание. Предельная выручка определяется аналогично предельным издержкам производства (это скорость изменения выручки при данном объеме продаж).

8. Предприятие производит x единиц продукции в месяц и реализует ее по цене

$$P = 25 - \frac{1}{30}x.$$

Суммарные издержки производства составляют:

$$K = \frac{1}{25}x^2 + 5x + 300.$$

Определите, при каком объеме производства прибыль предприятия будет максимальной.

9. Из треугольных обрезков фанеры необходимо сделать заготовки, имеющие форму параллелограмма. Как добиться того, чтобы заготовки имели максимально возможную площадь?

10. Имеется запас меда стоимостью в C рублей. Известно, что с

течением времени стоимость меда повышается по закону $V = Ce^{\sqrt{t}/2}$, а затраты на хранение настолько меньше V , что ими можно пренебречь. С другой стороны, если мед продать, а деньги положить в банк, то на вырученную сумму непрерывно будут начисляться 10% годовых. То есть сумма V_0 , положенная в банк в момент времени $t = 0$, через t лет станет равной

$$V_1 = V_0 e^{t/10} \quad (10\% = \frac{1}{10}).$$

Определите момент времени t_0 , в который наиболее выгодно продать имеющийся запас меда и положить деньги в банк, чтобы через t лет сумма, накапливаемая на счете, была максимальной.

11. Зависимость полных издержек производства K от объема производства x выражается с помощью формулы:

$$K = x^3 - 4x^2 + 9x.$$

Рассчитайте, при каком объеме производства средние издержки минимальны ($K_{cp} = \frac{K}{x}$).

12. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части. То в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

13. Предположим, что функция затрат имеет вид:

$$y = 2x + \ln(x + 1).$$

Определите предельные издержки производства при объеме выпуска $x_1 = 2, x_2 = 9$. При каких значениях x данная функция возрастает (убывает) все быстрее)?

14. Установлено, что предложение данного товара описывается формулой $s = e^p - 1$, где p - цена. Установите вид зависимости предельного предложения (скорости изменения предложения) и темпа

изменения предложения от цены на товар. Как изменение этих параметров характеризует динамику предложения?

15. Функция спроса на товар имеет вид:

$$d = 80 + 16p - p^2.$$

Определите уровни цен, соответствующих максимальному спросу на товар, исчезновению спроса на него. При какой цене предельный спрос (скорость изменения спроса) будет равен нулю, двум, десяти? Чему равен темп изменения спроса? Что это означает? Приведите примеры ситуаций, которые могут быть описаны с помощью функций указанного вида.

16. Зависимость спроса от цены выражается формулой:

а) $d(p) = 10 - 2p$;

б) $d(p) = \frac{100}{p+1}$;

в) $d(p) = 15 + 2p - p^2$.

Опишите динамику изменения спроса на товар и выручки от продажи этого товара, нарисуйте графики функций.

17. Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:

1) $y = 3x - x^3$. [Убывает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, и возрастает на $(-1; 1)$]

2) $y = x^2 - 4x$. [Убывает на $(-\infty; 2)$ и возрастает на $(2; +\infty)$]

3) $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$. [Убывает на $(-1; 1)$ и возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$]

4) $y = 4x - 3$. [Возрастает на $(-\infty; \infty)$]

18. Исследуйте на экстремум следующие функции:

1) $y = 2x^2 - 8$. [Минимум при $x = 0$]

2) $y = 2x - x^2$. [Максимум при $x = 1$]

3) $y = x \ln x$. [Минимум при $x = \frac{1}{e}$]

4) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$. [Минимум при $x = -2$; максимум при $x = 2$]

19. Найдите наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

1) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 2]$. [-13 и 3]

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-1; 2]$. [$-\frac{7}{3}$ и 3]

3) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ на отрезке $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. [$-\frac{4}{3}$ и -1]

4) $y = \operatorname{tg} x - x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. [$\frac{\pi - 4}{4}$ и $\frac{4 - \pi}{4}$]

20. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

1) $y = x^5$. [Точка перегиба $(0; 0)$, выпукла на $(-\infty; 0)$ и вогнута на $(0; +\infty)$]

2) $y = \sqrt[3]{x - 1}$. [Точка перегиба $(1; 0)$, выпукла на $(1; +\infty)$ и вогнута на $(-\infty; 1)$]

3) $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$.

[Точка перегиба $(5; 5)$, выпукла на $(5; +\infty)$ и вогнута на $(-\infty; 5)$]

21. Найти асимптоты следующих кривых:

1) $y = 1 - \frac{4}{x^2}$. [$x = 0$ и $y = 1$]

2) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. [$x = 0$ и $y = x$]

3) $y = \frac{x^2}{x + 1}$. [$x = -1$ и $y = x - 1$]

22. Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1) $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$.

2) $y = \frac{x}{x^2 + 16}$.

3) $y = e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Тест для самопроверки

Тема: «Приложения производной»

1. Сколько точек перегиба имеет функция $y = x^4 + 4x$?
а. Не имеет, б. Одну, в. Две, г. Три
2. Функция $y = x^3 + x$...
а. на интервале $(-\infty; 0)$ возрастает, $(0; +\infty)$ убывает
б. на интервале $(-\infty; 0)$ убывает, $(0; +\infty)$ возрастает
в. всюду убывает
г. всюду возрастает.
3. Функция $y = x^3 - 3x$ убывает на интервале...
а. $(3; +\infty)$, б. $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$
в. $(-1; 1)$, г. не убывает на всей числовой оси
4. Укажите точки экстремума функции $y = (x+1)^2(x-2)$, непрерывной на всей числовой прямой
а. $x = 2$ – абсцисса точки *max*
б. $x = 2$ – абсцисса точки *min*
в. $x = -1$ – абсцисса точки *max*
г. точек экстремума нет
5. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ из приведенных условий выберите достаточное условие убывания
а. $f'(x) < 0$, б. $f''(x) < 0$, в. $f''(x) > 0$, г. $f''(x) = 0$
6. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ из приведенных условий выберите достаточное условие выпуклости (выпуклости вверх)
а. $f'(x) < 0$, б. $f''(x) < 0$, в. $f''(x) > 0$, г. $f''(x) = 0$
7. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ из приведенных условий выберите необходимое условие существования точки перегиба
а. $f'(x) < 0$, б. $f''(x) < 0$, в. $f''(x) > 0$, г. $f''(x) = 0$

8. Наклонная асимптота графика функции $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 2x + 5}$ задается уравнением вида...

- a. $y = 2x - 4$, b. $y = 2x + 4$, c. $y = -2x - 4$, d. $y = -2x + 4$

9. Промежуток убывания функции $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 18x + 1$ имеет вид...

- a. $(-2; 4, 5)$, b. $(-4, 5; 2)$
c. $(-\infty; -2) \cup (4, 5; \infty)$, d. $(-\infty; -4, 5) \cup (2; \infty)$

10. Наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x + 4$ на отрезке $[0; 3]$ равно...

- a. 4, b. 2, c. 1, d. 16

11. Точкой экстремума функции $y = 3x^2 + 2$ является точка

- a. -1, b. 15, c. 3, d. 0

12. Если в некотором промежутке производная данной функции $y = f(x)$ положительна, т.е. $f'(x) > 0$, то функция в этом промежутке

- a. возрастает, b. имеет минимум
c. постоянна, d. убывает

13. Точка с абсциссой $x = x_0$ кривой $y = f(x)$ будет точкой перегиба, если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и выполняется условие

- a. $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_0$ меняет знак
b. $f'(x_0) < 0$
c. $f'(x_0) = 0$
d. при переходе через точку $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак

14. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{3x + 4}{2x - 1}$ является прямая

- a. $y = 2x - 1$ b. $y = 3x + 4$ c. $y = x - 1$ d. $x = \frac{1}{2}$

15. Кривая $y = f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a; b)$, если во всех точках этого интервала выполняется соотношение:

- a. $f''(x) > 0$ b. $f(x) > 0$

c. $f'(x) > 0$

d. $f''(x) < 0$

16. Найти точки *max* и *min* на $[0, 2]$ для функции $f(x) = x^2 - x$

a. $x = \frac{1}{2}$ - точка *min*

b. $x = 0$ - точка *min*

c. $x = 1$ - точка *max*

d. $x = -\frac{1}{2}$ - точка *max*

e. нет точек *max* и *min*

17. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 2x$

a. на $(-\infty; 1]$ - убывает, на $[1; +\infty)$ - возрастает

b. на $(-\infty; 0]$ - убывает, на $[0; +\infty)$ - возрастает

c. на $(-\infty; 1]$ - возрастает, на $(1; +\infty)$ - убывает

d. на $(-\infty; 0]$ - возрастает, на $(0; +\infty)$ - убывает

18. Найти точки экстремума функции $y = 4x - x^2$

a. $x = 2$ - точка *max*

b. нет точек экстремума

c. $x = 0$ - точка *min*

d. $x = 1$ - точка *max*

19. Исследовать на экстремум функцию $y = (x - 1)^4$

a. $x = 1$ - точка *min*

b. $x = 1$ - точка *max*

c. $x = 4$ - точка *max*

d. $x = 4$ - точка *min*

20. Исследовать на экстремум функцию $y = 2 + x - x^2$

a. $x = \frac{1}{2}$ - точка *max*

b. нет точек экстремума

c. $x = 1$ - точка *max*

d. $x = 1$ - точка *min*

e. $x = \frac{1}{2}$ - точка *min*

РАЗДЕЛ VI. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1 Первообразная функция и неопределенный интеграл

В предыдущем разделе была рассмотрена задача нахождения производной по заданной функции. Иногда требуется решить обратную задачу: нахождение функции по известной ее производной.

Определение. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на множестве $X = \{x\}$, если производная этой функции и дифференциал равны соответственно $f(x)$ и $f(x) \cdot dx$, то есть

$$F'(x) = f(x) \text{ или } d(F(x)) = f(x) \cdot dx.$$

Пример. Найти первообразные для функций.

а) $f(x) = \cos x$; б) $f(x) = 4x^3$.

Решение.

а) Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$, то есть $F'(x) = f(x)$.

б) Функция $F(x) = x^4$ является первообразной для функции $f(x) = 4x^3$, так как $F'(x) = (x^4)' = 4x^3$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Заметим, что одной функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга на

постоянное слагаемое. Например, для функции $f(x) = 4x^3$ первообразной также будут являться функции вида $x^4 \pm 5$, $x^4 \pm 10$, ..., $x^4 \pm C$, где $C = \text{const}$, так как производная каждой из этих функций одна и та же функция $f(x) = 4x^3$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $F(x) + C$ для функции $f(x)$, называется неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (10.1)$$

В формуле (10.1) знак $\int$ - знак интегрирования, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, $F(x)$ - первообразная, $C = \text{const}$, x - переменная интегрирования.

Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*, а раздел математики, изучающий интегрирование, называется *интегральным исчислением*.

Интегрирование, это есть действие обратное дифференцированию, поэтому результат интегрирования всегда можно проверить. Для этого нужно найти производную или дифференциал от множества первообразных функции и если будет получена подынтегральная функция или подынтегральное выражение, то действие выполнено, верно.

Пример. Проверить, правильно ли вычислены интегралы.

$$\text{а) } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C ; \quad \text{б) } \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C .$$

Решение.

а) Интеграл вычислен верно, так как $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$, то есть в результате дифференцирования множества первообразных $\ln|x| + C$, получена подынтегральная функция $\frac{1}{x}$.

б) Интеграл вычислен верно, так как $d\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + C\right) = \sin 3x dx$, то есть дифференциал от множества первообразных $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ равен подынтегральному выражению $\sin 3x dx$.

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1°. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$$\left(\int d(x)dx\right)' = f(x).$$

2°. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3°. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен самой функции с точностью до произвольного постоянного слагаемого, то есть

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4°. Неопределенный интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме неопределенных интегралов этих функций, то есть

$$\int [f(x) + \varphi(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int g(x)dx.$$

5°. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, то есть

$$\int A \cdot f(x)dx = A \int f(x)dx, \text{ где } A \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Вид интеграла не меняется при переходе от переменной x к переменной u , где u дифференцируемая функция переменной x . Поэтому, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывна на некотором промежутке T и пусть X - множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$, то есть на множестве T определена сложная функция $f(x) = f[\varphi(t)]$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то справедлива формула

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$	9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$	13. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	14. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C.$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$	15. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C.$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$	16. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C.$

10.2 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью использования таблицы простейших интегралов, основных свойств неопределенных интегралов и некоторых элементарных преобразований, приводящих подынтегральное выражение к виду какого-

либо табличного интеграла называется непосредственным интегрированием.

Пример. Вычислить интеграл.

а) $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx$; б) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x} \right) dx$.

Решение. а) Воспользуемся свойствами неопределенного интеграла 4° и 5°, а затем таблицей интегралов, получим

$$\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C.$$

Проверка:

Найдем производную от полученной первообразной

$$\left(\frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \sin x + 1 = x^2 - 2 \sin x + 1.$$

Так как получили подынтегральную функции, то интеграл вычислен верно.

Ответ. $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C.$

б) Аналогично предыдущему примеру, воспользуемся свойствами неопределенного интеграла 4° и 5°, а затем таблицей интегралов, получим

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x} \right) dx &= 5 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \sqrt{x} dx = 5 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 5 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 10\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\left(10\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C \right)' = 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x}.$$

Ответ. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \sqrt{x} \right) dx = 10\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.$

2. Метод подстановки (замены переменных). Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, то есть перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называют *методом подстановки* или *методом замены переменной*. В основе этого метода лежит теорема 2 пункта 10.1.

Рассмотрим интеграл вида $\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx$. Применим подстановку $t = \varphi(x)$. Найдем дифференциал от каждой части последнего равенства, получим $dt = \varphi'(x) \cdot dx$, тогда $dx = \frac{dt}{\varphi'(x)}$. С учетом замены, получим интеграл вида $\int f(t) dt$, который можно привести к табличному. Замену переменной удобно оформлять в виде

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) \cdot dx \\ dx = \frac{dt}{\varphi'(x)} \end{array} \right| = \int f(t) \cdot \varphi'(x) \cdot \frac{dt}{\varphi'(x)} = \int f(t) \cdot dt. \quad (10.2)$$

Пример. Вычислить интеграл.

а) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$; б) $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Решение.

а) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$

Проверка:

$$\left(\frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sin x^{1/2} \cdot \cos x = \sqrt{\sin x} \cos x.$$

б) $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right| = \int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C =$

$$\frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C.$$

$$\text{Проверка: } \left(\frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C \right)' = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} (x^2 + 1)^{3/2} \cdot 2x = x(x^2 + 1)^{3/2}.$$

3. Подведение функции под знак дифференциала.

Определение. Операция перехода от выражения $\varphi'(x)dx$ к выражению $d(\varphi(x))$ называется подведением функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала.

Этот способ используется в том случае, если нужно найти интеграл вида $\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \cdot dx$, где $f[\varphi(x)]$ - сложная функция,

$\varphi(x) = t$ - промежуточный аргумент,

$\varphi'(x)dx = dt$ - дифференциал промежуточного

аргумента.

Интеграл $\int f(t)dt$ может оказаться табличным. Подведение функции под знак дифференциала удобно оформлять в виде

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \left[\begin{array}{l} \varphi'(x)dx = d(\varphi(x)) \\ \varphi(x) = t \end{array} \right] = \int f[\varphi(x)] \cdot d(\varphi(x)) = \int f(t)dt.$$

Пример.

$$\text{а) } \int 2 \cdot \cos 2x dx = [d(2x) = 2dx] = \int \cos(2x) \cdot d(2x) = \sin 2x + C$$

$$\text{б) } \int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx = [d(x^3) = 3x^2 dx] = \int e^{x^3} d(x^3) = e^{x^3} + C.$$

$$\text{в) } \int (2x+5)^{20} dx = \left[\begin{array}{l} d(2x+5) = 2dx \\ dx = \frac{d(2x+5)}{2} \end{array} \right] = \int (2x+5)^{20} \cdot \frac{d(2x+5)}{2} = \frac{(2x+5)^{21}}{42} + C.$$

$$\text{г) } \int \sin^2 x \cdot \cos x dx = [d(\sin x) = \cos x dx] = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

4. Интегрирование по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - это дифференцируемые функции. Производная произведения этих функций равна $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Найдем дифференциал произведения $u \cdot v$, получим

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$$

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \text{ или}$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \quad (10.3)$$

Формула (10.3) называется формулой интегрирования по частям. Она позволяет от интеграла вида $\int u \cdot dv$ перейти к вычислению интеграла вида $\int v \cdot du$, причем u и dv в исходном интеграле нужно выбрать таким образом, чтобы полученный интеграл $\int v \cdot du$ был проще.

Замечание: Если в подынтегральной функции имеется множитель вида $\ln x$, $\ln(\varphi(x))$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg} x$, то их удобно принимать в качестве u , так как они легко дифференцируются.

Если подынтегральная функция имеет вид $P(x) \cdot e^x$, $P(x) \cdot \cos x$, $P(x) \cdot \sin x$, $P(x) \cdot tg x$, $P(x) \cdot ctg x$, то за u удобно принимать $P(x)$, где $P(x)$ - это некоторый многочлен, причем формулу интегрирования по частям необходимо применять столько раз, какова степень многочлена.

Правило применения формулы интегрирования по частям:

1. Необходимо убедиться, что к данному интегралу рационально применить эту формулу.
2. Разбить рациональное выражение на две части u и dv .
3. Найти du и v .
4. Подставить найденные u , v и du в формулу интегрирования по частям и вычислить полученный интеграл $\int v \cdot du$. Получить ответ.

Пример. Вычислить интеграл.

а) $\int x \ln x dx$; б) $\int x^2 \sin x dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C \right)' &= \left(\frac{x^2}{4} \right)' \cdot (2 \ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \cdot (2 \ln x - 1)' = \frac{1}{2} x \cdot (2 \ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \cdot \left(2 \frac{1}{x} \right) = \\ &= x \ln x - \frac{1}{2} x + \frac{x}{2} = x \ln x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int x^2 \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos x dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} & \left(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \right)' = \\ &= \left(-x^2 \right)' \cos x - x^2 (\cos x)' + 2(x)' \sin x + 2x (\sin x)' + 2(\cos x)' + C' = \\ &= -2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = x^2 \sin x. \end{aligned}$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному виду.

10.3 Интегрирование рациональных дробей

Определение. Рациональной дробью называется выражение вида

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ - многочлен степени m , $Q_n(x)$ - многочлен степени n .

Например, $\frac{2x^3 - 4x + 1}{x^2 + 6x + 2}$ - рациональная дробь, где $2x^3 - 4x + 1$ - это многочлен 3-ей степени, $x^2 + 6x + 2$ - многочлен 2-ой степени.

Определение. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$ и неправильной, если степень числителя больше степени знаменателя, то есть $m \geq n$.

Например, $\frac{x^5 + 2x - 1}{x^6}$ - правильная дробь, $\frac{x^3 - 1}{x + 1}$ - неправильная дробь.

Неправильную дробь можно легко свести к виду правильной разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен и выделить целую часть, тогда

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \mu(x) + \frac{F_k(x)}{Q_n(x)}, \quad (10.4)$$

$(m \geq n) \qquad \qquad \qquad k < n$

Пример. $\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$ - неправильная дробь, так как $m = 4$, а $n = 2$, то есть $m > n$. Разделим столбиком числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r} x^4 - 3 \\ - x^4 + 2x^3 + x^2 \\ \hline - 2x^3 - x^2 - 3 \\ - - 2x^3 - 4x^2 - 2x \\ \hline 3x^2 + 2x - 3 \\ - 3x^2 + 6x + 3 \\ \hline - 4x - 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

Получим, $\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 + \frac{-4x - 6}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$

Чтобы проинтегрировать неправильную дробь необходимо свести ее к виду правильной дроби.

Определение. Дроби вида $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, $\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^k}$, где A, B, C, a, b, c - постоянные, k - целое положительное число, а трехчлен ax^2+bx+c действительных корней не имеет, называются простейшими.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде алгебраической суммы конечного числа элементарных дробей.

Рассмотрим интегралы четырех видов:

$$\text{I вид: } \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \int \frac{dx}{x-a} = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II вид: } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int \frac{dx}{(x-a)^k} = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \cdot \int (x-a)^{-k} dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

$$\text{III вид: } \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Данный интеграл обычно вычисляют путем выделения полного квадрата в знаменателе. В результате получается табличный интеграл вида

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C \quad \text{или} \quad \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$\text{IV вид: } \int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} dx.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} dx$ рассмотрим случаи:

а) Если в числителе дроби стоит производная знаменателя, то есть $(ax^2+bx+c)' = Bx+C$, то интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

б) Если выражение $Bx+C$ не является производной знаменателя, то его нужно преобразовать так, чтобы можно было выделить производную знаменателя, тогда интеграл распадается на два интеграла.

Пример. Вычислить интеграл.

$$\text{а) } \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x+4}{x^2-3x+1} dx.$$

Решение.

а) Данный интеграл имеет вид IV, и решается первым из приведенных способов:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \left[d(x^2-x+1) = (2x-1)dx \right] = \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = \ln|x^2-x+1| + C$$

б) Данный интеграл имеет вид IV, и решается вторым из приведенных способов

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{x^2-3x+1} dx &= 3 \int \frac{x+\frac{4}{3}}{x^2-3x+1} dx = \left[d(x^2-3x+1) = (2x-3)dx \right] = \frac{3}{2} \int \frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2-3x+1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-3+3+\frac{8}{3}}{x^2-3x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{\frac{17}{3}}{x^2-3x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2-3x+1)}{x^2-3x+1} + \\ &+ \frac{17}{2} \int \frac{dx}{x^2-3x+1} = \frac{3}{2} \ln|x^2-3x+1| + \frac{17}{2} \int \frac{dx}{\left(x^2-2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 1} = \frac{3}{2} \ln|x^2-3x+1| + \\ &+ \frac{17}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \ln|x^2-3x+1| + \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln \left| \frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2-3x+1| + \frac{17}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

10.4 Разложение правильной рациональной дроби на элементарные

Чтобы разложить правильную рациональную дробь на элементарные, необходимо, прежде всего, разложить на множители знаменатель дроби, то есть представить его в виде

$$Q_n(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^s \cdot (ax^2+px+q)^l,$$

где a и b - это действительные корни многочлена $Q_n(x)$, а $ax^2 + px + q$ - квадратный трехчлен, не имеющий действительных корней. Тогда, рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ может быть единственным образом

представлена в виде суммы конечного числа элементарных дробей

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{ax^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(ax^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_lx + N_l}{(ax^2 + px + q)^l}, \quad (10.5)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_k, M_1, M_2, \dots, M_l, N_1, N_2, \dots, N_l$ - постоянные действительные числа, называемые неопределенными коэффициентами.

Например,

$$\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{(x-3) \cdot (x-2)^3 \cdot (x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} + \frac{Mx + N}{x^2 - x + 1}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов используется **метод неопределенных коэффициентов**, который заключается в следующем:

1. Привести элементарные дроби правой части к общему знаменателю (это будет многочлен $Q_n(x)$);
2. Приравнять полученный многочлен в числителе правой части к многочлену $P_m(x)$;
3. Сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x правой и левой частей нового равенства, при этом получается система линейных уравнений;
4. Решить полученную систему относительно неопределенных коэффициентов и найти их значения.

Пример. Разложить дробь $\frac{x^2 + 9x - 11}{(x-3)^2 \cdot (x+2)}$ на элементарные дроби.

Решение.

1. Представим данную дробь в виде суммы элементарных дробей и приведем их к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 9x - 11}{(x-3)^2 \cdot (x+2)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax^2 - Ax - 6A + Bx + 2B + Cx^2 - 6Cx + 9C}{(x-3)^2 \cdot (x+2)} = \\ &= \frac{(A+C) \cdot x^2 + (-A+B-6C) \cdot x + (-6A+2B+9C)}{(x-3)^2 \cdot (x+2)}.\end{aligned}$$

2. Приравняем числитель исходной дроби и новой дроби.

$$x^2 + 9x - 11 = (A+C) \cdot x^2 + (-A+B-6C) \cdot x + (-6A+2B+9C).$$

3. Приравняв коэффициенты в левой и правой части при x^2 , x и свободные коэффициенты, получим систему

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -A+B-6C=9 \\ -6A+2B+9C=-11 \end{cases}.$$

4. Решим систему и найдем коэффициенты A , B , C .

$$\begin{aligned}\begin{cases} A=1-C \\ -1+C+B-6C=9 \\ -6 \cdot (1-C)+2B+9C=-11 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A=1-C \\ B=10+5C \\ -6+6C+20+10C+9C=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-C \\ B=10+5C \\ 25C=-25 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} A=2 \\ B=5 \\ C=-1. \end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом, исходную дробь можно представить в виде суммы следующих элементарных дробей:

$$\frac{x^2 + 9x - 11}{(x-3)^2 \cdot (x+2)} = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2} - \frac{1}{x+2}.$$

10.5 Интегрирование простейших иррациональностей

1. Интегралы с линейной иррациональностью.

Если подынтегральное выражение представляет собой линейную функцию, то есть $ax + b$ ($a \neq 0$), то для вычисления интеграла вида $\int \sqrt[n]{ax + b} \cdot dx$ выполняют подстановку $t = \sqrt[n]{ax + b}$.

Пример.

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{2x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[5]{2x-1} \\ t^5 = 2x-1 \\ x = \frac{t^5+1}{2} \\ dx = \frac{1}{2} \cdot 5t^4 \cdot dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{5}{2} \cdot t^4 \cdot dt = \frac{5}{2} \int t^3 \cdot dt = \frac{5}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{(2x-1)^4}}{8} + C.$$

2. Интегралы с квадратичной иррациональностью.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + px + q}}.$

Данный интеграл вычисляется путем выделения полного квадрата в выражении $ax^2 + px + q$ и приводится к одному из табличных интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{d\left(x - \frac{2}{3} \right)}{\sqrt{\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left| x - \frac{2}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}} \right| + C. \end{aligned}$$

б) $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + px + q}} dx.$

Если производная подкоренного выражения равна числителю, то есть $(ax^2 + px + q)' = Mx + N$, то данный интеграл вычисляется следующим образом

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + px + q}} dx = \int \frac{d(ax^2 + px + q)}{\sqrt{ax^2 + px + q}} = 2\sqrt{ax^2 + px + q} + C. \quad (10.6)$$

Если производная подкоренного выражения не равна числителю, то числитель необходимо преобразовать таким образом, чтобы была получена производная подкоренного выражения, тогда интеграл распадается на два интеграла.

Пример. Вычислить интеграл.

а) $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx$.

Решение.

а) $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx = [d(x^2-4x+1) = (2x-4) \cdot dx] = \int \frac{d(x^2-4x+1)}{\sqrt{x^2-4x+1}} = 2\sqrt{x^2-4x+1} + C.$

б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx = [(3x^2-x+5)' = 6x-1] = \frac{1}{6} \int \frac{6x-6}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x-1-5}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx =$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{6x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx - \frac{5}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}} = \frac{1}{6} \int \frac{d(3x^2-x+5)}{\sqrt{3x^2-x+5}} - \frac{5}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{3x^2-x+5} - \frac{5}{6\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2 \cdot \frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{3x^2-x+5} - \frac{5}{6\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{59}{36}}} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{3x^2-x+5} - \frac{5}{6\sqrt{3}} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{59}{36}}} = \frac{1}{3} \sqrt{3x^2-x+5} - \frac{5}{6\sqrt{3}} \ln \left| x - \frac{1}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}} \right| + C$$

10.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Все тригонометрические функции рационально выражаются через синус и косинус. Следовательно, всякая функция, рационально зависящая от тригонометрических функций, может быть преобразована и представлена в виде функций, рационально зависящих только от синуса и косинуса.

1. Рассмотрим интеграл вида

$$\int \sin^k x \cdot \cos^n x \cdot dx, \quad (10.7)$$

где m и n - целые числа. Возможны следующие случаи:

а) Если k и n - четные и положительные (в частности, одно из них может быть равно нулю), то для вычисления интеграла (10.7) необходимо предварительно функцию преобразовать пользуясь при этом следующими тригонометрическими формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Например,

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \\ &+ \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

б) Если хотя бы одно из чисел k и n есть число нечетное и положительное, то для вычисления интеграла (10.7) используют подстановку $t = \cos x$, если k - нечетное и положительное, и подстановку $t = \sin x$, если n - нечетное и положительное. Другими словами, от нечетной степени отделяется множитель первой степени и подводится под знак дифференциала.

$$\text{Например, } \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right| = \int t^2 \cdot (1-t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

в) Если k и n - четные и хотя бы один из них отрицательный, то для вычисления интеграла (10.7) используют следующую подстановку:

$$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt; \quad (10.8)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int t^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int t^2 \cdot (1+t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим интегрирование произведения тригонометрических функций синуса и косинуса различных аргументов, то есть интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx, \quad \int \cos mx \cdot \sin nx \cdot dx. \quad (10.9)$$

Для их вычисления подынтегральное выражение преобразовывают, пользуясь следующими тригонометрическими формулам:

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)); \quad (10.10)$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx));$$

$$\cos mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\sin(mx - nx) + \sin(mx + nx)).$$

$$\text{Например, } \int \sin 5x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 8x) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

3. Для вычисления интеграла

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx \quad (10.11)$$

используется следующая подстановка

$$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt; \quad (10.12)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t}{1+t^2}.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg}^6 x dx = \int t^6 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^6}{1+t^2} dt = \int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + C.$$

4. Если интеграл не относится не к одному из перечисленных выше видов, то используется следующая универсальная подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt; \quad (10.13)$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Например,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1+t^2 + 2t + 1 - t^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{1}{2+2t} dt = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Вычислить интеграл.

$$\text{а) } \int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3} dx; \quad \text{г) } \int \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx;$$

$$\text{д) } \int \sqrt[6]{3-4\cos 3x} \cdot \sin 3x dx; \quad \text{е) } \int \frac{7x^4 dx}{\sqrt[4]{2+x^5}}; \quad \text{ж) } \int \frac{5x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}; \quad \text{з) } \int \frac{x dx}{1+x^4};$$

$$\text{и) } \int \frac{\arcsin^5 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx; \quad \text{к) } \int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \quad \text{л) } \int x \cdot \sin 5x dx; \quad \text{м) } \int x \cdot e^{\frac{x}{5}} dx.$$

Решение.

а)

$$\int \frac{x^6 - x^5 + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^6}{x^2} - \frac{x^5}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) dx = \int \left(x^4 - x^3 + x^{-3/2} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^{-1/2} + C.$$

б) Воспользуемся подстановкой $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$, получим:

$$\int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

в) Если под знаком интеграла содержится логарифмическая функция, то удобно принять ее за новую переменную, если под знаком интеграла присутствует производная этой функции (с точностью до постоянного множителя). Воспользуемся методом замены переменной.

$$\int \frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln(2x-3) \\ dt = \frac{1}{2x-3} \cdot 2dx \\ \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int t^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot dt =$$

$$\frac{1}{2} \int t^3 \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8} \ln^4(2x-3) + C.$$

$$\text{г) } \int \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + \sin x \\ dt = (2x + \cos x) \cdot dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + \sin x| + C.$$

д) Воспользуемся методом замены переменной. За новую переменную удобно взять подкоренное выражение, если под интегралом присутствует также его производная с точностью до постоянного множителя.

$$\int \sqrt[5]{3-4\cos 3x} \cdot \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} t = 3-4\cos 3x \\ dt = -4(-\sin 3x) \cdot 3dx \\ \sin 3x \cdot dx = \frac{1}{12} dt \end{array} \right| = \int \sqrt[5]{t} \cdot \frac{1}{12} dt =$$

$$= \frac{1}{12} \int t^{\frac{1}{5}} \cdot dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C = \frac{1}{14} \sqrt[5]{(3-4\cos 3x)^7} + C.$$

е) Интеграл не является табличным. Приведем его к табличному виду выполнив замену $t = 2 + x^5$.

$$\int \frac{7x^4 dx}{\sqrt[4]{2+x^5}} = \left| \begin{array}{l} t = 2+x^5 \\ dt = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{7 \cdot \frac{1}{5} dt}{\sqrt[4]{t}} = \frac{7}{5} \int t^{-\frac{1}{4}} \cdot dt = \frac{7}{5} \cdot \frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C =$$

$$= \frac{28}{15} \sqrt[4]{t^3} + C = \frac{28}{15} \sqrt[4]{(2+x^5)^3} + C.$$

ж) Воспользуемся методом замены переменной. Новая переменная иногда выбирается из следующих соображений: в знаменателе стоит разность постоянной и квадрата некоторой функции. Эту функцию мы принимаем за новую переменную, если в числителе присутствует ее производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{5x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}} = \int \frac{5x^3 dx}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = x^4 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \int \frac{5 \cdot \frac{1}{4} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{5}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{5}{4} \arcsin t + C = \frac{5}{4} \arcsin x^4 + C$$

з) Подстановка выбирается аналогично предыдущему примеру.

$$\int \frac{x \cdot dx}{1+x^4} = \int \frac{x \cdot dx}{1+(x^2)^2} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctgt + C = \frac{1}{2} \arctgx^2 + C.$$

и) Воспользуемся методом замены переменной. За новую переменную иногда выбирают функцию, стоящую в основании степени, если подынтегральное выражение содержит производную этой функции с точностью до постоянного множителя.

$$\int \frac{\arcsin^5 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin 3x \\ dt = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx \\ dx = \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} dt \end{array} \right| = \int \frac{t^5}{3} dt = \frac{t^6}{18} + C = \frac{\arcsin^6 3x}{18} + C.$$

к) Воспользуемся формулой интегрирования по частям, причем, поскольку подынтегральное выражение содержит функцию $\ln x$, то ее удобнее принять за (u) , получим

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow v = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x} \end{array} \right| = \ln x \cdot 3\sqrt[3]{x} - \int 3 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= 3\sqrt[3]{x} \ln x - 3 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sqrt[3]{x} \cdot \ln x - 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{x} + C = 3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot (\ln x - 3) + C.$$

л) Воспользуемся формулой интегрирования по частям, причем, поскольку подынтегральная функция имеет вид $P(x) \cdot \sin x$, где $P(x) = x$, то за (u) удобнее принять $P(x) = x$, получим

$$\int x \cdot \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ \text{принимаем: находим:} \\ u = x \mid du = dx \\ dv = \sin 5x \cdot dx \mid v = \int \sin 5x \cdot dx = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{5} \cos 5x \right) - \int -\frac{1}{5} \cos 5x \cdot dx = -\frac{1}{5} x \cdot \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x \cdot dx =$$

$$-\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \int \cos 5x \cdot d(5x) = -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C.$$

м) Как и в предыдущем примере, подынтегральная функция имеет вид $P(x) \cdot e^x$, где $P(x) = x$, тогда за (u) удобнее принять $P(x) = x$, получим

$$\int x \cdot e^{\frac{x}{5}} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \\ \text{принимаем: находим:} \\ u = x \mid du = dx \\ dv = e^{\frac{x}{5}} dx \mid v = \int e^{\frac{x}{5}} dx = 5 \int e^{\frac{x}{5}} d\left(\frac{x}{5}\right) = 5e^{\frac{x}{5}} \end{array} \right| = x \cdot 5 \cdot e^{\frac{x}{5}} - \int 5 \cdot e^{\frac{x}{5}} dx =$$

$$= 5xe^{\frac{x}{5}} - 5 \cdot 5 \int e^{\frac{x}{5}} d\left(\frac{x}{5}\right) = 5x \cdot e^{\frac{x}{5}} - 25 \cdot e^{\frac{x}{5}} + C = 5e^{\frac{x}{5}} (x - 5) + C.$$

Упражнения

1. Воспользовавшись таблицей интегралов и простейшими свойствами найти интеграл.

1.1 $\int x^{10} dx.$

1.2 $\int x^{5/2} dx.$

1.3 $\int \sqrt[3]{x} dx.$

1.4 $\int \frac{dx}{x^4}.$

1.5 $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}.$

1.6 $\int 5^x e^x dx.$

1.7 $\int \frac{x - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$

1.8 $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx.$

1.9 $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

1.10 $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx.$

1.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-9x^2}}.$

1.12 $\int \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx.$

1.13 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$

2. Найти интеграл методом замены переменной или методом подведения под знак дифференциала.

2.1 $\int (x+8)^{10} dx.$

2.2 $\int \frac{dx}{(x+10)^4}.$

2.3 $\int \frac{dx}{x+5}.$

2.4 $\int \sin 5x dx.$

2.5 $\int e^{3x} dx.$

2.6 $\int \sqrt{10-2x} dx.$

2.7 $\int \sqrt[5]{(2x+3)^3} dx.$

2.8 $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

2.9 $\int \frac{x dx}{(x^2+3)^9}.$

2.10 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+5}}.$

2.11 $\int x^2 (x^3-5)^8 dx.$

2.12 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{x^4+2}}.$

2.13 $\int \sin^5 x \cos x dx.$

2.14 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^6 x}.$

2.15 $\int \operatorname{tg}^7 x \frac{dx}{\cos^2 x}.$

2.16 $\int (x+1) \cdot \sqrt[8]{3-x} dx.$

2.17 $\int x \left(\frac{x}{2} + 5 \right)^{35} dx$

2.18 $\int \frac{x^2}{10-x} dx.$

$$\begin{array}{lll}
2.19 \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}. & 2.20 \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}. & 2.21 \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}. \\
2.22 \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}. & 2.23 \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx. & 2.24 \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx. \\
2.25 \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}. & 2.26 \int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tg}^3 x}. & 2.27 \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x+1}}. \\
2.28 \int e^{x^2} x dx. & 2.29 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. & 2.30 \int \frac{\ln^6 x dx}{x}. \\
2.31 \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x dx}{1+x^2}. & 2.32 \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx. & 2.33 \int \frac{dx}{\arcsin^5 x \cdot \sqrt{1-x^2}}. \\
2.34 \int e^x \cos e^x dx. & 2.35 \int \frac{2x - \sqrt[4]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx. & 2.36 \int \frac{x^2 dx}{x^3+5}. \\
2.37 \int \frac{e^x dx}{e^x+4}. & 2.38 \int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}+a^2}. & 2.39 \int \operatorname{tg} x dx. \\
2.40 \int \operatorname{ctg} x dx. & 2.41 \int \operatorname{tg} 5x dx. & 2.42 \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx. \\
2.43 \int \frac{dx}{x \ln x}. & 2.44 \int \frac{\ln^3 x}{x} dx. & 2.45 \int e^{\cos x} \sin x dx. \\
2.46 \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx. & 2.47 \int e^{-x^5} x^4 dx. & 2.48 \int \frac{x^4 dx}{x^2+1}. \\
2.49 \int \frac{dx}{1+25x^2}. & 2.50 \int \frac{x dx}{1-x^4}. & 2.51 \int \frac{x^2 dx}{x^6-9}.
\end{array}$$

3. Найти интеграл с помощью интегрирования по частям.

$$\begin{array}{ll}
3.1 \int x \cos 4x dx. & 3.2 \int x \sin 2x dx. \\
3.3 \int x \cdot e^{-x} dx. & 3.4 \int x \cdot e^{x+10} dx. \\
3.5 \int (1-x^2) \sin(2x+4) dx. & 3.6 \int x^2 e^{-x} dx.
\end{array}$$

$$3.7 \int \ln(4 - x^2) dx.$$

$$3.8 \int (3x^2 - 2x + 5) \cdot \ln \sqrt{x} dx.$$

$$3.9 \int \sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) dx.$$

$$3.10 \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$3.11 \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$3.12 \int \ln^2 x dx.$$

$$3.13 \int \sin x \cdot e^x dx.$$

$$3.14 \int \cos \ln x dx.$$

$$3.15 \int (x + \sqrt{2}) \sin \frac{2x}{3} dx.$$

$$3.16 \int x \cdot 3^x dx.$$

$$3.17 \int \sqrt[4]{x} \cdot \log_5 x dx.$$

$$3.18 \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

4. Найти интеграл от рациональной и иррациональной дроби.

$$4.1 \int \frac{-\frac{3}{2}}{(x-7)^8} dx.$$

$$4.2 \int \frac{2x+4}{x^2+4x-6} dx.$$

$$4.3 \int \frac{2x+3}{x^2-4x+9} dx.$$

$$4.4 \int \frac{dx}{x^2+2x-5}.$$

$$4.5 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}.$$

$$4.6 \int \frac{4dx}{4x^2+12x+4}.$$

$$4.7 \int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx.$$

$$4.8 \int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$$

$$4.9 \int \frac{dx}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

$$4.10 \int \frac{x+1}{x \cdot (x^2+1)} dx.$$

$$4.11 \int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} dx.$$

$$4.12 \int \frac{x^2+9x-11}{(x-3)^2 \cdot (x+2)} dx.$$

$$4.13 \int \frac{dx}{x^2-6x+5}.$$

$$4.14 \int \frac{2x+3}{(x+5) \cdot (x-2)} dx.$$

$$4.15 \int \frac{7x-8}{x^2-3x+2} dx.$$

$$4.16 \int \frac{x^3+1}{x^2-4x+10} dx.$$

$$4.17 \int \frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5} dx.$$

$$4.18 \int \frac{x^4-4x^3+2x-1}{x^2-x+1} dx.$$

$$4.19 \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$4.20 \int \frac{1 - 2x - x^3}{1 + x^2} dx.$$

$$4.21 \int \frac{x^3 - 4}{x^2 + 5x + 6} dx.$$

$$4.22 \int \frac{7 - x^2}{1 - x} dx.$$

$$4.23 \int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx.$$

$$4.24 \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$$

5. Найти интегралы от тригонометрических функций.

$$5.1 \int \sin 2x \cos 3x dx.$$

$$5.2 \int \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$5.3 \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$5.4 \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$5.5 \int \sin^{10} x \cos^3 x dx.$$

$$5.6 \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

$$5.7 \int \sin x \cos^3 x dx.$$

$$5.8 \int \sin^3 x dx.$$

$$5.9 \int \cos^4 x dx.$$

$$5.10 \int \sin x \sin(x + \alpha) dx.$$

$$5.11 \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$5.12 \int \sin 5x \sin 7x dx.$$

$$5.13 \int \frac{dx}{3 - \sin x + 2 \cos x}.$$

$$5.14 \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$$

$$5.15 \int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}.$$

$$5.16 \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$5.17 \int \frac{5 - \sin x + 3 \cos x}{3 + \sin x - 3 \cos x} dx.$$

$$5.18 \int \frac{dx}{3 + \sin^2 x}.$$

Ответы к заданиям. 1.1 $\frac{1}{11}x^{11} + C$. 1.2 $\frac{2}{7} \cdot x^{7/2} + C$. 1.3. $\frac{3}{4}x^{4/3} + C$.

1.4. $-\frac{1}{3x^3} + C$. 1.5. $\frac{5}{3}x^{3/5} + C$. 1.6. $\frac{(5e)^x}{\ln(5e)} + C$. 1.7. $-\frac{1}{x} - e^x + \ln|x| + C$.

1.8. $-\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$. 1.9. $\frac{6}{7} \cdot x^{7/6} - \frac{4}{3} \cdot x^{3/4} + C$. 1.10. $3x - \frac{2}{\ln 1,5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + C$.

1.11. $\frac{1}{3} \arcsin x + C$. 1.12. $\sin x + C$. 1.13. $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$. 2.1. $\frac{1}{11}(x+8)^{11} + C$.

2.2. $-\frac{1}{3(x+10)^3} + C$. **2.3.** $\ln|x+5| + C$. **2.4.** $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$. **2.5.** $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. **2.6.**
 $-\frac{1}{3}(10-2x)^{3/2} + C$. **2.7.** $\frac{5}{16} \cdot (2x+3)^{8/5} + C$. **2.8.** $-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} - \frac{1}{9}(\arccos 3x)^3 + C$ **2.9.**
 $-\frac{1}{16(x^2+3)^8} + C$. **2.10.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+5} + C$. **2.11.** $\frac{1}{27}(x^3-5)^9 + C$. **2.12.** $\frac{5}{16} \cdot (x^4+2)^{4/5} + C$.
2.13. $\frac{1}{6}\sin^6 x + C$. **2.14.** $\frac{1}{5\cos^5 x} + C$. **2.15.** $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x + C$. **2.16.** $-\frac{32}{9} \cdot \sqrt[8]{(3-x)^9} + \frac{8}{17} \cdot \sqrt[8]{(3-x)^{17}} + C$.
2.17. $\frac{4}{37} \cdot \left(\frac{x}{2}+5\right)^{37} - \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{x}{2}+5\right)^{36} + C$. **2.18.** $-100\ln|10-x| + 20(10-x) - \frac{1}{2}(10-x)^2 + C$. **2.19.**
 $\frac{2}{35}\sqrt{x-1}(5x^3+6x^2-8x+16) + C$. **2.20.** $2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + C$. **2.21.**
 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + C$. **2.22.** $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$. **2.23.**
 $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1| + C$. **2.24.** $-\ln(1+\cos^2 x) + C$. **2.25.** $3 \cdot \sqrt[3]{\sin x} + C$.
2.26. $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C$. **2.27.** $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x+1} + C$. **2.28.** $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. **2.29.** $2e^{\sqrt{x}} + C$. **2.30.**
 $\frac{1}{7}\ln^7 x + C$. **2.31.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x + C$. **2.32.** $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2} + C$. **2.33.** $-\frac{1}{4\arcsin^4 x} + C$.
2.34. $\sin e^x + C$. **2.35.** $-2\sqrt{1-x^2} - \frac{4}{5}(\arcsin x)^{5/4} + C$. **2.36.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C$. **2.37.**
 $\ln(e^x+4) + C$. **2.38.** $\frac{1}{3}\ln(e^{3x}+a^2) + C$. **2.39.** $-\ln|\cos x| + C$. **2.40.** $\ln|\sin x| + C$.
2.41. $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$. **2.42.** $-\ln|\cos 2x+3| + C$. **2.43.** $\ln|\ln x| + C$. **2.44.** $\frac{1}{4}\ln^4 x + C$.
2.45. $-e^{\cos x} + C$. **2.46.** $x - 2\operatorname{arctg} x + C$. **2.47.** $-\frac{1}{5}e^{-x^5} + C$. **2.48.** $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$
2.49. $\frac{1}{5}\operatorname{arctg} 5x + C$. **2.50.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| + C$. **2.51.** $-\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3+x^3}{3-x^3}\right| + C$. **3.1.**
 $\frac{1}{4}x \cdot \sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$. **3.2.** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x + C$. **3.3.** $-e^{-x}(x+1) + C$.
3.4. $x \cdot e^{x+10} - e^{x+10} + C$. **3.5.** $\frac{1}{2}(x^2-1) \cdot \cos(2x+4) - \frac{1}{2}x \cdot \sin(2x+4) - \frac{1}{4}\cos(2x+4) + C$.

$$3.6. \quad -e^{-x}(2+2x+x^2)+C. \quad 3.7. \quad x \cdot \ln(4-x^2) - 2x + 2 \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + C.$$

$$3.8. \quad (x^3 - x^2 + 5x) \ln \sqrt{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} + C. \quad 3.9. \quad \frac{2}{3} \ln(x+1) \cdot \sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{9} \sqrt{(x+1)^3} + C.$$

$$3.10. \quad \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C. \quad 3.11. \quad 2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C. \quad 3.12.$$

$$x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C. \quad 3.13. \quad \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C. \quad 3.14. \quad \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C. \quad 3.15.$$

$$-\frac{3}{2}(x+\sqrt{2}) \cdot \cos \frac{2x}{3} + \frac{9}{4} \sin \frac{2x}{3} + C. \quad 3.16. \quad \frac{3^x}{\ln^2 3}(x \ln 3 - 1) + C. \quad 3.17.$$

$$\frac{4}{5} \cdot x^{5/4} \cdot \log_5 x - \frac{16}{25 \cdot \ln 5} \cdot x^{5/4} + C. \quad 3.18. \quad x \operatorname{arctg} x - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \quad 4.1. \quad \frac{3}{14 \cdot (x-7)^7} + C.$$

$$4.2. \quad \ln|x^2+4x-6|+C. \quad 4.3. \quad \ln|x^2-4x+9| + \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C. \quad 4.4.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}} \right| + C. \quad 4.5. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln \left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}} \right| + C. \quad 4.6.$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \ln \left| \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} \right| + C. \quad 4.7. \quad 3 \ln|x^2+4x+9| - \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C. \quad 4.8.$$

$$-4\sqrt{3-2x-x^2} + 3 \arcsin \frac{x+1}{2} + C. \quad 4.9. \quad \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C. \quad 4.10. \quad \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + \operatorname{arctg} x + C.$$

$$4.11. \quad \frac{5}{6} \ln|x| - \frac{26}{3} \ln|x+3| + \frac{47}{6} \ln|x-2| + C. \quad 4.12. \quad \ln \left| \frac{(x+3)^2}{x+2} \right| - \frac{1}{x-3} + C. \quad 4.13.$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C. \quad 4.14. \quad \ln(x+5) \cdot (x-2) + C. \quad 4.15. \quad \ln|x-1| + 6 \ln|x-2| + C. \quad 4.16.$$

$$\frac{x^2}{2} + 4x + 3 \ln|x^2-4x+10| - \frac{27}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{6}} + C. \quad 4.17. \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{6}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \quad 4.18.$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 - 4x + \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| + \frac{7}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$4.19. \quad \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln|x^2-4| + 4 \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 2 \ln|x| + C. \quad 4.20. \quad -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C.$$

$$4.21. \quad \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{19}{2} \ln|x^2+5x+6| - \frac{43}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C. \quad 4.22. \quad \frac{x^2}{2} + x - 6 \ln|1-x| + C.$$

$$4.23. \quad \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \quad 4.24. \quad \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C. \quad 5.1.$$

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C. \quad 5.2. \quad \frac{tg^3 x}{3} - tg x + x + C. \quad 5.3. \quad \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

$$5.4. \quad \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad 5.5. \quad \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C. \quad 5.6. \quad -\frac{1}{tg \frac{x}{2} - 2} + C. \quad 5.7. \quad -\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$$

$$5.8. \quad -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \quad 5.9. \quad \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad 5.10.$$

$$\frac{x}{2} \cos \alpha - \frac{1}{4} \sin(2x + \alpha) + C. \quad 5.11. \quad tg x + \frac{1}{3} tg^3 x + C. \quad 5.12. \quad \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 12x}{24} + C. \quad 5.13.$$

$$arctg\left(\frac{tg \frac{x}{2} - 1}{2}\right) + C. \quad 5.14. \quad \frac{1}{2} arctg\left(2tg \frac{x}{2}\right) + C. \quad 5.15. \quad \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2tg x - \sqrt{5}}{2tg x + \sqrt{5}}\right| + C. \quad 5.16.$$

$$\ln\left|1 + tg \frac{x}{2}\right| + C. \quad 5.17. \quad 8 \ln\left|\frac{tg \frac{x}{2}}{3tg \frac{x}{2} + 1}\right| - x + C. \quad 5.18. \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}} tg x\right) + C.$$

Тест для самопроверки

Тема: «Неопределенный интеграл»

1. Укажите замену, которая приводит интеграл $\int 3x^2 \cdot \sin(x^3 + 1) dx$ к табличному.

- a. $t = x^3 + 1$ b. $t = x^3$ c. $t = \sin(x^3 + 1)$
d. $t = 3x^2$ e. $t = 3x^2 \cdot \sin(x^3 + 1)$

2. Укажите замену, которая приводит интеграл $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$ к табличному

- a. $t = \ln(x+1)$ b. $t = \ln x$ c. $t = x+1$
d. $t = \frac{1}{x+1}$ e. $t = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

3. Укажите замену, которая приводит интеграл $\int \frac{tg(x-1)}{\cos^2(x-1)} dx$ к табличному

a. $t = tg(x-1)$

b. $t = \cos^2(x-1)$

c. $t = x-1$

d. $t = \frac{1}{\cos^2(x-1)}$

e. $t = \frac{tg(x-1)}{\cos^2(x-1)}$

4. Укажите замену, которая приводит интеграл $\int \frac{4e^{x+2}}{3+4e^{x+2}} dx$ к табличному

a. $t = 3+4e^{x+2}$

b. $t = 4e^{x+2}$

c. $t = x+2$

d. $t = \frac{1}{3+4e^{x+2}}$

e. $t = \frac{4e^{x+2}}{3+4e^{x+2}}$

5. Укажите замену, которая приводит интеграл $\int (-2 \sin 2x) \cdot \cos^4 2x dx$ к табличному

a. $t = \cos 2x$

b. $t = -2 \sin 2x$

c. $t = \cos^4 2x$

d. $t = 2x$

e. $t = (-2 \sin 2x) \cdot \cos^4 2x$

6. Укажите замену, которую необходимо сделать при нахождении интеграла $\int \frac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{x + \sqrt[3]{x^4}} dx$

a. $t = \sqrt[6]{x}$

b. $t = \sqrt[3]{x}$

c. $t = \sqrt[3]{x^4}$

d. $t = x + \sqrt[3]{x^4}$

e. $t = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}$

7. Укажите замену, которую необходимо сделать при нахождении интеграла $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

a. $t = \sqrt[6]{x+1}$

b. $t = \sqrt{x+1}$

c. $t = \sqrt[3]{x+1}$

d. $t = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$

e. $t = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

8. Укажите замену, которую необходимо сделать при нахождении

интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x})}$

a. $t = \sqrt[12]{x}$

b. $t = \sqrt[3]{x}$

c. $t = \sqrt[4]{x}$

d. $t = \sqrt{x}$

e. $t = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x})$

9. Укажите замену, которую необходимо сделать при нахождении

интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

a. $t = \sqrt[4]{2x-1}$

b. $t = \sqrt{2x-1}$

c. $t = \sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}$

d. $t = \sqrt{x}$

e. $t = \sqrt[4]{x}$

10. Укажите замену, которую необходимо сделать при нахождении

интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2}}$

a. $t = \sqrt[10]{x}$

b. $t = \sqrt{x}$

c. $t = \sqrt[5]{x}$

d. $t = \sqrt[5]{x^2}$

e. $t = \sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2}$

11. Укажите выражение, которому равен интеграл $\int x^2 \cos x dx$

a. $x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$

b. $x^2 \sin x + 2 \int x \sin x dx$

c. $-x^2 \sin x + 2 \int x \sin x dx$

d. $-x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$

12. Укажите выражение, которому равен интеграл $\int (x^2 + 1)e^{5x} dx$

a. $\frac{e^{5x}}{5}(x^2 + 1) - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx$

b. $\frac{e^{5x}}{5}(x^2 + 1) + \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx$

c. $5e^{5x}(x^2 + 1) - 10 \int x e^{5x} dx$

d. $5e^{5x}(x^2 + 1) + 10 \int x e^{5x} dx$

13. Укажите выражение, которому равен интеграл $\int x \ln^2 x dx$

a. $\frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \ln x dx$

b. $\frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x + \int x \ln x dx$

$$\text{c. } \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x dx$$

$$\text{d. } \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x + \int x dx$$

14. Укажите выражение, которому равен интеграл $\int (x^2 - 1) \sin x dx$

$$\text{a. } -(x^2 - 1) \cos x + \int 2x \cos x dx$$

$$\text{b. } -(x^2 - 1) \cos x - \int 2x \cos x dx$$

$$\text{c. } (x^2 - 1) \cos x - \int 2x \cos x dx$$

$$\text{d. } (x^2 - 1) \cos x + \int 2x \cos x dx$$

15. Укажите выражение, которому равен интеграл $\int x^2 e^{2x} dx$

$$\text{a. } \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx$$

$$\text{b. } \frac{x^2 e^{2x}}{2} + \int x e^{2x} dx$$

$$\text{c. } 2x^2 e^{2x} - 4 \int x e^{2x} dx$$

$$\text{d. } 2x^2 e^{2x} + 4 \int x e^{2x} dx$$

16. Укажите сумму простейших дробей (с неопределенными коэффициентами), которой будет равна дробь $\frac{1}{(x-1)(x^2-1)}$

$$\text{a. } \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-1}$$

$$\text{b. } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2-1}$$

$$\text{c. } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\text{d. } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\text{e. } \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+1}$$

17. Укажите сумму простейших дробей (с неопределенными коэффициентами), которой будет равна дробь $\frac{1}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

$$\text{a. } \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-1}$$

$$\text{b. } \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2-1}$$

$$\text{c. } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\text{d. } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\text{e. } \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

18. Укажите сумму простейших дробей (с неопределенными коэффициентами), которой будет равна дробь $\frac{1}{(x-2)(x^2-4)}$

a. $\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2-4}$

b. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4}$

c. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2}$

d. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

e. $\frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x+2}$

19. Укажите сумму простейших дробей (с неопределенными коэффициентами), которой будет равна дробь $\frac{1}{(x-2)(x^2+4x+4)}$

a. $\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-4}$

b. $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x^2-4}$

c. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$

d. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

e. $\frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x-2}$

20. Укажите сумму простейших дробей (с неопределенными коэффициентами), которой будет равна дробь $\frac{1}{(x-3)(x^2-9)}$

a. $\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-9}$

b. $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x^2-9}$

c. $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3}$

d. $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

e. $\frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{x+3}$

§11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1 Понятие определенного интеграла и его свойства

Вычисление определенного интеграла, в геометрическом смысле, означает нахождение площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью ox , справа и слева прямыми $x = a$ и $x = b$.

Определение. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется соответствующее приращение ее первообразной, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (11.1)$$

где $\int_a^b f(x) dx$ - определенный интеграл, a и b – пределы интегрирования.

Это определение позволяет вычислить определенный интеграл с помощью неопределенного.

Формула (11.1) называется *формулой Ньютона-Лейбница*. Она устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралом, хотя между ними есть существенная разница, а именно, неопределенный интеграл - есть функция, а определенный представляет собой число.

При вычислении интегралов формулу Ньютона-Лейбница часто записывают в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример. Вычислить определенный интеграл.

$$a) \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

$$\text{б) } \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

ТЕОРЕМА. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1°. Определенный интеграл зависит только от вида функции и не зависит от переменной интегрирования, так как $\int_a^b f(x) dx$ - есть число.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

2°. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет только знак, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Действительно, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx.$

3°. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

Действительно, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$, так как $a = b$.

4°. При любом расположении точек a, b, c на промежутке интегрирования функции $[a, b]$ выполняется равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Действительно,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

5°. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме интегралов этих функций, то есть

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx.$$

6°. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$

7°. Пусть для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняется условие $f(x) \leq \varphi(x).$

Тогда будет справедливо следующее неравенство $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$

Пример.

$$а) \int_0^2 (x^2 + 5x)dx = \int_0^2 x^2 dx + 5 \int_0^2 x dx = \left(\frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 5 \cdot \frac{2^2}{2} \right) = 12 \frac{2}{3}.$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = (tgx) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg \frac{\pi}{4} - tg \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$в) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx = \sqrt{2} \int_0^8 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3 \cdot \frac{\sqrt[3]{x^4}}{4} \right) \Big|_0^8 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{8^3}}{3} + 3 \cdot \frac{\sqrt[3]{8^4}}{4} = 33 \frac{1}{3}.$$

11.2 Замена переменной и метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Замена переменной в определенном интеграле.

Если функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\varphi(x)$ - непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$, то определенный интеграл с пределами

интегрирования от a до b , примет вид

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt, \text{ где } \alpha = t_n = \varphi(a), \beta = t_g = \varphi(b).$$

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx \\ dx = -\frac{dt}{\sin x} \\ t_n = \cos 0 = 1, \quad t_g = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = - \int_1^0 \frac{\sin x}{(1 + t^2) \cdot \sin x} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctg t \Big|_0^1 =$$

$$= \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле примет вид

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

Пример.

$$\int_0^1 \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \arcsin 1 - 0 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ dx = -\frac{dt}{2x} \\ t_n = 1, \quad t_g = 0 \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} + \int_1^0 \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{t} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi - 4}{2}.$$

11.3 Несобственные интегралы

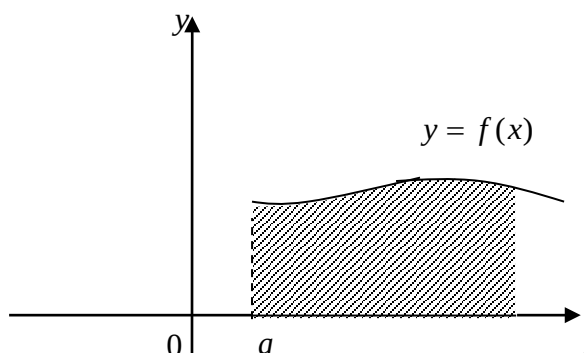
При введении понятия определённого интеграла мы предполагали, что подынтегральная функция является ограниченной, а пределы

интегрирования – конечными. Такой интеграл называется *собственным* (слово «собственный» обычно опускается). Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным*.

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим несобственные интегралы с бесконечными пределами.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$.



Определение. Несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$

называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$

при $b \rightarrow +\infty$, то есть

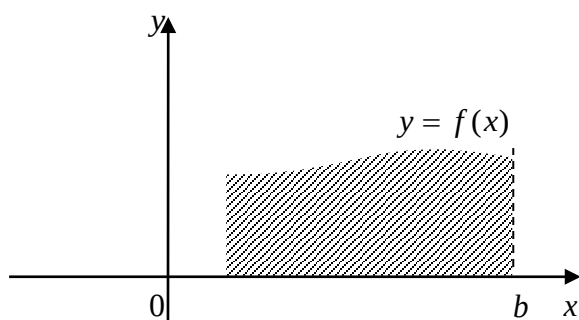
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (11.2)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(- \int_0^b e^{-x} d(-x) \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + e^0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^b} + 1 \right) = -\frac{1}{e^\infty} + 1 = 1. \end{aligned}$$

2. Пусть функция $f(x)$ - непрерывна в промежутке $(-\infty, b]$.



Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty, b]$ называется

предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при

$a \rightarrow -\infty$, то есть

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (11.3)$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Используя формулу Ньютона – Лейбница, равенства (11.2) и (11.3) можно переписать в виде:

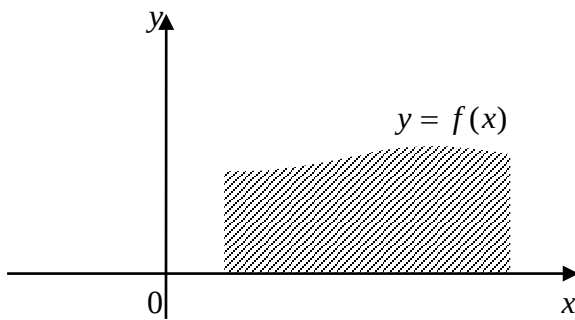
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (F(b) - F(a)),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

3. Пусть функция $f(x)$ - непрерывна и определена на всей числовой прямой. Тогда можно рассмотреть несобственный интеграл в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx. \quad (11.4)$$



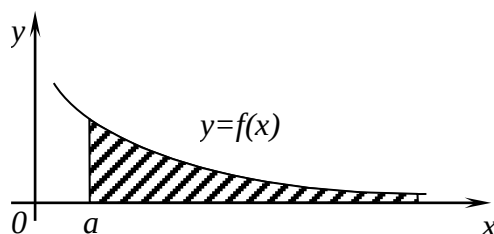
Пользуясь определениями несобственных интегралов на промежутках $[a, +\infty)$ и $(-\infty, b]$, и формулой Ньютона – Лейбница перепишем несобственный интеграл на интервале $(-\infty, +\infty)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x)dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (F(0) - F(a)) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(0)) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} (F(b) - F(a)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} (F(b) - F(a)).$

Если оба интеграла в правой части равенства (11.4) сходятся, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ - *расходится*.

С геометрической точки зрения, для неотрицательной при $x \geq a$ функции $f(x)$, несобственный интеграл, по аналогии с собственным интегралом, представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева отрезком прямой $x = a$ и снизу осью Ox .



Пример. Исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}; \quad \text{г) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Решение.

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Так как предел существует, то данный несобственный интеграл сходится.

$$\text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b) = +\infty.$$

Данный интеграл расходится.

в) Установим, при каких значениях α интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится.

Случай $\alpha = 1$ был рассмотрен выше, то есть $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ - расходится. Если

$\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{при } <1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{при } >1 \end{cases}.$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Аналогично определяются следующие несобственные интегралы

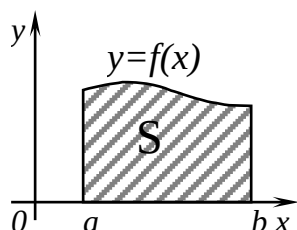
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad c \in (-\infty, \infty).$$

$$\begin{aligned} \Gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\arctg(x+1) \Big|_a^0 \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctg(x+1) \Big|_0^b \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\arctg(0+1) - \arctg(a+1) \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctg(b+1) - \arctg(0+1) \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\arctg 1 - \arctg(a+1) \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctg(b+1) - \arctg 1 \right) = \\ &= \arctg 1 - \arctg(-\infty) + \arctg(\infty) - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

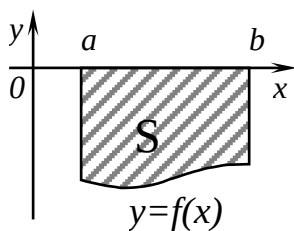
2.4 Геометрические приложения определённого интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур



Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если при этом $f(x) \geq 0$ на этом отрезке, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями, $y = f(x)$,

$y = 0$, $x = a$, $x = b$, определяется с помощью интеграла:

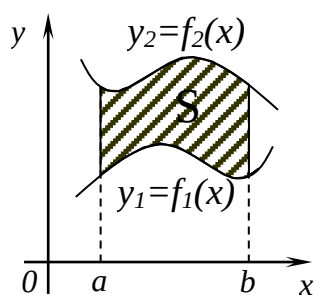


$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Замечание 1. Если же $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле:

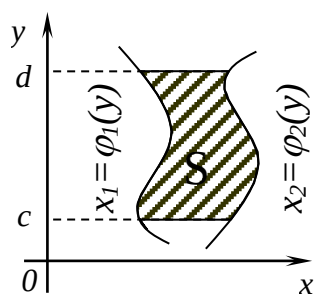
$$S = -\int_a^b f(x) dx, \text{ или } S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Наконец, если линия $y = f(x)$ пересекает ось Ox , то отрезок $[a, b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул, которая ей соответствует.



Замечание 2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y_2 = f_2(x)$, снизу – графиком функции $y_1 = f_1(x)$, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле:

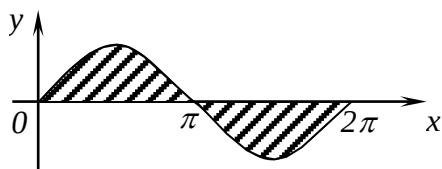
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$



Замечание 3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной справа графиком функции $x_2 = \varphi(y_2)$, слева – графиком функции $x_1 = \varphi(y_1)$, снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy.$$

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \leq x \leq 2\pi$.



Решение. Разобьём отрезок $[0, 2\pi]$ на два отрезка: $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$. На первом из них

$\sin x \geq 0$, на втором $\sin x \leq 0$. Тогда, используя формулы, находим искомую площадь:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = -\cos x \Big|_0^{\pi} + |-\cos x| \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(-1) + 1 + |-1 - 1| = 2 + |-2| = 4.$$

Ответ. $S = 4$ (кв.ед.)

Нахождение объема тел вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$, непрерывной кривой $y = f(x)$ и отрезком оси Ox , определяется по формуле

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = c$, $y = d$, непрерывной кривой $x = \varphi(y)$ и отрезком оси Oy , определяется по формуле

$$V = \pi \cdot \int x^2 dy.$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $x \cdot y = 4$, прямыми $y = 1$, $y = 2$ и осью Oy .

Решение. $x = \frac{4}{y}$, $c = 1$, $d = 2$. Тогда $V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dy = 8\pi$.

Длина дуги кривой.

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$ в промежутке $[a, b]$ и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в указанном промежутке, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Если кривая задана уравнением $x = \varphi(y)$ в промежутке $[c, d]$ и функция $\varphi(y)$ имеет непрерывную производную в этом промежутке, то длина дуги определяется по формуле

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy.$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x$, содержащейся между точками, для которых $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$.

Решение.

$$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{1+x^2}; \quad x = \sqrt{t^2-1} \\ dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ t_n = 2 \\ t_e = 3 \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{t^2-1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.

Решение. 1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной двумя линиями найдем по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Найдем пределы интегрирования. В качестве a и b возьмем абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}.$$

Получим $x^2 + 4x = x + 4$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Таким образом $a = -4$, $b = 1$.

2. Определим, какой график расположен выше. Для этого построим заданные линии. Графиком функции $y = x^2 + 4x$ является парабола. Найдём координаты вершины параболы:

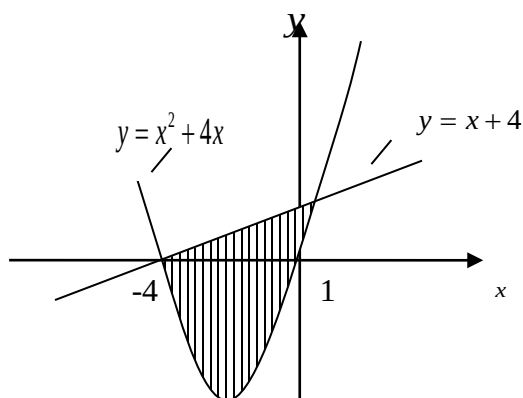
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2, \quad y_0 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 4 - 8 = -4.$$

Найдём точку пересечения параболы с осями координат:

- Если $y = 0$, то $x^2 + 4x = 0$. Решая квадратное уравнение получим $x_1 = 0$ и $x_2 = -4$. Следовательно $(-4, 0)$ и $(0, 0)$ - точки пересечения с осью Ox .

- Если $x = 0$, то $y = 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$. Следовательно, $(0, 0)$ - точка пересечения с осью Oy .

Графиком функции $y = x + 4$ является прямая линия, для построения которой достаточно взять две точки.



Из рисунка видно, что график функции $y = x + 4$ находится выше графика функции $y = x^2 + 4x$, следовательно, выполняется условие $(x + 4) \geq (x^2 + 4x)$.

Применяя формулу $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$, где $f_1(x) = x + 4$ и $f_2(x) = x^2 + 4x$,

найдем площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$S = \int_{-4}^0 (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int_{-4}^0 (-x^2 - 3x + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-4}^0 = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ. $S = 20 \frac{5}{6}$ (кв. ед.)

Упражнения

1. Вычислить определенные интегралы:

$$1.1 \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$$

$$1.2 \int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$1.3 \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$$

$$1.4 \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx.$$

$$1.5 \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$1.6 \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}.$$

$$1.7 \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

$$1.8 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$1.9 \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

$$1.10 \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \cdot \sin 2x dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы с помощью замены переменной:

$$2.1 \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}.$$

$$2.2 \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

$$2.3 \int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3} dx}{(x-2)^{2/3} + 3}.$$

$$2.4 \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

$$2.5 \int_{-a}^a \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx.$$

$$2.6 \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

3. Вычислить определенные интегралы с помощью интегрирования по частям:

$$3.1 \int_0^1 x e^x dx.$$

$$3.2 \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$3.3 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$3.4 \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$3.5 \int_1^2 \ln^2 x dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$4.1 y = x^2 + 1, x = 4, x = 0, y = 0.$$

$$4.2 y = 0, y = e^x, x = 0, x = 1.$$

$$4.3 \quad y = 0, \quad y = \sin 2x, \quad x = 0, \quad x = \frac{2\pi}{3}. \quad 4.4 \quad y = 0, \quad y = -x^2 + 4, \quad x = 3.$$

$$4.5 \quad y = x^2 - 2x, \quad y = x.$$

$$4.6 \quad y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$$

$$4.7 \quad x^2 = 4y, \quad y = \frac{8}{x^2 + 4}.$$

$$4.8 \quad y = e^{x/2} + e^{-x/2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \\ x = 2.$$

$$4.9 \quad y = 3 + 2x, \quad y = -x, \quad y = 4.$$

$$4.10 \quad x - y^2 = 0, \quad y + x = 2.$$

5.1 Вычислить площадь фигуры, содержащейся внутри кардиоиды $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

5.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним завитком кривой $r = 4 \sin 2\varphi$.

5.3 Вычислить площадь одной петли кривой $r = \cos 2\varphi$.

5.4 Вычислить площадь эллипса $x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t$.

5.5 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t$.

5.6 Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

5.7 Найти длину дуги кривой $y = \ln \cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$.

5.8 Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{5}x \cdot \sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox .

5.9 Найти длину дуги цепной линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ от $x = -1$ до $x = 1$.

5.10 Найти длину дуги $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

5.11 Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{3}t^3 - t, \quad y = t^2 + 2$ от $t = 0$ до $t = 3$.

5.12 Вычислить длину дуги кривой $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$, если $0 \leq t \leq 2\pi$.

5.13 Вычислить длину дуги циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

5.14 Вычислить объем тела, образованного вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ вокруг оси } Ox.$$

5.15 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy

площади, ограниченной линиями: $x = 0$, $y = 0$, $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$.

5.16 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox

площади, ограниченной линиями: $y = 1 - x^2$, $y = x^2 + 2$, $x = -1$, $x = 1$.

5.17 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox

площади, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 3x - 1$.

5.18 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox

площади, ограниченной линиями: $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, $y = 0$, $x = -a$, $x = a$.

5.19 Найти объем конуса, полученного вращением вокруг оси Ox части прямой $4x - 5y + 3 = 0$, содержащейся между осями координат.

6. Вычислить несобственный интеграл 1 рода или установить его расходимость:

6.1 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^5}$. **6.2** $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$. **6.3** $\int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$. **6.4** $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$.

6.5 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$. **6.6** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. **6.7** $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$. **6.8** $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x+1) dx}{x+1}$.

7. Вычислить несобственный интеграл 2 рода или установить его расходимость:

7.1 $\int_0^3 \frac{dx}{x^2}$. **7.2** $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$. **7.3** $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$. **7.4** $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$.

$$7.5 \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}. \quad 7.6 \int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx. \quad 7.7 \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx. \quad 7.8 \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Ответы. 1.1 $\frac{7}{72}$. 1.2 $\frac{23}{2}$. 1.3 $-5(\sqrt[5]{16}-1)$. 1.4 $\frac{1}{5}(e-1)^5$. 1.5 $\frac{1}{4}$. 1.6

$e-\sqrt{e}$. 1.7 2. 1.8 $\arctg \frac{1}{7}$. 1.9 1. 1.10 $\frac{2}{7}$. 2.1 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 2.2 $4-2\ln 3$.

2.3 $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. 2.4 $4-\pi$. 2.5 $\frac{3}{8}\pi a^4$. 2.6 $\frac{4-\pi}{2}$. 3.1 1. 3.2 $\frac{\pi-2}{4}$. 3.3

$\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 3.4 1. 3.5 $2(\ln 2-1)^2$. 4.1 $\frac{76}{3}$. 4.2 $e-1$. 4.3 $\frac{5}{4}$. 4.4

13. 4.5 $\frac{9}{2}$. 4.6 $e+\frac{1}{e}-2$. 4.7 $2\pi-\frac{4}{3}$. 4.8 $2e-\frac{2}{e}$. 4.9 $\frac{27}{4}$. 4.10 $\frac{9}{2}$. 5.1

6π . 5.2 2π . 5.3 $\frac{\pi}{8}$. 5.4 6π . 5.5 $\frac{3}{2}\pi$. 5.6 $\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right)$. 5.7

$-\operatorname{Intg} \frac{\pi}{8}$. 5.8 $\frac{20}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$. 5.9 $e-\frac{1}{e}$. 5.10 $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 5.11 12. 5.12 6. 5.13

8. 5.14. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 5.15 $\frac{1}{15}\pi$. 5.16 10π . 5.17 $\frac{17}{15}\pi$. 5.18

$\frac{\pi a^3}{4}(e^2+4-e^{-2})$. 5.19 $\frac{9\pi}{100}$. 6.1 $\frac{1}{384}$. 6.2 $\frac{1}{2}$. 6.3 $-\frac{\pi^2}{8}$. 6.4 Расходится. 6.5

Расходится. 6.6 π . 6.7 $\frac{1}{2}$. 6.8 Расходится. 7.1 Расходится. 7.2 $\frac{8}{3}$. 7.3

Расходится. 7.4 2. 7.5 ∞ , расходится. 7.6 ∞ , расходится. 7.7 $\frac{10}{7}$. 7.8 1.

Тест для самоконтроля

Тема: «Определенный интеграл»

1. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-

Лейбница и свойства определенного интеграла $\int_{-1}^3 \left(x + \frac{3}{4}\right) dx$

a. 8, b. 7, c. 3, d. 0

2. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-

Лейбница и свойства определенного интеграла $\int_2^4 (32 + 4x - 3x^2) dx$

a. 30, b. 31, c. 32, d. -32

3. Вычислить интеграл, применяя формулу интегрирования по частям для

определенного интеграла $\int_0^1 \arcsin x dx$

a. $\frac{\pi}{2} - 1$

b. $1 - \frac{\pi}{2}$

c. $\frac{\pi}{3} - 1$

d. $1 - \frac{\pi}{6}$

4. Вычислить интеграл $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$, используя указанную замену переменных

$$1 + 3x = t^2$$

a. 2, b. -4, c. 1, d. 4

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ОУ и линиями $y = x^2$,

$$y = 8$$

a. 8,5

b. 10

c. 11

d. 12

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 6x + 10$,

$$y = 6x - x^2 \text{ и прямой } x = -1$$

a. 18,3

b. $20\frac{2}{3}$

c. $21\frac{1}{3}$

d. $22\frac{1}{3}$

7. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - 1$ отсеченной осью ОХ

a. $\sqrt{3} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

b. $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

c. $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

d. $\sqrt{5} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

8. Вычислить интеграл, применяя формулу интегрирования по частям для

определенного интеграла $\int_0^1 x \cdot e^x dx$

a. 2

b. -2

c. 1

d. -1

9. Вычислить интеграл, применяя формулу интегрирования по частям для

определенного интеграла $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$

a. e

b. 1

c. 2

d. -1

10. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$, используя замену переменной $\ln x = t$

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{3}{4}$

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{3}{5}$

11. Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$, используя замену $\cos x = t$

a. $\frac{3}{4}$

b. $\frac{4}{3}$

c. 1,5

d. $\frac{3}{5}$

12. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$, используя замену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

a. $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

b. $\frac{\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

d. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

13. Вычислить определенный интеграл $\int_3^9 \frac{dx}{x-2}$

a. $\ln 3$

b. $\ln 4,5$

c. $\ln 7$

d. $\ln 1,5$

14. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 e^{-3x} dx$

a. $\frac{1}{3}(1 - e^{-3})$ b. $\frac{e^{-3} - 1}{3}$ c. $\frac{1 - e^{-2}}{2}$

15. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 f(x)dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x^3, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

a. 5 b. 2,5 c. -10 d. 10

16. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{32dx}{(3-x)^5}$

a. 7,5 b. -7,5

c. 7 d. $-\frac{7}{5}$

17. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx$

a. $\frac{\pi}{2} + \ln 2$ b. $\frac{3\pi}{8} + \frac{\ln 2}{2}$ c. $\frac{3\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$ d. $\frac{\ln 2}{2}$

18. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 + 5t + 4}$

a. $\ln 1\frac{1}{4}$ b. $-\frac{1}{3}\ln \frac{5}{4}$ c. $\frac{1}{3}\ln \frac{5}{4}$ d. $\ln \frac{5}{4}$

19. Вычислить интеграл $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$, используя замену $e^x = t$

a. $\frac{\ln 1,5}{2}$ b. $\frac{\ln 2,5}{2}$ c. $-\frac{\ln 1,5}{2}$ d. $\ln 1,5$

20. Формула Ньютона-Лейбница имеет вид

a. $\int f(x)dx = F(b) - F(a)$ b. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

c. $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$ d. $\int f(x)dx = F(b) + F(a)$

РАЗДЕЛ VII. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§12. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1 Основные определения

Определение. Переменная величина z называется функцией двух переменных величин x и y , если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z .

Функция двух переменных обозначается символом:

$$z = f(x, y) \text{ или } z = z(x, y).$$

Пример. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y , выражается формулой $S = x \cdot y$, то есть значение S определяется совокупностью значений x и y , следовательно является функцией двух переменных.

Значение функции $z = f(x, y)$ при $x = a$, $y = b$ обозначается через $f(a, b)$.

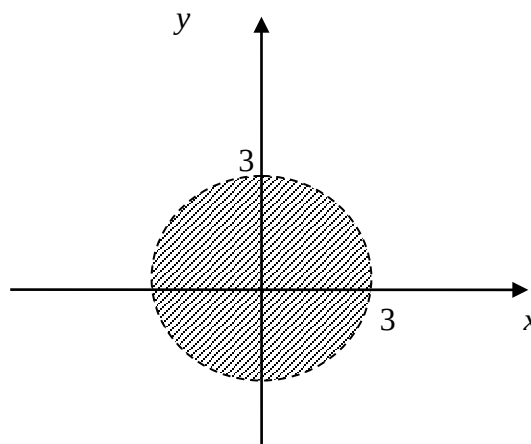
Определение. Областью определения функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется совокупность точек (x, y) плоскости $хоу$, в которых данная функция определена, то есть принимает действительные значения. Множество всех значений, принимаемых переменной z , называется областью значения функции z .

Пример. 1. Областью определения функции $z = 1 - x - y$ является множество всех пар (x, y) , то есть вся плоскость xOy , а областью значения этой функции – промежуток $(-\infty; \infty)$.

2. Для функции $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ область определения является вся плоскость xOy , а область значений – промежуток $(0; +\infty)$.

3. $z = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

Функция существует лишь для тех пар значений x и y , которые удовлетворяют условию $9 - x^2 - y^2 > 0$, или $x^2 + y^2 < 9$. То есть область определения данной функции будут являться точки, лежащие внутри окружности $x^2 + y^2 = 9$.



Определение. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z) , у которых аппликата z связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x, y)$, то есть данный график представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

12.2 Частные и полное приращение функции

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция от двух переменных x и y .

Дадим переменной x приращение Δx , оставляя переменную y неизменной. Найдем новое значение функции $f(x + \Delta x, y)$.

Определение. Частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной x называется разность между новым значением функции $f(x + \Delta x, y)$ и

старым значением $f(x, y)$ и обозначается следующим образом

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, переменной y дадим приращение Δy , а переменную x оставим без изменения. Найдем новое значение функции $f(x, y + \Delta y)$.

Определение. Частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной y называется разность между новым значением функции $f(x, y + \Delta y)$ и старым значением $f(x, y)$ и обозначается следующим образом

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Дадим приращение и переменной x , и переменной y . Найдем новое значение функции $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Определение. Полным приращением функции $f(x, y)$ называется разность между новым значением функции $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ и старым значением $f(x, y)$ и обозначается следующим образом

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Замечание. полное приращение функции не равно сумме частных приращений, то есть

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Пример. Найти частные и полное приращение функции $z = x \cdot y$.

Решение. Найдем частное приращение функции по переменной x , для этого переменной x дадим приращение Δx , а переменную y оставим без изменения, получим

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - x \cdot y = x \cdot y + \Delta x \cdot y - x \cdot y = \Delta x \cdot y.$$

Найдем частное приращение по переменной y , для этого переменной y дадим приращение Δy , а переменную x оставим без изменения, получим

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = x \cdot y + \Delta y \cdot x - x \cdot y = \Delta y \cdot x.$$

Для нахождения полного приращения дадим обоим переменным и x , и y приращения, получим

$$\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y + \Delta x \cdot \Delta y - x \cdot y = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y.$$

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

12.3 Предел и непрерывность функции двух переменных

Определение. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ (или в точке (x_0, y_0)), если $\forall \varepsilon > 0$, найдется такое положительное число δ (зависящее от ε , то есть $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех точек (x, y) , отстоящих от точки (x_0, y_0) на расстоянии ρ , меньшее чем δ (то есть $0 < \rho < \delta$), выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

и обозначается следующим образом

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Определение. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ (или в точке (x_0, y_0)), если для любой последовательности точек $\{(x_n, y_n)\}$ из области определения функции, отличных от точки (x_0, y_0) и сходящихся к этой точке, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n, y_n)\}$ сходится к числу A , и обозначается следующим образом

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Пример. Вычислить $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Решение.

Обозначим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Условие $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ равносильно тому, что $\rho \rightarrow 0$. Запишем предел в виде

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln\left(1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \frac{0}{0} =$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho^2} = \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \right) \cdot \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho^2} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) , если она удовлетворяет трем условиям:

1. Определена в точке (x_0, y_0) , то есть существует значение функции в этой точке.
2. Имеет конечный предел при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$.
3. Предел функции в точке (x_0, y_0) равен значению функции в этой точке, то есть $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Пример. Доказать, что функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в точке $(0, 0)$.

Решение. Проверим три условия:

- 1) $z(0, 0) = 0 + 0 = 0$;
- 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0 + 0 = 0$;
- 3) $z(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0$.

Так как все три условия выполняются, то данная функция является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Пример. Найти пределы, если они существуют:

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2 + 4y}{2xy - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 4 \lim_{y \rightarrow 2} y^2}{\left(2 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y \right) - 1} = \frac{1 + 8}{2 \cdot 2 - 1} = 3$.
- 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{0}{0} \right)$.

Так как предел не должен зависеть от способа стремления к точке $(0,0)$, то пусть $y=kx$ ($y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$), тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{(1+k^2)},$$

то есть при разных k будем получать разные ответы, следовательно, данная функция в точке $(0,0)$ предела не имеет.

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3y}{x^3 + y} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Будем стремиться к точке $(0,0)$ по прямой $y=kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3y}{x^3 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3kx}{x^3 + kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3kx}{x(x^2 + k)} = 3.$$

А теперь устремимся к началу координат по кривой $y = x^3$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3y}{x^3 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{x^3 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2},$$

то есть предел функции зависит от способа стремления к предельной точке. Иначе: функция имеет два предела в одной точке, чего быть не может.

Следовательно, функция

$$f(x, y) = \frac{3y}{y + x^3},$$

не имеет предела в точке $(0,0)$.

Пример. Исследовать на непрерывность функции:

$$1) z = \frac{xy+1}{x^2+y^2}; \quad 2) u = \frac{4x}{x-y}; \quad 3) v = \operatorname{tg}(xy).$$

Решение. 1) Числитель и знаменатель функции $z(x, y)$ являются непрерывными функциями на всей плоскости, дробь будет непрерывна всюду, кроме точек, в которых знаменатель равен нулю, то есть исключая начало координат.

2) Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что функция $u(x, y)$ непрерывна всюду, кроме точек прямой $y=x$.

3) Поскольку xy непрерывная функция на всей плоскости, а тангенс непрерывен при всех конечных значениях аргумента, кроме точек $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, то функция $v(x, y)$ терпит разрыв там, где $xy = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

12.4 Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция от двух переменных x и y .

Определение. Частной производной функции двух переменных x и y по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении Δx (Δy) к 0 (если этот предел существует и конечен).

Для функции $z = f(x, y)$ по определению имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{частная производная по } x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (\text{частная производная по } y).$$

Из определения частных производных следует, что для нахождения производной z'_x необходимо x считать переменной величиной, а y - постоянной. А для нахождения производной z'_y необходимо y считать переменной, а x - постоянной.

Пример. Найти частные производные функции $z = x^3 \cdot y - 4y^2 + 6xy$.

Решение. $z'_x = 3x^2y + 6y$,

$$z'_y = x^3 - 8y + 6x.$$

Определение. Полным дифференциалом функции с двумя переменными x и y называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, то есть

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y .$$

Если предположить, что $z = x$, то

$$dz = dx = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y = x' \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = 1 \cdot \Delta x = \Delta x ,$$

то есть $\Delta x = dx$.

Если предположить, что $z = y$, то

$$dz = dy = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y = 0 \cdot \Delta x + y' \cdot \Delta y = 1 \cdot \Delta y = \Delta y ,$$

то есть $\Delta y = dy$.

Таким образом, дифференциалы независимых переменных совпадают с приращениями этих переменных. Тогда формулу полного дифференциала можно переписать в виде

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy .$$

На практике чаще используется эта формула.

Пример. Вычислить полный дифференциал функции $z = 5x^2y^3$.

Решение. Найдём частные производные:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 10xy^3; \quad z'_y = 15x^2y^2 .$$

Тогда

$$dz = 10xy^3 \cdot dx + 15x^2y^2 \cdot dy .$$

Пример. Найти частные производные по переменным x и y для функций

а) $z = x^3 - 2xy^2 + \sqrt{y}$;

б) $z = x^{\sin y}$.

Решение.

а) Считая $y = \text{const}$, имеем:

$$z'_x = (x^3)'_x - 2y^2(x)'_x + (\sqrt{y})'_x = 3x^2 - 2y^2.$$

При вычислении z'_y нужно считать $x = \text{const}$, поэтому

$$z'_y = (x^3)'_y - 2x(y^2)'_y + (\sqrt{y})'_y = -4xy + \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

б) Если $y = \text{const}$, то функция z является степенной функцией аргумента x , поэтому:

$$z'_x = (x^{\sin y})'_x = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}.$$

При $x = \text{const}$ функция z – показательная функция аргумента y , поэтому:

$$z'_y = (x^{\sin y})'_y = x^{\sin y} \cdot \ln x \cdot (\sin y)'_y = x^{\sin y} \ln x \cdot \cos y.$$

Пример. Найти частные производные и полный дифференциал функции

$$z = x^2 + 2xy + y^3.$$

Решение.

Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию от переменной x , получаем частную производную по x :

$$z'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (y^3)'_x = 2x + 2y + 0 = 2(x + y).$$

Аналогично, считая x постоянной и дифференцируя z как функцию y , получаем частную производную по y :

$$z'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (y^3)'_y = 0 + 2x + 3y^2.$$

Найдем полный дифференциал исходной функции:

$$dz = 2(x + y)dx + (2x + 3y^2)dy.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции двух переменных

$$z = f(x, y) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}}.$$

Решение. Полный дифференциал функции двух переменных находим по формуле:

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

где z'_x ; z'_y - частные производные данной функции z .

Частные производные находим по обычным формулам дифференцирования для функции одной переменной, причем z'_x находим, считая «у» постоянной величиной; аналогично при отыскании z'_y считаем «х» постоянным:

$$\begin{aligned} z'_x &= \left[x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \right]'_x = (x^2)'_x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot \left(e^{\frac{x}{y^2}} \right)'_x = 2x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} \right)'_x = \\ &= 2x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \frac{1}{y^2} = x e^{\frac{x}{y^2}} \left(2 + \frac{x}{y^2} \right), \quad \text{здесь } y = \text{const}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left[x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \right]'_y = (x^2)'_y \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot \left(e^{\frac{x}{y^2}} \right)'_y = 0 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} + x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} \right)'_y = \\ &= x^2 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot x \cdot (y^{-2})'_y = x^3 \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \cdot (-2) \cdot y^{-3} = -\frac{2x^3}{y^3} \cdot e^{\frac{x}{y^2}}, \quad \text{здесь } x = \text{const} \end{aligned}$$

Отсюда полный дифференциал функции:

$$dz = x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \left(2 + \frac{x}{y^2} \right) \cdot dx - \frac{2x^3}{y^3} \cdot e^{\frac{x}{y^2}} dy$$

или

$$dz = x \cdot e^{\frac{x}{y^2}} \left(\left(2 + \frac{x}{y^2} \right) \cdot dx - \frac{2x^2}{y^3} \cdot dy \right).$$

12.5 Частные производные высших порядков.

Рассмотренные выше частные производные z'_x и z'_y для функции $z = f(x, y)$, называются частными производными первого порядка, их всего две. Если эти производные тоже являются дифференцируемыми функциями двух переменных, то для них существуют частные производные второго

порядка, которых уже будет четыре и обозначаются они следующим образом:

$$z''_{x^2} = z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

- функция последовательно дифференцируется по переменной x дважды;

$$z''_{y^2} = z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

- функция последовательно дифференцируется по переменной y дважды;

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

- функция сначала дифференцируется по переменной x , а затем результат дифференцируется по переменной y ;

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

- функция сначала дифференцируется по переменной y , а затем результат дифференцируется по переменной x .

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx} отличающиеся порядком дифференцирования, называют смешанными частными производными второго порядка. Если данные производные непрерывны, то они равны.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x-2y}$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = e^{x-2y}, \quad z'_y = -2e^{x-2y}.$$

Найдем частные производные второго порядка

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x = (e^{x-2y})'_x = e^{x-2y};$$

$$z''_{y^2} = (z'_y)'_y = (-2e^{x-2y})'_y = 4e^{x-2y};$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (e^{x-2y})'_y = -2e^{x-2y};$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-2e^{x-2y})'_x = -2e^{x-2y}.$$

Пример. Найдём частные производные z'''_{xxy} , z'''_{xyx} , z'''_{xyy} , z'''_{yxx} функции

$$z = x^2y^3.$$

Решение. Последовательно находим:

$$z'_x = 2xy^3, z'_y = 3x^2y^2;$$

$$z''_{xx} = 2y^3, z''_{xy} = 6xy^2, z''_{yx} = 6xy^2;$$

$$z'''_{xxy} = (z''_{xx})'_y = 6y^2,$$

$$z'''_{xyx} = (z''_{xy})'_x = 6y^2,$$

$$z'''_{xyy} = (z''_{xy})'_y = 12xy,$$

$$z'''_{yxx} = (z''_{yx})'_x = 6y^2.$$

12.6 Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) . Найдём полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z.$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y,$$

то получим приближённую формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y.$$

Пример. Вычислить приближённое значение

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}.$$

Выберем $x_0 = 1, y_0 = 2$. Тогда $\Delta x = 1,02 - 1 = 0,02$; $\Delta y = 1,97 - 2 = -0,03$. Найдем

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{3x_0^2}{2\sqrt{x_0^3 + y_0^3}} = \frac{3 \cdot 1}{2\sqrt{1+8}} = \frac{1}{2},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{3y_0^2}{2\sqrt{x_0^3 + y_0^3}} = \frac{3 \cdot 4}{2\sqrt{1+8}} = 2.$$

Следовательно, учитывая, что $f(1, 2) = 3$, получим:

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = 2,95.$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1, y = 2, z = 1$.

Решение. Из заданного выражения определим

$$\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04, \Delta y = 1,99 - 2 = -0,01, \Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Найдем значение функции $u(x, y, z) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$.

Находим частные производные в точке $(1, 2, 1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}.$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,05.$$

Тогда

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx u(1,2,1) + du = 1 + 0,05 = 1,05.$$

12.7 Экстремум функции с двумя переменными

Определение. Точка $M(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки $M(x_0, y_0)$, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)).$$

Точки минимума и максимума называются *точками экстремума функции*.

Необходимое условие существования экстремума

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M(x_0, y_0)$ экстремум и в этой точке существуют частные производные z'_x и z'_y , то они должны быть равны нулю.

Это условие является только необходимым, но не достаточным.

Достаточное условие существования экстремума

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ и удовлетворяет условиям: $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Обозначим через

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$$

$$B = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

$$C = f''_{y^2}(x_0, y_0).$$

$$\text{Составим определитель } \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда, если:

- 1) $\Delta > 0$ - экстремум функции существует, причем если $A > 0$ и $C > 0$, то получаем точку минимума, а если $A < 0$ и $C < 0$ - то точку максимума.
- 2) $\Delta < 0$ - экстремума нет.
- 3) $\Delta = 0$ - вопрос остается открытым, нужны дополнительные исследования.

Пример. Найти точки экстремума функции $z = x^2y - 6x - 4y$.

Решение. Проверим достаточное условие существования экстремума, для этого найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = 2xy - 6;$$

$$z'_y = x^2 - 4.$$

Приравниваем найденные частные производные к нулю, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y :

$$\begin{cases} 2xy - 6 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{3}{2}, & y_2 = -\frac{3}{2} \\ x_1 = 2, & x_2 = -2 \end{cases}.$$

Получили две точки подозрительные на экстремум: $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$ и $N\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$. Проверим необходимое условие существования экстремума, для этого найдем частные производные второго порядка.

$$z''_{x^2} = (2xy - 6)'_x = 2y;$$

$$z''_{y^2} = (x^2 - 4)'_y = 0;$$

$$z''_{xy} = (2xy - 6)'_y = 2x.$$

Найдем значения этих производных в точке M , получим:

$$A = z''_{x^2}\left(2, \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3;$$

$$B = z''_{xy}\left(2, \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$C = z''_{y^2}\left(2, \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Найдем значение определителя Δ , получим:

$$\Delta = B^2 - AC = 16 - 3 \cdot 0 = 16.$$

Так как $\Delta > 0$, то в точке $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$ экстремум существует, причем, так как $A > 0$ и $C > 0$, то это точка минимума функции $z = x^2y - 6x - 4y$.

Найдем значения частных производных второго порядка в точке N , получим:

$$A = z''_{x^2}\left(-2, -\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -3;$$

$$B = z''_{xy}\left(-2, -\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot 2 = -4;$$

$$C = z''_{y^2}\left(-2, -\frac{3}{2}\right) = 0.$$

Найдем значение определителя Δ , получим:

$$\Delta = B^2 - AC = 16 - (-3) \cdot 0 = 16.$$

Так как $\Delta > 0$, то в точке $N\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ экстремум существует, причем, так как $A < 0$ и $C < 0$, то это точка максимума.

Упражнения

1. Найти область определения функции и нарисовать эту область:

$$1.1 \quad z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$1.2 \quad z = \ln(y^2 - 2x + 10)$$

$$1.3 \quad z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$$

$$1.4 \quad z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

$$1.5 \quad z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$$

$$1.6 \quad z = \ln(1+x)(1-y)$$

2. Найти частные производные первого порядка:

$$2.1 \quad z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$2.2 \quad z = x^y$$

$$2.3 \quad z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

$$2.4 \quad z = e^{-\frac{x}{y}}$$

$$2.5 \quad e^{\frac{1}{z}} + x^3 \cos y = 0$$

$$2.6 \quad e^{z^2} + 3xyz = 0$$

$$2.7 \quad ye^{3x} - \operatorname{arctg} \frac{y}{z} = 0$$

$$2.8 \quad \operatorname{ctg} z^3 - \frac{x^2}{y} = 0$$

$$2.9 \quad 7z^2 + x^5 \cos 3y = 0$$

$$2.10 \quad \operatorname{tg}(4+z) - \frac{x^3}{5y} = 0$$

3. Найти все частные производные второго порядка.

$$3.1 \quad z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}.$$

$$3.2 \quad z = \arcsin(xy).$$

$$3.3 \quad z = \sin^2(ax + by).$$

$$3.4 \quad z = \ln(e^x + e^y).$$

4. Доказать справедливость равенства:

$$4.1 \quad \text{если } z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ то } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.2 \quad \text{если } z = e^x(x \cos y - y \sin y), \text{ то } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.3 \quad \text{если } z = \sin(x + ay), \text{ то } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$4.4 \quad \text{если } z = \cos y + (y - x) \sin y, \text{ то } (x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

5. Найти полные дифференциалы функции:

$$5.1 \quad z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$5.2 \quad z = \sin(xy)$$

$$5.3 \quad z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$5.4 \quad z = e^{-\frac{x}{y}}$$

6. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

$$6.1 \ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1).$$

$$6.2 1,04^{2,02}.$$

$$6.3 \sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}.$$

$$6.4 \sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}.$$

7. Исследовать функцию на экстремум:

$$7.1 z = 4 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

$$7.2 z = e^{2y}(x^2 + y + 2x).$$

$$7.3 z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$7.4 z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

Ответы к заданиям: 1.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 1.2. $y^2 - 2x + 10 > 0$. 1.3. $\begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x \end{cases}$. 1.4.

$$1.5. \begin{cases} 1-x \leq y \leq 1+x & (x > 0) \\ 1+x \leq y \leq 1-x & (x < 0) \end{cases} \quad 1.6. \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 \geq y \end{cases} \quad 2.1. z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}. \quad 2.2. z'_x = y \cdot x^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x. \quad 2.3. z'_x = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}, \quad z'_y = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}.$$

$$2.4. z'_x = -\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \quad z'_y = \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}. \quad 2.5. z'_x = \frac{3x^2 z^2 \cos y}{e^{\frac{1}{z}}}, \quad z'_y = -\frac{x^3 z^2 \sin y}{e^{\frac{1}{z}}} \quad 2.6.$$

$$z'_x = -\frac{3yz}{e^{z^2} \cdot 2z + 3xy}, \quad z'_y = -\frac{3xz}{e^{z^2} \cdot 2z + 3xy}. \quad 2.7. z'_x = -3e^{3x}(y^2 + z^2),$$

$$z'_y = -\frac{e^{3x}(y^2 + z^2) - z}{y}. \quad 2.8. z'_x = -\frac{2x \sin^2 z^3}{3yz^2}, \quad z'_y = \frac{x^2 \sin^2 z^3}{3y^2 z^2}. \quad 2.9.$$

$$z'_x = -\frac{5x^4 \cos 3y}{7z^2 \ln 7 \cdot 2z}, \quad z'_y = \frac{3x^5 \sin 3y}{7z^2 \ln 7 \cdot 2z}. \quad 2.10. z'_x = \frac{3x^2 \cos^2(4+z)}{5y},$$

$$z'_y = -\frac{x^3 \cos^2(4+z)}{5y^2}. \quad 3.1. z''_{xx} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z''_{yy} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z''_{xy} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad 3.2.$$

$$z''_{xx} = \frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}, \quad z''_{yy} = \frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}, \quad z''_{xy} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)}}. \quad 3.3.$$

$$z''_{xx} = 2a^2 \cos 2(ax + by), \quad z''_{yy} = 2b^2 \cos 2(ax + by), \quad z''_{xy} = 2ab \cos 2(ax + by). \quad 3.4.$$

$$z''_{xx} = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2}, \quad z''_{yy} = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2}, \quad z''_{xy} = -\frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2}. \quad 5.1. dz = \frac{xdx}{x^2 + y^2} + \frac{ydy}{x^2 + y^2}.$$

$$5.2. \quad dz = y \cos(xy)dx + x \cos(xy)dy. \quad 5.3. \quad dz = -\frac{4xy^2 dx}{(x^2 - y^2)^2} + \frac{4x^2 y dy}{(x^2 - y^2)^2}. \quad 5.4.$$

$$dz = -\frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx - \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}} dy. \quad 6.1. \quad 0,005. \quad 6.2. \quad 1,08. \quad 6.3. \quad 1,013. \quad 6.4. \quad 3,037. \quad 7.1.$$

$$z_{\max}(4, -2) = 8. \quad 7.2. \quad z_{\min}\left(-1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}. \quad 7.3. \quad z_{\min}(1, 1) = -1. \quad 7.4. \quad z_{\min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Тест для самоконтроля

Тема «Функция нескольких переменных»

1. Значение функции $f(x, y) = xy$ в точке (2;3) равно:

a. 4, b. 2, c. 3, d. 6

2. Указать функцию трех переменных

a. $y = x^2$ b. $z = x^2 + y$

c. $y = \frac{x_1 + 2x_2 - 3x_3}{x_4}$ d. $t = \frac{x - y}{z}$

3. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} (x^2 + y^2)$

a. 5, b. 3, c. 4, d. 13

4. Функция $z = \frac{2x + y}{3x - y}$ не является непрерывной в точке:

a. (1;3) b. (-5;2) c. (4;4) d. (0;1)

5. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = 2x + y^2$ равна:

a. 2 b. $2 + y$ c. $2x + 1$ d. $2y$

6. Полный дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ функции $z = x + 3y$ равен:

a. $2dx + 2dy$ b. $dx + 3dy$ c. dy d. $dx + dy$

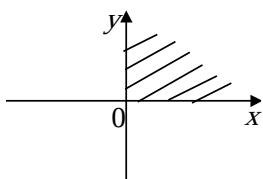
7. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ имеет

локальный экстремум, если:

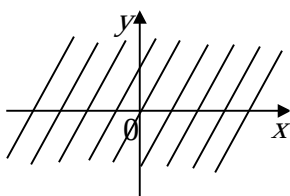
- а. $f''_{xx}(x, y) \leq 0$ б. $f''_{xx}(x, y) > 0$
 с. $f''_{xx}(x, y) < 0$ д. $f''_{yy}(x, y) < 0$

8. Областью определения функции $z = y + \sqrt{x}$ является:

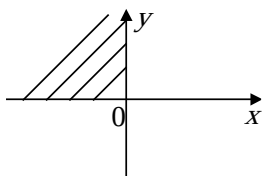
а.



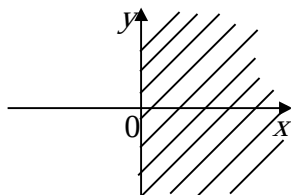
б.



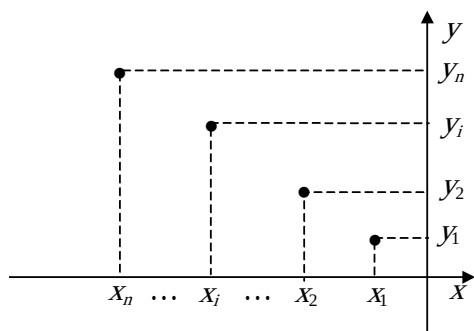
с.



д.



9. Установить вид функции $y = f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости экспериментальных точек:



a. $y = \frac{a}{x}$

b. $y = ax^2 + bx + c$

c. $y = ax + b$

d. $y = -ax + b$

10. Метод наименьших квадратов позволяет искать:

a. частные производные функции нескольких переменных

b. экстремум функции трех переменных

c. функциональную зависимость между x и y в виде линейной

функции $y = ax + b$

d. дифференциал функции двух переменных

РАЗДЕЛ VIII. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§13. Комплексные числа

13.1 Понятие числового поля

Одним из простейших числовых множеств является *множество натуральных чисел* $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

В нём всегда выполнимы два основных алгебраических действия: *сложение* и *умножение*. Это означает, что для любых натуральных чисел m и n

$$m + n \text{ и } m \cdot n,$$

есть снова натуральные числа. При этом выполнены следующие аксиомы:

1. $m + n = n + m$ - коммутативный закон сложения;
2. $(m + n) + l = m + (n + l)$ - ассоциативный закон сложения;
3. $m \cdot n = n \cdot m$ - коммутативный закон умножения;
4. $(m \cdot n) \cdot l = m \cdot (n \cdot l)$ - ассоциативный закон умножения;
5. $(m + n) \cdot l = m \cdot l + n \cdot l$ - дистрибутивный закон умножения

относительно сложения.

Операции вычитания и деления на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ в общем случае *невыполнимы*, так, например

$$3-5, 2-2, 4:7, 11:3$$

не являются натуральными числами.

Для выполнения действия вычитания множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ расширяют до *множества всех **целых** чисел $\mathbf{Z}$* :

$$\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

*Числовое множество в котором всегда выполнимы операции сложения и умножения в соответствии с аксиомами 1-5, а также операция вычитания называется **кольцом**.*

Таким образом *множество всех целых чисел образует кольцо.*

Для того, чтобы сделать выполнимой операцию деления следует добавить к множеству всех целых чисел $\mathbf{Z}$ множество всех обыкновенных дробей вида

$$\frac{m}{n}, n \neq 0,$$

где m и n - произвольные целые числа.

В результате такого расширения мы получили *множество всех **рациональных** чисел $\mathbf{Q}$.*

Очевидно, что в таком множестве выполнены действия сложения, умножения, вычитания и деления при $n \neq 0$.

*Множество чисел в котором всегда выполнимы действия сложения и умножения в соответствии с аксиомами 1-5, а также действия вычитания и деления при $n \neq 0$, называется **полем** рациональных чисел.*

Заметим, что множество иррациональных чисел поля не образует, так как $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ не являются иррациональными числами.

Объединив множества рациональных и иррациональных чисел мы получим *множество **вещественных** чисел $\mathbf{R}$* которое образует поле вещественных чисел.

13.2 Комплексные числа

Полученное нами множество вещественных чисел $\mathbf{R}$ не позволяет

нам извлекать корни из отрицательных чисел, например, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-16}$ и т.д.

В поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ не разрешимы уравнения вида $x^2 + 1 = 0$, $x^4 + 16 = 0$ и т.д.

Перед математикой встала задача: расширить поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ путём присоединения к нему новых чисел, таких, чтобы расширенное множество образовало числовое поле, в котором было бы всегда выполнимо действие извлечения корней.

Каким же должно быть это поле?

Во первых, оно должно содержать в себе поле вещественных чисел $\mathbf{R}$. Далее, в этом поле должно быть решено уравнение

$$x^2 = -1.$$

Число, квадрат которого равен -1, будем обозначать буквой i и назовём его **мнимой единицей**.

Итак,

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Так как новое множество должно быть полем, оно наряду с вещественным числом b и мнимой единицей i должно содержать их произведение bi , а также и сумму

$$a + bi,$$

где $a, b \in \mathbf{R}$, i - мнимая единица. Число

$$z = a + ib \tag{13.1}$$

назовём **комплексным числом** и обозначим множество всех комплексных чисел символом $\mathbf{C}$.

Число $a \in \mathbf{R}$ называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа z и обозначается как $a = \text{Re} z$.

Число $b \in \mathbf{R}$ называется *коэффициентом при мнимой единице* и обозначается как

$$b = \operatorname{Im} z.$$

Заметим, что $0 + bi = bi$ - мнимое число, а $a + 0 \cdot i = a$ - вещественное число.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ будем считать равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т.е.

$$z_1 = z_2$$

если

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

Для вещественных чисел мы можем установить понятие “больше” или “меньше”, например:

$$7 < 9, 12 > 6.$$

Для неравных комплексных чисел такое соотношение установить нельзя. Мы, например, не можем сказать в каком отношении находятся два неравных комплексных числа $6 + 9i$ и $2 - 9i$.

13.3 Действия над комплексными числами

Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ будем называть комплексное число

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i.$$

(13.2)

Таким образом *при сложении двух комплексных чисел надо сложить их действительные части и коэффициенты при мнимой единице.*

В области вещественных чисел имеется число “нуль”, такое, что

$$a + 0 = a.$$

В области комплексных чисел такую роль будет играть $0 + 0 \cdot i$.

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi.$$

Комплексное число $-a-bi$ будем называть *противоположным* комплексному числу $a + bi$.

Примеры.

- 1) $(2 + i) + (5 + 6i) = (2 + 5) + (1 + 6)i = 7 + 7i$,
- 2) $(5 + 7i) + (2 - 6i) = (5 + 2) + (7 - 6)i = 7 + i$,
- 3) $(6 - 4i) + (-15 - 2i) = (6 - 15) + (-4 - 2)i = -9 - 6i$,
- 4) $(-4i) + (9) = (0 - 4i) + (9 + 0i) = 9 - 4i$.
- 5) Решить уравнение $(5x + 3yi) + (2y - xi) = 9 + 5i$.

Сложив комплексные числа в левой части уравнения получим

$$(5x + 2y) + (-x + 3y)i = 9 + 5i.$$

Два комплексных числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т.е.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ -x + 3y = 5 \end{cases}.$$

Нетрудно показать, что решением данной системы уравнений будет $x = 1$ и $y = 2$.

Вычитание комплексных чисел

Разностью двух комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + b_1i \text{ и } z_2 = a_2 + b_2i$$

будем называть комплексное число $z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Пример.

$$(5 + 6i) - (3 + 7i) = (5 - 3) + (6 - 7)i = 2 - i.$$

Умножение комплексных чисел

Потребуем, чтобы умножение комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + b_1i \text{ и } z_2 = a_2 + b_2i$$

выполнялось по правилу умножения двучленов, т.е.

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = \\ &= a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i. \end{aligned}$$

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i. \quad (13.3)$$

Пример.

$$1) (2 + 3i) \cdot (6 - 5i) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot (-5)) + (2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6) = 27 + 8i,$$

$$2) (1 + i) \cdot (1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i,$$

$$3) (2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$$

$$4) \text{ Найти } z \text{ если } (2 - 3i) \cdot z = -1 - 5i.$$

Пусть $x = a + bi$, тогда $(2 - 3i) \cdot (a + bi) = (2a + 3b) + (-3a + 2b)i = -1 - 5i$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2a + 3b = -1, \\ -3a + 2b = -5. \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений будет $a = 1, b = -1$, т.е. $z = 1 - i$.

Проверим полученное решение

$$(2 - 3i) \cdot z = (2 - 3i) \cdot (1 - i) = 2 - 2i - 3i + 3i^2 = -1 - 5i.$$

Деление комплексных чисел

Соотношение

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

будем понимать в смысле, что $z_1 = z \cdot z_2$.

Пусть $z = x + yi, z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда

$$z_1 = z \cdot z_2 = (x + yi) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i.$$

В соответствии с (13.3) последнее выражение запишется так:

$$a_1 + b_1 i = a_2 x - b_2 y + (a_2 y + b_2 x) i,$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} a_2 x - b_2 y = a_1, \\ b_2 x + a_2 y = b_1. \end{cases} \quad (*)$$

Умножив первое равенство (*) на a_2 , а второе - на b_2 и сложив их, получим:

$$(a_2x - b_2y)a_2 + (b_2x + a_2y)b_2 = a_2^2x - a_2b_2y + b_2^2x + a_2b_2y = \\ = (a_{22} + b_{22})x = a_1a_2 + b_1b_2.$$

Откуда

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Умножив первое равенство (*) на b_2 , а второе - на a_2 и вычтя их, получим:

$$(a_2x - b_2y)b_2 - (b_2x + a_2y)a_2 = a_2b_2x - b_2^2y - a_2b_2x - a_2^2y = \\ (-a_{22} - b_{22})y = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Откуда

$$y = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Окончательно

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i. \quad (13.4)$$

Для каждого комплексного числа $z = a+bi \neq 0+0i$ определим обратное ему число z^{-1} , такое, что $z \cdot z^{-1} = 1+0i = 1$.

Используя (13.4) мы можем записать

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1+0i}{a+bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i. \quad (13.5)$$

Пример.

1) Найти отношение $\frac{9-7i}{2-3i}$, $2-3i \neq 0+0i$.

Решение.

Пусть

$$\frac{9-7i}{2-3i} = x + yi \Rightarrow (2-3i)(x+yi) = 9-7i,$$

тогда в соответствии с (4.3) запишем

$$(2x + 3y) + (2y - 3x)i = 9 - 7i,$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -3x + 2y = -7. \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений будет $x = 3, y = 1$.

Тогда

$$\frac{9 - 7i}{2 - 3i} = 3 + i.$$

2) Найти число, обратное $z = 2 + 3i$. В соответствии с (13.5) имеем

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 + 0i}{2 + 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} - \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

Проверим полученный результат умножением:

$$z \cdot z^{-1} = (2 + 3i) \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \right) = \frac{4}{13} - \frac{6}{13}i + \frac{6}{13}i - \frac{9}{13}i^2 = \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 1.$$

Комплексно-сопряженные числа

Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется *сопряженным* к комплексному числу $z = a + bi$. Например, число $3 + 5i$ сопряжено числу $z = 3 + 5i$, число $3 - 2i$ сопряжено числу $3 + 2i$, число $-3i = 0 - 3i$ сопряжено числу $3i = 0 + 3i$.

Пусть a – произвольное вещественное число. Тогда $a = a + 0i = a - 0i = \bar{a}$, то есть *любое вещественное число равно своему сопряженному*. Верно и обратное утверждение: *если комплексное число $z = a + bi$ равно своему сопряженному комплексному числу $\bar{z} = a - bi$, т.е.*

$$a + bi = a - bi,$$

то это число вещественное. Это следует из того, что равенство двух комплексных чисел z и $\bar{z}$ означает, что $a = a$ и $b = -b = 0$.

Таким образом, *из всех комплексных чисел вещественные числа и только они равны своим сопряженным числам*.

Очевидно, что *сумма и произведение комплексно-сопряженных чисел есть числа вещественные.*

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a, \quad (13.6)$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2. \quad (13.7)$$

Нетрудно показать, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ и } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \quad (13.8)$$

Свойство (13.7) позволяет получить практический способ деления комплексных чисел. Пусть

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}, \quad a_2 + b_2 i \neq 0 + 0i.$$

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на комплексно-сопряженное число $a_2 - b_2 i$, тогда

$$z = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2},$$

что немедленно приводит нас к формуле (13.4)

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Пример.

$$\frac{9 - 7i}{2 - 3i} = \frac{(9 - 7i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{18 + 27i - 14i + 21}{4 + 9} = \frac{39 + 13i}{13} = 3 + i.$$

Степени мнимой единицы

Первой степенью числа i является само это число, тогда:

$$i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = i^2 \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1; i^5 = i^4 \cdot i = i; i^6 = i^5 \cdot i = -1.$$

и так далее.

Очевидно, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i.$$

Примеры.

$$1. i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1.$$

$$2. i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i.$$

13.4 Геометрическое изображение комплексных чисел

Из школьного курса математики известно, что вещественные числа можно изображать точками на числовой прямой (рис. 1). При этом каждому вещественному числу соответствует единственная точка на числовой прямой.

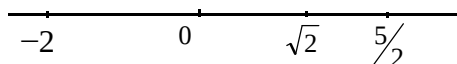


Рис. 1.

Мы можем утверждать, что *множество всех вещественных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек числовой прямой.*

Комплексное число $z = a + bi$ можно охарактеризовать упорядоченной парой вещественных чисел (a, b) , где a - первое число, b - второе число. Такую пару чисел можно отождествить с точкой на плоскости, если на ней задана система координат.

Например, комплексное число $z = 3 + 2i$ можно отождествить с точкой $A(3, 2)$, которую можно изобразить на плоскости HOY (рис. 2). Комплексно-сопряженное

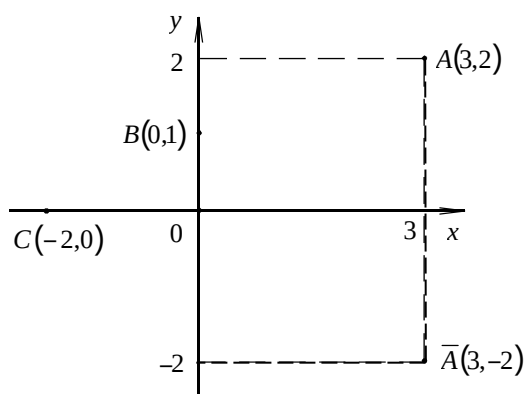


Рис. 2.

число $\bar{z} = 3 - 2i$ изобразится точкой

$\bar{A}(3, -2)$, симметричной точке $A(3, 2)$ относительно действительной оси.

Точки $B(0, 1)$ и $C(-2, 0)$ соответствуют комплексным числам $z = 0 + i$ и $z = -2 + 0i$.

Мы можем утверждать, что *множество всех комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек плоскости.*

13.5 Тригонометрическая форма комплексных чисел

С любой точкой А плоскости XOY мы можем связать радиус-вектор $\overline{AB} = \vec{r}$ и мы можем установить взаимно однозначное соответствие комплексных чисел $z = (a, b)$ с множеством векторов (рис. 3) с координатами (a, b) , если все векторы берут начало в точке О с координатами $(0, 0)$.

Очевидно, что $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. и тогда

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (13.9)$$

есть так называемая *тригонометрическая форма* комплексного числа.

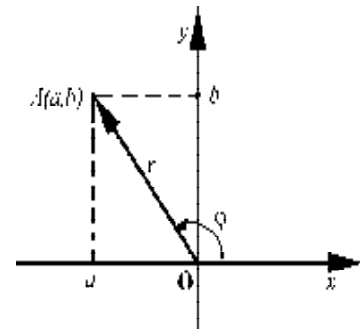


Рис. 3.

Угол φ будем называть *аргументом*

комплексного числа z , а $r = \|\overline{OA}\|$ - его *модулем*.

Ясно (рис. 3), что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Пример.

1. Записать в тригонометрической форме комплексные числа: $z = 1 + i$.

Модуль этого комплексного числа есть $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, тогда $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Окончательно запишем

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right], \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Обычно из бесконечного множества значений аргумента комплексного числа выбирают то, которое заключено между 0 и 2π . В нашем случае таким значением является $\frac{\pi}{4}$. Окончательно запишем

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right].$$

13.6 Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Умножение и деление комплексных чисел удобнее выполнить, если эти числа записаны в тригонометрической форме.

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, тогда

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

а

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Примеры.

$$1. z_1 = 2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ), z_2 = 3(\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ).$$

$$z = z_1 z_2 = 6(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 6.$$

$$2. z_1 = 5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ), z_2 = 4(\cos 13^\circ + i \sin 13^\circ).$$

$$z = z_1 z_2 = 20(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 20 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10 + 10\sqrt{3}i.$$

$$3. z_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ), z_2 = 3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ).$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} (1 + i).$$

Комплексно-сопряженное число

$$\bar{z} = a - bi = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$$

имеет тот же модуль r и противоположный аргумент $-\varphi$.

Произведение

$$z \cdot \bar{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^2,$$

откуда для модуля комплексного числа можем записать $r = \sqrt{z\bar{z}}$.

Если модуль комплексного числа равен единице ($r = 1$), то $z\bar{z} = 1$, и, таким образом $z^{-1} = \bar{z}$.

При любом натуральном $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

или

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad (13.10)$$

это так называемая *формула Муавра* позволяющая находить натуральные степени комплексных чисел.

13.7 Извлечение корней из комплексных чисел

Предположим, что корень степени n из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0 + 0i$ существует и равен $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Тогда

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя формулу Муавра, получим

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Модули двух равных комплексных чисел, отличных от нуля, равны, а аргументы могут отличаться на угол кратный 2π . Тогда

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi$$

или

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

где k - любое целое число. В частности при:

$$k = 0, \quad \theta = \frac{\varphi}{n};$$

$$k = 1, \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n};$$

$$k = 2, \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n};$$

.....

$$k = n-1, \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

При $k = \pm n, \pm (n+1), \pm (n+2)$ и т.д. будут получаться значения θ , отличающиеся от написанных выше на углы, кратные 2π и никаких новых комплексных чисел эти значения k дать не могут. Таким образом каждое комплексное число, отличное от нуля, имеет ровно n корней n -й степени.

Итак, если только корень n -й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существует, то он может принимать лишь следующие n значений:

$$a_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right);$$

$$a_1 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{n} \right);$$

.....

$$a_{n-1} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \right)$$

Геометрически все n значений корня n -й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ изображаются точками, лежащими на окружности с центром в начале координат, радиус которой равен $\sqrt[n]{r}$.

Пример.

Найти все значения корня 4-й степени из i .

Решение.

Запишем число i в тригонометрической форме, получим $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

Модули всех корней 4-й степени равны $\sqrt[4]{1}=1$. Аргументы будут иметь значения:

$$\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}; \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4}; \frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4}$$

или

$$\frac{1}{8}\pi; \frac{5}{8}\pi; \frac{9}{8}\pi; \frac{13}{8}\pi,$$

Тогда

$$a_0 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}; a_1 = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8};$$

$$a_2 = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}; a_3 = \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}.$$

Упражнения

Вычислить.

1) $(3 + 6i) + (-3 - 5i)$,

2) $(2 + 3i) + (5 - 3i)$,

3) $(-9 - 4i) + (-2 - 3i)$,

4) $(-3) + (2i)$,

5) $(1 + 6i) + (1 - 6i)$,

6) $(4 + i) + (-4 + i)$,

7) $(2x - 5yi) + (3y + 2xi) = 13 - i$,

8) $7(3x + 2yi) + (2y - i) = 19 + 3$.

9) $(2 + i) - (9 - i)$,

10) $(7 + 2i) - (7 + 3i)$,

11) $(3 + 5i) - (3 - 5i)$,

12) $(6i) - (6)$,

13) $(7 + 4i)^2$,

$$14) (5+i) \cdot (5-i),$$

$$15) (1+i)^3,$$

$$16) (6+4i) \cdot (-6+4i),$$

$$17) z \cdot (2+i) = 15,$$

$$18) (2+2i) \cdot z = 8i,$$

$$19) \frac{2+i}{2-i},$$

$$20) \frac{4i}{1+i},$$

$$21) \frac{5}{-4+3i},$$

$$22) \frac{3+2i}{i},$$

$$23) \text{ Доказать равенство } \frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}.$$

Найти числа обратные данным

$$24) z = 2+i,$$

$$25) z = 2-i$$

$$26) z = i,$$

$$27) z = 3-4i,$$

$$28) \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i},$$

$$29) \frac{9-2i}{2+9i},$$

$$30) \frac{1}{i},$$

$$31) \frac{2-5i}{4+i} - \frac{6-7i}{4-i},$$

$$32) \frac{1+i}{3-7i} + \frac{i}{1-i},$$

$$33) \frac{a-bi}{b+ai} - \frac{b-ai}{a+bi} i.$$

Вычислить:

$$34. i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}.$$

$$35. i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}.$$

$$36. \frac{1}{i^3}.$$

37. При каком действительном числе a число

$$3i^3 - 2ai^2 + (1-a)i + 5$$

будет: а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю.

38. Назвать комплексные числа, сопряженные данным. Изобразить данные и сопряженные к ним комплексные числа точками на плоскости:

а) $1+i$; б) $4-7i$; в) 3 ; г) $3i$; д) $-1-3i$.

39-44. Записать данные комплексные числа в тригонометрической форме, определив их модули и аргументы:

$$39. z = 2 + 2 3i .$$

$$40. z = 3 + i .$$

$$41. z = 1 - i .$$

$$42. z = -4.$$

$$43. z = 3i .$$

$$44. z = -2i .$$

45-48. Вычислить

$$45. 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot 5(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ);$$

$$46. 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \cdot 7(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ);$$

$$47. \frac{\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ};$$

$$48. \frac{2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)}.$$

Тест для самоконтроля

Тема: «Комплексные числа»

1. Сколько форм записи имеет комплексное число?
а. 1, б. 2, в. 3, г. 4
2. Что представляет собой число i ?
а. Число, квадратный корень из которого равен -1
б. Число, квадрат которого равен -1
в. Число, квадратный корень из которого равен 1
г. Число, квадрат которого равен 1
3. Как на координатной плоскости изображается комплексное число?
а. В виде отрезка
б. Точкой или радиус-вектором
в. Плоской геометрической фигуры
г. В виде круга
4. Вычислите сумму чисел $z_1 = 7 + 2i$ и $z_2 = 3 + 7i$
а. $10 + 9i$, б. $4 - 5i$, в. $10 - 5i$, г. $4 + 5i$
5. Кто ввёл название «мнимые числа»?
а. Декарт, б. Арган, в. Эйлер, г. Кардано
6. В какое множество входят числа 5 ; $3 - 6i$; 2.7 ; $2i$?
а. Действительные числа
б. Рациональные числа
в. Комплексные числа
г. Иррациональные числа
7. Произведение комплексных чисел $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = 3 + i$ равно ...
а. $-5 + 5i$, б. $-1 + 5i$, в. $1 + 5i$, г. $5 + 5i$
8. Тригонометрическая форма комплексного числа, имеющего модуль $\rho = 2$ и аргумент $\varphi = 30^\circ$, имеет вид

a. $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$, b. $2(\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ)$

c. $2(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)$, d. $2(\sin 30^\circ - i \cos 30^\circ)$

9. Число, сопряженное числу $6-i$ имеет вид

a. $6+i$, b. $-6-i$, c. $-6+i$, d. $-1+6i$

10. Комплексное число $z=1+i$ в тригонометрической форме имеет вид

a. $\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$, b. $\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$

c. $\sqrt{2}(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)$, d. $\sqrt{2}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

11. Корнем уравнения $y^2 + 2y + 10 = 0$ является число

a. $-1+3i$, b. $1+3i$

c. 2, d. 4

12. Комплексное число $2-i$ в тригонометрической форме имеет модуль равный

a. $\sqrt{5}$, b. 1, c. $\sqrt{3}$, d. 2

13. Сумма комплексных чисел $z_1 = -3+2i$ и $z_2 = 1-i$ равна

a. $-2+i$, b. $-4+i$, c. $-2-i$, d. $-2i$

14. Число, сопряженное числу $-3+4i$ имеет вид

a. $-3-4i$, b. $3+4i$, c. $3-4i$, d. $-3+i$

15. Комплексное число $\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме имеет модуль равный

a. $\sqrt{5}$, b. 1, c. $\sqrt{3}$, d. 2

ГЛАВА IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

14.1 Основные понятия и определения

Определение. Дифференциальным уравнением называется всякое уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции, то есть в общем виде его можно записать $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Пример.

Выражение $\cos(xy'') + \sin(y') = 0$, является дифференциальным уравнением, где $y = y(x)$.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок производной, входящей в уравнение.

В приведенном примере порядок дифференциального уравнения равен 2.

Определение. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если от нескольких – то уравнением в частных производных.

Мы будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение превращает его в верное равенство.

Пример.

Функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$, так как при подстановке этой функции в уравнение получим верно равенство. Докажем это утверждение. Найдем производную второго порядка от функции $y = \sin x$, получим

$$y' = (\sin x)' = \cos x, \text{ следовательно } y'' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Подставляя полученную производную и исходную функцию в дифференциальное уравнение, получим

$$-\sin x + \sin x = 0 \text{ или } 0 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Коши. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, то для всякой точки $M(x_0, y_0)$, принадлежащей области D , в некоторой её окрестности, существует единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию при $x = x_0, y = y_0$. Эти условия называются *начальными условиями*.

Задачей Коши называют задачу о нахождении решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0, y = y_0$.

Вышеприведённую теорему называют *теоремой о существовании и единственности решения задачи Коши*.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называют функцию $y = \varphi(x, C)$ такую, что:

1. При любом C она является решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

2. Каковы бы ни были начальные условия, всегда можно найти такое $C = C_0$, что $y = \phi(x, C_0)$ удовлетворяет начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$.

Определение. Частным решением называется решение, полученное из общего при конкретном значении C .

Общее решение, записанное в неявном виде, называется общим интегралом.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти его общее решение или общий интеграл.

Задача нахождения решения некоторого дифференциального уравнения называется задачей интегрирования данного дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение n -го порядка называется разрешенным относительно старшей производной, если оно имеет вид $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, где F – некоторая функция от $n+1$ переменных.

14.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \text{ или в виде } M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \quad (14.1)$$

Для решения такого уравнения его необходимо преобразовать к виду, в котором дифференциал и функция переменной x окажутся в одной части неравенства, а переменной y – в другой. Для этого необходимо определить перед dx и dy лишние сомножители, и разделить каждое слагаемое равенства на произведение лишних сомножителей, то есть

$$\frac{M(x)N(y)}{N(y)P(x)}dx + \frac{P(x)Q(y)}{N(y)P(x)}dy = 0.$$

Полученное уравнение будем называть уравнением с разделенными переменными, то есть уравнение вида

$$\frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\frac{M(x)}{P(x)}dx.$$

Затем проинтегрируем обе части полученного равенства, то есть

$$\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\int \frac{M(x)}{P(x)}dx.$$

Вычислим интегралы в левой и правой части равенства и получим общее решение или общий интеграл.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Представим производную y' в виде $\frac{dy}{dx}$ (из равенства $dy = y' \cdot dx$), получим $(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$. Умножим каждое слагаемое на dx , получим

$$(x^2 - 1)dy + 2xy^2dx = 0.$$

Последнее уравнение имеет вид (14.1), следовательно, оно является уравнением с разделяющимися переменными. Для его решения, разделим каждое слагаемое на выражение $(x^2 - 1) \cdot y^2$, так как $(x^2 - 1)$ - лишний сомножитель при dy , а y^2 - лишний сомножитель при dx . Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2 - 1}dx.$$

Интегрируем обе части последнего равенства

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x}{x^2 - 1}dx.$$

В результате получим: $\frac{1}{y} = \ln|x^2 - 1| + C$.

Таким образом, получаем общий интеграл: $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$.

Находим частное решение уравнения. Подставляем начальное условие $y(0) = 1$, получим

$$1 \cdot (\ln|0^2 - 1| + C) = 1 \Rightarrow \ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Отсюда получаем частный интеграл $y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1$.

Ответ. $y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1$ - частный интеграл.

14.3 Линейные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (14.2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - некоторые функции независимой переменной x .

Если функция $q(x)$ тождественно равна 0, то уравнение называется *однородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка*, в противном случае – *неоднородным*.

Пример.

1) $y' + (x + 1)y = 0$ – однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

2) $y' + 4xy = x^2$ – неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка применяют подстановку

$$y = u \cdot v \text{ и } y' = u'v + uv',$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Причем, функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v = v(x)$ выбираем произвольно. Получим,

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv = q(x).$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие переменную функцию u , и вынесем ее за скобки, получим

$$u'v + u \cdot (v' + p(x)v) = q(x). \quad (14.3)$$

Так как функция $v = v(x)$ - произвольная, то предположим, что

$$v' + p(x)v = 0.$$

Перепишем v' в виде $\frac{dv}{dx}$, тогда последнее уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \text{ или } dv = -p(x)v dx -$$

уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем обе части полученного уравнения.

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx; \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx;$$

$$\ln v = -\int p(x)dx;$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \quad (14.4)$$

Так как мы предположили, что $v' + p(x)v = 0$, то уравнение (14.3) примет вид

$$u'v = q(x). \quad (14.5)$$

Так как $v = e^{-\int p(x)dx}$, то уравнение (14.5) примет вид

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Так как $u' = \frac{du}{dx}$, получим д.у. с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}};$$

$$u = \int \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}} + C = \int q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C.$$

Таким образом, решение линейного уравнения первого порядка сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. В результате, получим общее решение уравнения в виде

$$y = uv = \left(\int q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C \right) \cdot \left(e^{-\int p(x)dx} \right).$$

Пример. Решить уравнение $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как содержит искомую функцию и ее производную в первой степени и не содержит их произведений. Применяем подстановку $y = uv$ и $y' = (uv)' = u'v + uv'$.

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - uv \frac{2x}{x^2+1} = x\sqrt{x^2+1}.$$

Группируем второе и третье слагаемые и выносим общий множитель (u) за скобку:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = x\sqrt{x^2+1}.$$

Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию v так, чтобы выражение, стоящее в скобках левой части последнего равенства, обращалось в нуль, то есть, чтобы имело место равенство:

$$1) v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0; \quad 2) vu' = x\sqrt{x^2+1}.$$

Решаем первое уравнение. Перепишем его в виде

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}v = 0.$$

После разделения переменных получим:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{x^2+1}, \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2xdx}{x^2+1}, \Rightarrow \ln|v| = \ln(x^2+1),$$

$$\text{или } v = x^2 + 1.$$

Решаем второе уравнение $vu' = x\sqrt{x^2+1}$. Подставим найденное значение v , получим:

$$(x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}.$$

Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, находим функцию u :

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$u = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Теперь можно записать общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = uv \text{ или } y = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1).$$

Ответ. $y = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1)$ - общее решение.

§15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

15.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (15.1)$$

где p и q - постоянные коэффициенты.

Чтобы найти общее решение уравнения (15.1) нужно знать два его частных решения y_1 и y_2 .

Будем искать решение уравнения (15.1) в форме $y = e^{kx}$, где k - это некоторое действительное число.

Так как $(e^{kx})'' + p(e^{kx})' + q(e^{kx}) = e^{kx} \cdot (k^2 + pk + q)$, то функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (5.6), если k есть корень уравнения

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (15.2)$$

Уравнение (15.2) называют характеристическим уравнением исходного уравнения (15.1). Для его составления производные y'' , y' , и функцию y заменим на k в степени, соответствующей порядку производной.

Решение уравнения (15.1) зависит от того, имеет ли соответствующее характеристическое уравнение (15.2) один корень, два корня или не имеет действительных корней.

Рассмотрим три случая:

1) Пусть характеристическое уравнение (15.2) имеет два действительных корня k_1 и k_2 , причем $k_1 \neq k_2$. Тогда общее решение уравнения (15.1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (15.3)$$

где C_1 и C_2 - некоторые числа.

2) Если характеристическое уравнение (15.2) имеет один корень k (два совпавших корня), то общее решение уравнения (15.1) имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} (C_1 + C_2 x), \quad (15.4)$$

где C_1 и C_2 - некоторые числа.

3) Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней (имеют мнимые корни), то общее решение уравнения (15.1) имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (15.5)$$

где $y_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексные корни характеристического уравнения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\text{а) } y'' - 7y' + 10y = 0; \quad \text{б) } y'' + 6y' + 9y = 0; \quad \text{в) } y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение.

$$\text{а) } y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 7k + 10 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 > 0;$$

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7+3}{2} = 5, \quad k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7-3}{2} = 2$$

Тогда, общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид (15.3):

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ - общее решение уравнения.

$$\text{б) } y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 9 = 0;$$

$$D = 36 - 4 \cdot 9 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3.$$

Тогда, общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид (15.4):

$$y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x).$$

Ответ. $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$ - общее решение.

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = -36 < 0 - \text{действительных корней нет.}$$

Воспользуемся комплексным числом i , и представим дискриминант равный $D = -36$ как $D = 36i^2$, где $i^2 = -1$ - это мнимая единица.

Найдем α и β :

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i, \quad \alpha = 2, \beta = 3.$$

Тогда, общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид (15.5):

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Ответ. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ - общее решение.

15.2 Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (15.6)$$

где p и q - постоянные действительные числа, $f(x)$ - известная непрерывная в интервале (a, b) функция.

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ($y_{o.n.}$) равно сумме общего решения соответствующего

однородного уравнения ($y_{o.o.}$) $y'' + py' + qy = 0$ и частного решения исходного неоднородного уравнения ($y_{ч.н.}$), то есть

$$y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}.$$

Вид частного решения уравнения зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть правая часть уравнения (15.6) имеет вид

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n . Тогда частное решение $y_{ч.н.}$ можно записать в виде

$$y_{ч.н.} = Q_n(x) \cdot x^m,$$

где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени n , а m - число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 - 4x + 2.$$

Решение.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y_{o.o.}$. Для этого решим уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни, получим

$$k^2 + 2k - 3 = 0;$$

$$k_1 = 1 \text{ и } k_2 = -3.$$

Подставляя полученные корни в формулу (15.3), получим

$$y_{o.o.} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Так как правая часть дифференциального уравнения имеет вид квадратного трехчлена и число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y_{ч.н.} = ax^2 + bx + c.$$

Тогда $y'_{ч.н.} = 2ax + b;$

$$y''_{ч.н.} = 2a.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение вместо y , y' и y'' , получим

$$2a + 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 - 4x + 2;$$

$$-3ax^2 + (4a - 3b)x + (2a + 2b - 3c) = x^2 - 4x + 2.$$

Так как в последнем выражении левая часть равна правой части, то соответствующие коэффициенты при x^2 , x и свободные коэффициенты должны совпадать, то есть должно выполняться условие

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 4a - 3b = -4 \\ 2a + 2b - 3c = 2. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем коэффициенты a , b и c :

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{8}{9} \\ c = -\frac{8}{27} \end{cases}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в частное решение $y_{ч.н.} = ax^2 + bx + c$, получим

$$y_{ч.н.} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка будет иметь вид

$$y_{o.n.} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}.$$

Ответ. $y_{o.n.} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}$ - общее решение неоднородного уравнения.

б) Пусть правая часть уравнения (15.6) имеет вид

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n . Тогда частное решение будем искать в виде:

$$y_{ч.н.} = Q_n(x) \cdot x^r \cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени n что и $P_n(x)$, а r - число корней характеристического уравнения, равных α .

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}.$$

Решение.

Для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 - 3k + 2 = 0;$$

$$k_1 = 1 \text{ и } k_2 = 2;$$

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}.$$

Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде

$$y_{ч.н.} = a e^{3x};$$

$$y'_{ч.н.} = 3a e^{3x};$$

$$y''_{ч.н.} = 9a e^{3x}.$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, получим

$$9ae^{3x} - 9ae^{3x} + 2ae^{3x} = 2e^{3x};$$

$$2ae^{3x} = 2e^{3x}; 2a = 2; a = 1.$$

Тогда $y_{ч.н.} = 1 \cdot e^{3x} = e^{3x}$.

Таким образом, общее решение неоднородного д.у. 2-го порядка будет иметь вид

$$y_{o.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}.$$

Ответ. $y_{o.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}$ - общее решение неоднородного уравнения.

Пример. Решить уравнение $y'' - y = 2e^x - x^2$.

Решение. Для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 - 1 = 0; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1.$$

Общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде суммы двух частных решений, так как правая часть есть сумма функций $f_1(x) = 2e^x$, $f_2(x) = x^2$. Тогда

$$y_{ч.н.} = Axe^x + Bx^2 + Cx + D;$$

$$y'_{ч.н.} = A(e^x + xe^x) + 2Bx + C;$$

$$y''_{ч.н.} = 2Ae^x + Axe^x + 2B.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$2Ae^x + Axe^x + 2B - Axe^x - Bx^2 - Cx - D = 2e^x - x^2.$$

Сгруппируем подобные слагаемые, вынесем общий множитель за скобки и приравнявая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях уравнения, получим

$$2Ae^x - Bx^2 - Cx + (2B - D) = 2e^x - x^2.$$

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ -B = -1 \\ -C = 0 \\ 2B - D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = 2. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y_{ч.н.} = xe^x + x^2 + 2$. Тогда общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y_{о.н.} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

Ответ. $y_{о.н.} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$ - общее решение неоднородного уравнения.

Примеры решения типовых задач

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение.

Данное уравнение является линейным, так как содержит искомую функцию и ее производную в первой степени и не содержит их произведений. Применяем подстановку $y = uv$.

Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - uvtgx = \frac{2x}{\cos x}.$$

Группируем второе и третье слагаемые и выносим u за скобку

$$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{2x}{\cos x}.$$

Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию v так, чтобы выражение, стоящее в скобках левой части

последнего равенства, обращалось в нуль, то есть, чтобы имело место равенство

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными относительно v и x . Решим его

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x; \quad \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx; \quad \ln v = -\ln \cos x;$$

$$v = \frac{1}{\cos x}.$$

Так как в уравнении $u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{2x}{\cos x}$ выражение в скобках равно нулю, то будет справедливо равенство $u'v = \frac{2x}{\cos x}$. Подставляя в него $v = \frac{1}{\cos x}$, получим

$$\frac{1}{\cos x} u' = \frac{2x}{\cos x}; \quad u' = 2x; \quad du = 2x dx.$$

$$\int du = \int 2x dx, \quad u = x^2 + C.$$

Тогда, общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \frac{1}{\cos x} (x^2 + C).$$

Определим значение произвольной постоянной C при указанных начальных условиях $y(0) = 2$, для этого подставим в общее решение вместо переменной x число 0, а вместо переменной y число 2. Получим

$$2 = \frac{1}{\cos 0} (0 + C); \quad C = 2.$$

Таким образом, $y = \frac{1}{\cos x} (x^2 + 2)$ есть частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию.

Ответ. $y = \frac{1}{\cos x} (x^2 + 2)$ - частное решение линейного уравнения.

Задача 2. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k + 2 = 0;$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0,$$

$$k_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ и } k_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Тогда, общее решение однородного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Найдем y' :

$$y' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x}.$$

Подставим начальные значения $y(0) = 3$ и $y'(0) = 4$ в выражения y и y' , получим систему двух уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2 .

$$\begin{cases} C_1 e^{-2 \cdot 0} + C_2 e^{-1 \cdot 0} = 3 \\ -2 \cdot C_1 e^{-2 \cdot 0} - C_2 e^{-1 \cdot 0} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C_1 - C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1 \\ -2C_1 - 3 + C_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_2 = 3 - C_1 \\ -3 - C_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 10 \\ C_1 = -7 \end{cases}.$$

Подставим найденные постоянные C_1 и C_2 в общее решение, и получим частное решение, которое имеет вид

$$y = -7e^{-2x} + 10 \cdot e^{-x}.$$

Ответ. $y = -7e^{-2x} + 10 \cdot e^{-x}$ – частное решение дифференциального уравнения.

Задача 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 4e^{3x}.$$

Решение.

Для нахождения общего решения однородного уравнения составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^2 + 3k + 2 = 0;$$

$$k_1 = -2 \text{ и } k_2 = -1;$$

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде

$$y_{ч.н.} = ae^{3x};$$

$$y' = 3ae^{3x};$$

$$y'' = 9ae^{3x}.$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, получим:

$$9ae^{3x} - 9ae^{3x} + 2ae^{3x} = 4e^{3x};$$

$$a = 2;$$

$$y_{ч.н.} = 2e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка будет иметь вид

$$y_{o.n.} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + 2e^{3x}.$$

Ответ. $y_{o.n.} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + 2e^{3x}$ - общее решение.

Упражнения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

1.1 $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y.$

1.2 $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0.$

1.3 $(x + 2xy)dx + (4 + x^2)dy = 0.$

1.4 $y(x^2 + 3)y' = x.$

$$1.5 \quad (xy^2 + 2x)dx + (x^2y - y)dy = 0.$$

$$1.6 \quad y^2 e^{-x} y' = 3.$$

$$1.7 \quad y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$$

$$1.8 \quad \sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0.$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения при заданном условии:

$$2.1 \quad y' \sin x = y \ln y, \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$2.2 \quad y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y|_{x=0} = 1.$$

3. Найти общее решение однородного уравнения:

$$3.1 \quad (y-x)dx + (y+x)dy = 0.$$

$$3.2 \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$$

$$3.3 \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$3.4 \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

$$3.5 \quad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3.6 \quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения при заданном условии:

$$4.1 \quad (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y|_{x=1} = 0.$$

$$4.2 \quad (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0,$$

$$y|_{x=0} = 1.$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

$$5.1 \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

$$5.2 \quad y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n.$$

$$5.3 \quad y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}.$$

$$5.4 \quad y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0.$$

$$5.5 \quad (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$$

$$5.6 \quad y' + y = \cos x.$$

6. Найти частное решение дифференциального уравнения при заданном условии:

$$6.1 \quad y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y|_{x=0} = 0.$$

$$6.2 \quad xy' + y - e^x = 0, \quad y|_{x=a} = b.$$

7. Найти общее решение уравнения Бернулли:

$$7.1 \quad y' + y = e^x y^2.$$

$$7.2 \quad y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}.$$

$$7.3 \quad 3y' - 2xy + xe^{-x^2} y^4 = 0.$$

$$7.4 \quad 2xy' = -3y - y^3 x^2.$$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$8.1 \quad (2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$$

$$8.2 \quad (10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$$

$$8.3 \quad (3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0.$$

$$8.4 \quad \left(y + \frac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{3}{y^2}\right)dy = 0.$$

$$8.5 \quad (2\cos(2x + 3y) - y\sin y)dx + (\cos x + 3\cos(2x + 3y))dy = 0.$$

$$8.6 \quad (e^x + y^2)dx + 2xydy = 0.$$

9. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$9.1 \quad y'' = e^{-x} + \cos 2x.$$

$$9.2 \quad y'' = (x + 1)^4.$$

$$9.3 \quad y'' = \ln x.$$

$$9.4 \quad y'' = \operatorname{arctg} x.$$

$$9.5 \quad xy'' = y'.$$

$$9.6 \quad y'' = y' + x.$$

$$9.7 \quad (1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

$$9.8 \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

$$9.9 \quad 1 + (y')^2 = 2yy''.$$

$$9.10 \quad (y')^2 + 2yy'' = 0.$$

$$9.11 \quad y'' + 2y(y')^3 = 0.$$

$$9.12 \quad y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$$

10. Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных условиях:

$$10.1 \quad y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

10.2 $2y'' = 3y^2$, $y|_{x=-2} = 1$, $y'|_{x=-2} = -1$.

11. Найти общее решение однородного уравнения:

11.1 $2y'' + 2y' = 0$. **11.2** $y'' + 2y' + y = 0$. **11.3** $y'' - 9y = 0$.

11.4 $y'' - 2y' - y = 0$. **11.5** $y'' - 2y' + y = 0$. **11.6** $y'' + 6y' + 13y = 0$.

11.7 $y'' + 9y = 0$. **11.8** $y'' + 2y' + 5y = 0$.

12. Найти частное решение уравнений:

12.1 $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y|_{x=0} = 6$, $y'|_{x=0} = 10$.

12.2 $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 15$.

12.3 $4y'' + 4y' + y = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$.

13. Записать общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения $2y'' + 5y' = f(x)$, не вычисляя коэффициенты, если:

1) $f(x) = x^2 + x + 1$; **2)** $f(x) = e^x$; **3)** $f(x) = 3\cos x$;

4) $f(x) = 10e^{-\frac{5}{2}x}$; **5)** $f(x) = \cos 5x$.

14. Записать общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, не вычисляя коэффициенты, если:

1) $f(x) = 1$; **2)** $f(x) = e^{-x}$; **3)** $f(x) = 3e^{2x}$;

4) $f(x) = x^2 + 2e^{2x} + \sin 2x$; **5)** $f(x) = xe^{2x}$.

15. Найти общее решение уравнений:

15.1 $2y'' - 7y' + 3y = 6x^2 - x + 5$. **15.2** $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

15.3 $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$. **15.4** $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

15.5 $y'' + y = -8\cos 3x$. **15.6** $5y'' - 6y' + 5y = 5e^{\frac{3}{5}x}$.

$$15.7 \quad y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x. \quad 15.8 \quad y'' + 4y = \cos 2x.$$

16. Найти частное решение уравнения:

$$16.1 \quad y'' - y' = 2 - 2x, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

$$16.2 \quad 4y'' + 16y' + 15y = 4e^{\frac{3}{2}x}, \quad y|_{x=0} = 3, \quad y'|_{x=0} = -5,5.$$

$$16.3 \quad y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 3,2.$$

$$16.4 \quad y'' + y = -\sin 2x, \quad y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1.$$

Ответы. 1.1 $\cos y = C \cos x$. 1.2 $2\sqrt{y} - \ln|y| = -2\sqrt{x} + C$. 1.3 $x^2 + 4 = \frac{C}{1+2y}$.

1.4 $y^2 = \ln(x^2 + 3) + C$. 1.5 $\frac{1}{x^2 - 1} = C(y^2 + 2)$. 1.6 $y^3 = 9e^x + C$. 1.7 $x\sqrt{1-y^2} +$

$+ y\sqrt{1-x^2} = C$. 1.8 $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$. 2.1 $y = 1$. 2.2 $y = \frac{1+x}{1-x}$. 3.1

$y^2 + 2xy - x^2 = C$. 3.2 $y - 2x = Cx^3(y+x)$. 3.3 $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln(C\sqrt{x^2 + y^2})$. 3.4

$y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$. 3.5 $x^2 = C^2 + 2Cy$. 3.6 $\ln|Cx| = -e^{\frac{y}{x}}$. 4.1 $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.

4.2 $y^3 = y^2 - x^2$. 5.1 $2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2$. 5.2 $y = x^n(e^x + C)$. 5.3 $yx^n = ax + C$.

5.4 $y = x^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$. 5.5 $y = (x+C)(1+x^2)$. 5.6 $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

6.1 $y = \frac{x}{\cos x}$. 6.2 $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$. 7.1 $y = \frac{e^{-x}}{C-x}$. 7.2 $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + C}}$.

7.3 $y^3 = \frac{2e^{x^2}}{C+x^2}$. 7.4 $y^2 = \frac{1}{Cx^3 + x^2}$. 8.1 $x^2 + xy + y^2 = C$. 8.2 $5x^2y - 8xy + x + 3y = C$.

8.3 $x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - y^3 = C$. 8.4 $xy - \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = C$. 8.5 $y \cos x + \sin(2x + 3y) = 0$. 8.6

$e^x + y^2x = C$. 9.1 $y = e^{-x} - \frac{\cos 2x}{4} + C_1x + C_2$. 9.2 $y = \frac{(x+1)^6}{30} + C_1x + C_2$. 9.3

$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1x + C_2$. 9.4 $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2 - 1) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + C_1x + C_2$. 9.5

$$y = C_1 x^2 + C_2. \quad \mathbf{9.6} \quad y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}. \quad \mathbf{9.7} \quad y = (1 + C_1^2) \ln|x + C_1| - C_1 x + C_2. \quad \mathbf{9.8}$$

$$y = (C_1 x - C_1^2) e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2. \quad \mathbf{9.9} \quad (x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1). \quad \mathbf{9.10} \quad y = C_1(x + C_2)^{\frac{2}{3}}. \quad \mathbf{9.11}$$

$$C_1 y - \frac{y^3}{3} = x + C_2. \quad \mathbf{9.12} \quad y = \frac{C_1 x + C_2 - 1}{C_1 x + C_2}. \quad \mathbf{10.1} \quad y = x^3 + 3x + 1. \quad \mathbf{10.2} \quad y = \frac{4}{(x + 4)^2}. \quad \mathbf{11.1}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}. \quad \mathbf{11.2} \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}. \quad \mathbf{11.3} \quad y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}. \quad \mathbf{11.4}$$

$$y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}. \quad \mathbf{11.5} \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x. \quad \mathbf{11.6} \quad y = e^{-3x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

$$\mathbf{11.7} \quad y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x. \quad \mathbf{11.8} \quad y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x). \quad \mathbf{12.1} \quad y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

$$\mathbf{12.2} \quad y = 3e^{-2x} \sin 5x. \quad \mathbf{12.3} \quad y = e^{-\frac{x}{2}} (2 + x). \quad \mathbf{13. 1)} \quad y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + Ax^3 + Bx^2 + Cx;$$

$$\mathbf{2)} \quad y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + Ae^x; \quad \mathbf{3)} \quad y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + A \cos x + B \sin x; \quad \mathbf{4)}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + A x e^{-\frac{5}{2}x}; \quad \mathbf{5)} \quad y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + A \cos 5x + B \sin 5x. \quad \mathbf{14.}$$

$$\mathbf{1)} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + A; \quad \mathbf{2)} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + A e^{-x}; \quad \mathbf{3)}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + A x^2 e^{2x}; \quad \mathbf{4)} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + A x^2 + Bx + C + D x^2 e^{2x} + F \sin 2x + E \cos 2x; \quad \mathbf{5)} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + (A x^3 + B x^2) e^{2x}.$$

$$\mathbf{15.1} \quad y = C_1 e^{0.5x} + C_2 e^{3x} + 2x^2 + 9x + 20. \quad \mathbf{15.2} \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + \frac{2}{9} x^2 + \frac{5}{27} x + \frac{11}{27}. \quad \mathbf{15.3}$$

$$y = e^x (2x^2 + x) + C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \quad \mathbf{15.4} \quad y = \frac{3}{2} x^2 e^{2x} + e^{2x} (C_1 + C_2 x). \quad \mathbf{15.5}$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos 3x. \quad \mathbf{15.6} \quad y = e^{\frac{3}{5}x} \left(C_1 \cos \frac{4}{5}x + C_2 \sin \frac{4}{5}x \right) + \frac{25}{16} e^{\frac{3}{5}x}.$$

$$\mathbf{15.7} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x. \quad \mathbf{15.8}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x. \quad \mathbf{16.1} \quad y = e^x + x^2. \quad \mathbf{16.2} \quad y = (1 + x) e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

$$\mathbf{16.3} \quad y = e^x (0.16 \cos 3x + 0.28 \sin 3x) + x^2 + 2.2x + 0.84. \quad \mathbf{16.4} \quad y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \cos x.$$

Тест для самоконтроля

Тема: «Дифференциальные уравнения»

1. Уравнение $x^2 + 3x^2y^2 + (2x^3y - y^2) \cdot y' = 0$ является ...

- a. уравнением в полных дифференциалах
- b. уравнением с разделяющимися переменными
- c. линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка
- d. однородным относительно x и y дифференциальным уравнением

первого порядка

2. Дифференциальное уравнение $\sqrt{x^2 + x^\alpha y^2} + (x^2y - 4y) \cdot y' = 0$

будет уравнением с разделяющимися переменными при значении α , равном ...

- a. 2
- b. 0
- c. 4
- d. 1

3. Дифференциальное уравнение $\sqrt{x^5y + x^2y^4} \cdot y' - (2x^2y^\alpha - x^\beta y) = 0$ будет однородным дифференциальным уравнением первого порядка при $\alpha + \beta$ равном ...

- a. 3
- b. 1
- c. 2
- d. 4

4. Общее решение дифференциального уравнения $y' \cos x + y \sin x = 1$ имеет вид ...

- a. $y = \sin x + C \cdot \cos x$
- b. $y = \cos x + C \cdot \sin x$
- c. $y = \frac{x + C}{\cos x}$
- d. $y = x \cdot \cos x + C \cdot x$

5. Уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;1)$ подкасательная которой в любой ее точке равна 4 имеет вид ...

- a. $y = e^{\frac{x-1}{4}}$
- b. $y = e^{4x-8}$
- c. $y^2 = 8x - 15$
- d. $y = 4x - 7$

6. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 3y' + 5y = 0$ имеет вид ...

$$\text{a. } y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + C_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x \right)$$

$$\text{b. } y = e^{2x} \left(C_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + C_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x \right)$$

$$\text{c. } y = e^{3x} (C_1 \cdot \cos 5x + C_2 \cdot \sin 5x)$$

$$\text{d. } y = e^{\frac{\sqrt{11}}{2}x} \left(C_1 \cdot \cos \frac{3}{2} x + C_2 \cdot \sin \frac{3}{2} x \right)$$

7. Общий вид частного решения $\bar{y}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 9y = \cos x - x \cdot \sin x$ будет выглядеть как ...

$$\text{a. } \bar{y} = (Ax + B) \cdot \cos x + (Cx + D) \cdot \sin x$$

$$\text{b. } \bar{y} = A \cdot \cos x + (Bx + C) \cdot \sin x$$

$$\text{c. } \bar{y} = A \cdot \cos x + Bx \cdot \sin x$$

$$\text{d. } \bar{y} = x \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x)$$

8. Функция $y = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2 x$ является решением дифференциального уравнения второго порядка ...

$$\text{a. } y'' = \cos 2x$$

$$\text{b. } y'' - y' + 2y = 1$$

$$\text{c. } y'' - y' - y = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\text{d. } y'' - \frac{(y')^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \cos 2x$$

9. Уравнение $2x + 3y - (2x - y) \cdot y' = 0$ является ...

а. однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка

б. линейным дифференциальным уравнением первого порядка

с. дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

д. уравнением Бернулли

10. Если угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке вдвое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания, то уравнение этой кривой будет иметь вид ...

a. $y = Cx^2, C \neq 0$

b. $y = 2Cx, C \neq 0$

c. $y = 2x + C$

d. $y = C\sqrt{x}, C \neq 0$

11. Общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x}$ имеет вид ...

a. $\frac{y^2}{x^2} - \ln|x| = C$

b. $y - Cx^3 = 0$

c. $x^3 - y + Cx^2 = 0$

d. $y^2 - \ln|x| = C$

12. Общее решение дифференциального уравнения $y' + y = e^{-x}$ имеет вид ...

a. $y = e^{-x} \cdot (x + C)$

b. $y = e^x \cdot (x + C)$

c. $y = e^{-x} \cdot x + C$

d. $y = e^{-x} \cdot (C - x)$

13. Уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;1)$ подкасательная которой в любой ее точке равна 4 имеет вид ...

a. $y = e^{\frac{x-1}{4}}$

b. $y = e^{4x-8}$

c. $y^2 = 8x - 15$

d. $y = 4x - 7$

14. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 3y' + 5y = 0$ имеет вид ...

a. $y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x \right)$

b. $y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x \right)$

c. $y = e^{3x} (C_1 \cdot \cos 5x + C_2 \cdot \sin 5x)$

d. $y = e^{\frac{\sqrt{11}}{2}x} \left(C_1 \cdot \cos \frac{3}{2}x + C_2 \cdot \sin \frac{3}{2}x \right)$

15. Частное решение $\bar{y}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4y = 8x^2$ имеет вид ...

a. $\bar{y} = 2x^2 - 1$

b. $\bar{y} = 2x^2$

c. $\bar{y} = x^2$

d. $\bar{y} = x^2 + 2x - 1$

16. Общее решение дифференциального уравнения $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ имеет вид ...

a. $y = \arcsin^2 x + C_1 \cdot \arcsin x + C_2$

b. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (2 \arcsin x + C_1)$

c. $y = \arcsin x + C_1 \cdot x + C_2$

d. $y = 2\sqrt{1-x^2} + C$

РАЗДЕЛ X. РЯДЫ

§16. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

16.1 Основные понятия

Определение. Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, соединенных знаком сложения, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (16.1)$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются членами ряда, a_n - общим членом ряда.

Ряд (16.1) считается заданным, если известен его общий член a_n .

Пример.

1) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$,

2) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$,

3) $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$

Ряд можно задать с помощью общего члена, например, $a_n = \frac{1}{2n-1}$, определяет следующий ряд: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

Определение. Частичной суммой S_n числового ряда называется сумма его первых n членов,

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Определение. Суммой числового ряда S называется предел последовательности его частичных сумм, если этот предел существует

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

причем ряд называется сходящимся, в противном случае, если же $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд называется расходящимся.

Пример. Исследовать на сходимость ряды

а) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$

Решение.

а) Рассмотрим ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$. Найдем его частичные суммы $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$. Последовательность его частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ не имеет предела, следовательно, ряд расходится.

б) Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$$

найдем его частичные суммы:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}, \dots$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, то рассматриваемый ряд сходится, и

его сумма равна 1.

Свойства сходящихся числовых рядов

1. Если ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ сходится и имеет сумму S , то и ряд,

полученный путем умножения данного ряда на число λ , то есть ряд $\lambda \cdot a_1 + \lambda \cdot a_2 + \dots + \lambda \cdot a_n + \dots$, также сходится и его сумма равна $\lambda \cdot S$.

2. Если ряды $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ и $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$ сходятся и имеют соответственно суммы S_1 и S_2 , то и ряд $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$ также сходится, и его сумма равна $S_1 + S_2$.

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов. То есть, если к ряду (16.1) приписать еще несколько членов, то получим ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+m} + \dots$$

При этом сумма $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+m} + \dots$ называется остатком ряда (16.1). Если сумму остатка ряда обозначить через r_n , то получим сумму ряда (16.1) в виде

$$S = S_n + r_n.$$

4. Для того чтобы ряд (16.1) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$ остаток ряда стремился к нулю, то есть чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

6.2 Ряды с положительными членами.

Признаки сходимости числовых рядов

Определение. Положительным рядом называется ряд, члены которого не отрицательны.

Рассмотрим признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости).

Если ряд сходится, то предел его общего члена a_n при $n \rightarrow \infty$ равен нулю, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Следствие. Если предел общего члена ряда (16.1) при $n \rightarrow \infty$ не равен нулю, то ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n+1}.$$

Решение.

Найдем предел общего члена ряда при $n \rightarrow \infty$. Получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Так как предел общего члена ряда не равен нулю, то данный ряд расходится.

Замечание. Рассмотренная теорема выражает лишь необходимый, но не достаточный признак сходимости ряда, то есть если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то из этого еще не следует, что ряд сходится, можно лишь утверждать, что ряд может сходиться, но может и расходиться.

Примером такого ряда служит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, который называется гармоническим. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Теорема 2 (признак сравнения). Пусть даны два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда говорят, что из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами, а из расходимости ряда с меньшими членами

следует расходимость ряда с большими членами. То есть, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится.

«Эталонные» ряды, часто используемые для сравнения

1) Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$.

Если ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, то есть знаменатель прогрессии $|q| < 1$, то ряд сходится и сумма его равна $S = \frac{b_1}{1-q}$, если $|q| \geq 1$, то ряд расходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ Ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Так как $\frac{1}{2} < 1$, то данный ряд сходится.

2) Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

3) Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ - сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

Решение.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, про который известно, что он расходится.

Так как $1 = 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, то по теореме 2, из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с

большими членами, делаем вывод, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ расходится.

Теорема 3 (предельный признак сравнения). Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, то ряды будут вести себя одинаково, то есть либо сходиться, либо расходиться.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{n^3}$.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$a_n = \frac{2n^2 + 5}{n^3}; \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{Тогда} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + 5}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 5n}{n^3} = 2 \neq 0, \quad \text{следовательно, ряды}$$

ведут себя одинаково, то есть данный по условию ряд расходится.

Теорема 4 (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел отношения последующего члена ряда a_{n+1} к предыдущему a_n , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D.$$

Тогда, если $D < 1$, то ряд сходится, если $D > 1$, то ряд расходится, если $D = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым, необходимо использование иных признаков сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{n}{2^n}$, следовательно следующий за ним $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким образом, ряд сходится.

Теорема 5 (радикальный признак Коши). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ ряд расходится, при $\rho = 1$ ответ остается открытым.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$.

Решение. Общий член ряда имеет вид $u_n = \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Теорема 6 (интегральный признак Коши). Если $f(x)$ при $x \geq 1$ является непрерывной, положительной и монотонно убывающей функцией, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$ сходится или расходится, в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Пример. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Решение. Члены ряда составляют монотонно убывающую последовательность $1 > \frac{1}{2^p} > \frac{1}{3^p} > \dots > \frac{1}{n^p} > \dots$. Следовательно, функцией $f(x)$ будет $\frac{1}{x^p}$, то есть $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

$$\text{Тогда } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} 0, p > 1; \\ \infty, p < 1. \end{cases}$$

Если $p=1$, то имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

16.3 Сходимость знакочередующихся рядов

Определение. Знакопередающимся рядом называется ряд, в котором члены попеременно принимают то положительные, то отрицательные значения, то есть ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^n \cdot a_n + \dots \quad (a_n > 0). \quad (16.2)$$

Для исследования на сходимость знакочередующихся рядов используют **признак Лейбница**, для применения которого проверяют два условия:

1) члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, то есть $|a_1| > |a_2|$, $|a_2| > |a_3|$, $|a_3| > |a_4|, \dots$, $|a_{n-1}| > |a_n|$;

2) предел общего члена ряда при $n \rightarrow \infty$ равен 0, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Если оба условия выполняются, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена, то есть $S \leq a_1$. Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то ряд расходится.

Знакопередающийся ряд (16.2) называется абсолютно сходящимся, если сходится сам ряд и сходится ряд, составленный из модулей a_n , то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (16.3)$$

Если ряд (16.2) сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то знакочередующийся ряд (16.2) называется условно сходящимся.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots - \frac{1}{n^2} + \dots$.

Решение. Проверим два условия признака Лейбница.

1) $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \dots > \frac{1}{n^2} > \dots$, то есть члены ряда по модулю убывают.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Так как выполнены оба условия признака Лейбница, то ряд сходится.

Составим ряд из модулей исходного ряда $|1| + \left| \frac{1}{2^2} \right| + \left| \frac{1}{3^2} \right| + \left| \frac{1}{4^2} \right| + \dots + \left| \frac{1}{n^2} \right| + \dots$

Исследуем полученный ряд с общим членом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится как обобщенный гармонический.

Так как сходится сам знакочередующийся ряд и сходится ряд, составленный из модулей исходного ряда, то данный ряд сходится абсолютно.

§17. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

17.1 Область сходимости степенного ряда

Определение. Функциональным рядом называется ряд вида

$$\sum f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots, \quad (17.1)$$

члены которого $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$, являются функциями от x .

Придавая x числовое значение x_0 , мы получаем числовой ряд

$$\sum f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \dots + f_4(x_0) + \dots, \quad (17.2)$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение. Множество тех значений x , при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.

Ясно, что в области сходимости сумма функционального ряда является некоторой функцией от x . Обозначим ее через $S(x)$.

Функциональный ряд (17.1) сходится в точке x_0 , если сходится числовой ряд (17.2).

Функциональный ряд сходится на интервале, если он сходится в каждой точке этого интервала.

Специальный класс функциональных рядов составляют так называемые степенные ряды.

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (17.3)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - последовательность действительных чисел, называемых коэффициентами ряда.

При $x_0 = 0$ степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (17.4)$$

Степенной ряд (17.4) всегда сходится по крайней мере в точке $x = 0$, а ряд (17.3) – в точке $x = x_0$. Ряд (17.4) называется рядом по степеням x , а ряд (17.3) – по степеням $x - x_0$. Ряд (17.3) принимает вид ряда (17.4) при соответствующей замене переменных $y = x - x_0$.

Выясним, какой вид имеет «область сходимости» степенного ряда, то есть множество $\{x\}$ тех значений переменной, для которых ряд сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$, то есть при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Любой степенной ряд сходится при значении $x = 0$. Есть степенные ряды, которые сходятся только при $x = 0$ и расходятся при остальных значениях x .

Область сходимости может состоять из всех точек оси Ox , другими словами, ряд может сходиться при всех x .

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение.

Ряд $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, представляет геометрическую прогрессию со знаменателем x , сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

Из теоремы Абеля и ее следствия получаем, что все точки сходимости расположены от начала координат не дальше, чем любая из точек расходимости. Совершенно ясно, что точки сходимости будут целиком заполнять некоторый интервал с центром в начале координат.

Таким образом, можно сказать, что для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R , что для всех x , по модулю меньших R ($|x| < R$), ряд абсолютно сходится, а для всех x , по модулю больших R ($|x| > R$), ряд расходится.

Что касается значений $x = R$, $x = -R$ здесь могут быть различные случаи: ряд может сходиться в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной. При этом ряд может сходиться как абсолютно, так и условно.

Определение. Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется такое число R , что при $|x| < R$, степенной ряд сходится, а для всех $|x| > R$, расходится. Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости.

Если степенной ряд (17.4) сходится только при $x=0$, то $R=0$, если он сходящийся на всей числовой оси, то $R=\infty$.

Если все коэффициенты степенного ряда, начиная с некоторого, отличны от нуля, то его радиус сходимости равен пределу при $n \rightarrow \infty$ отношения абсолютных величин коэффициентов общего и следующего за ним членов ряда. Таким образом, радиус сходимости можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (17.5)$$

Интервал сходимости для ряда (17.4) будет иметь вид $(-R, R)$, а для ряда (17.3) - $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Пример. Найти радиус и интервал сходимости рядов. Исследовать ряд на сходимость на концах интервала.

а) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$; б) $1 + \frac{x}{10} + \frac{2!x^2}{10^2} + \dots + \frac{n!x^n}{10^n} + \dots$;

в) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$.

Решение.

а) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Найдем радиус сходимости по формуле (17.5), учитывая, что $a_n = \frac{1}{n!}$

и $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. Получим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Ответ. $R = \infty$, следовательно ряд сходится на всей числовой оси..

$$\text{б) } 1 + \frac{x}{10} + \frac{2!x^2}{10^2} + \dots + \frac{n!x^n}{10^n} + \dots$$

Найдем радиус сходимости по формуле (17.5), учитывая, что $a_n = \frac{n!}{10^n}$

и $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$. Получим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{10^n} : \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 10^{n+1}}{10^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = \frac{10}{\infty} = 0.$$

Таким образом, ряд сходится только при $x=0$ и расходится при остальных значениях x .

Ответ. $R = 0$, ряд сходится только в одной точке $x=0$.

$$\text{в) } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Здесь $|a_n| = \frac{1}{n}$, $|a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$. Тогда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Тогда интервал сходимости будет иметь вид $(-1;1)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем знакочередующийся ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$

Исследуем его на сходимость по признаку Лейбница. Проверим два условия:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$, то есть члены ряда по модулю убывают.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Так как оба условия выполняются, то ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ сходится.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$, который расходится как произведение расходящегося гармонического ряда на -1 . Следовательно, областью сходимости служит полуинтервал $(-1; 1]$.

Ответ. $R = 1$ - радиус сходимости; $(-1; 1]$ - область сходимости.

17.2 Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция $f(x)$ бесконечно дифференцируемая в интервале $(-R; R)$ разлагается в ряд Маклорена, который имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Интервал $(-R; R)$ – интервал сходимости ряда Маклорена.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, |x| < +\infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, |x| < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, |x| < +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots, -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2 \cdot 1}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, -1 < x < 1,$$

где α - любое вещественное число.

17.3 Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

На практике приходится прибегать к приближенным вычислениям функций, определенных интегралов при решении дифференциальных уравнений. В этих случаях функцию разлагают в степенной ряд Маклорена, а ряд заменяют суммой конечного числа членов с требуемой точностью. Точность оценивается с помощью первого отброшенного члена.

С помощью рядов составлены таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы, применяемые в теории вероятностей и математической статистике.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, с точностью 0,1.

Решение.

Разложим функцию e^{-x^2} в ряд Маклорена по формуле

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

заменив в левой и правой части равенства x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots = 1 - 0,33 + 0,1 - 0,024 + \dots$$

Так как четвёртый член ряда меньше заданной точности $a_4 = 0,024 < 0,1$, то данный интеграл равен

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - 0,33 + 0,1 = 0,77.$$

Ответ. $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,77.$

Упражнения

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum \frac{3^n}{n!} = 3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{2^n} \right)^n;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$

г) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$

Решение.

а) Применим признак Даламбера, вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему. Получим

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n!}{(n+1)! 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Число $D = 0 < 1$, следовательно, ряд сходится.

Ответ. Данный ряд сходится.

б) Применим радикальный признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(2 + \frac{1}{2^n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{2^n} \right) = 2,$$

Так как предел больше 1, то ряд расходится.

Ответ. Данный ряд расходится.

в) Данный ряд сходится как обобщенный гармонический, так как степень n больше 1.

Исследуем этот же ряд на сходимость используя интегральный признак Коши. Имеем $a_n = \frac{1}{n^2}$, следовательно, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция при $x \geq 1$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1.$$

Так как несобственный интеграл равен 1, то он сходится, поэтому сходится и данный ряд.

г) Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$

Так как данный ряд является знакочередующимся, будем исследовать его на сходимость по признаку Лейбница. Проверим два условия:

1) $1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \geq \dots$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Так как выполнены оба условия признака Лейбница, то ряд сходится.

Составим ряд из модулей $|1| + \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| + \dots + \left|\frac{1}{n}\right| + \dots$

Исследуем полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Данный ряд является гармоническим рядом, который всегда расходится.

Таким образом, данный ряд сходится условно.

2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2^n \sqrt{n}}$.

Решение.

Данный степенной ряд перепишем в виде

$$\frac{3x}{2\sqrt{1}} + \frac{3^2 x^2}{2^2 \sqrt{2}} + \frac{3^3 x^3}{2^3 \sqrt{3}} + \dots + \frac{3^n x^n}{2^n \sqrt{n}} + \frac{3^{n+1} x^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{n+1}} + \dots$$

Запишем формулу n -го члена ряда и следующего за ним $(n+1)$ – го члена ряда

$$a_n = \frac{3^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}}.$$

Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{2\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} \right| = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, радиус сходимости $R = \frac{2}{3}$, и ряд сходится на интервале

$$|x| < \frac{2}{3}, \text{ или } x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Выясним вопрос о сходимости ряда на концах интервала.

При $x = -\frac{2}{3}$ исходный ряд примет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$$

Этот ряд является знакочередующимся. Заметим, что члены данного ряда по абсолютной величине убывают и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Следовательно, по признаку Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов заключаем, что последний ряд сходится. Следовательно, значение $x = -\frac{2}{3}$ принадлежит области сходимости данного ряда.

При $x = \frac{2}{3}$, исходный ряд примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Данный ряд расходится как обобщенно гармонический. Следовательно, значение $x = \frac{2}{3}$ не принадлежит области сходимости данного ряда.

Таким образом, $x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ — область сходимости исследуемого ряда.

3. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда.

Заменив x в разложении функции $\sin x$ на $\sqrt[3]{x}$ имеем:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\sin \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} - \frac{(\sqrt[3]{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt[3]{x})^5}{5!} - \frac{(\sqrt[3]{x})^7}{7!} + \dots$$

Тогда

$$\frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x} = x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3!} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!} + \dots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x} dx = \int_0^1 \left(x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3!} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!} + \dots \right) dx = \left[3x^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{3!} + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5! \cdot 5} - \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7! \cdot 7} + \dots \right]_0^1 =$$

$$= 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} - \frac{1}{11760} + \dots$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условию теоремы Лейбница. Так как четвертый его член по абсолютной величине меньше 0,001, то для обеспечения заданной точности достаточно взять первые три члена. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x} dx \approx 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} \approx 2,834.$$

4. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2.$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}.$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$$

$$д) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}.$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^7 + n}}.$$

$$ж) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right)$$

$$з) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3 + 5}}.$$

Решение.

а) В данном случае $a_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2$.

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{100n^2 + 1} \right)^2 = \left(\frac{1}{100} \right)^2 \neq 0$.

Следовательно, ряд расходится.

б) Поскольку в записи общего члена ряда есть показательная функция 3^n , то используем признак Даламбера.

Для рассматриваемого ряда

$$a_n = \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot (n+1)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} \cdot \frac{n^2 - 4n + 5}{3^n \cdot ((n+1)+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1) + 5}{n^2 - 4n + 5} \cdot \frac{3^n \cdot (n-1)}{3^{n+1} \cdot ((n+1)+1)} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

в) Так как в записи общего члена ряда есть факториал $(n!)$, то используем признак Даламбера. Для исследуемого ряда

$$a_n = \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1} \cdot (2(n+1)+3)} : \frac{n!}{5^n \cdot (2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{2n+3}{(2(n+1)+3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n! \cdot 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{5} = \infty. \end{aligned}$$

В пределе получили бесконечность, следовательно, исследуемый ряд расходится.

г) Воспользуемся радикальным признаком Коши. Здесь

$$a_n = \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n.$$

Вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15n^2 + 6n + 4}{3n + 2 + 12n^2} \right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} > 1.$$

Полученное значение больше 1, следовательно, ряд расходится.

д) Исследуем данный ряд с помощью интегрального признака Коши.

Составим соответствующий интеграл и вычислим его

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = 2 \Rightarrow t = \ln 2 \\ x = b \Rightarrow t = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \Big|_{\ln 2}^{\ln b} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Интеграл сходится, следовательно, исследуемый ряд сходится.

е) Составим ряд, эквивалентный исходному, оставив в числителе и знаменателе лишь старшие степени n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{7/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/3-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}.$$

Полученный ряд эквивалентен исходному, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} : \frac{1}{n^{11/6}} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty$$

Таким образом, исходный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}}$ сходятся и расходятся

одновременно. Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/6}} \left(\frac{11}{6} > 1 \right)$ сходится, следовательно, исходный ряд также сходится.

ж) Так как $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{4/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ расходится $\left(\frac{5}{6} < 1 \right)$, следовательно, исходный ряд также расходится.

з) Оценим общий член ряда:

$$0 < \sin^2 n < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}+5} < \frac{1}{\sqrt{n^3}+5}.$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится $\left(\frac{3}{2} > 1 \right)$, следовательно, эквивалентный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}+5}$

также сходится. Т.к. из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, то исходный ряд сходится.

5. Исследовать на сходимость данные ряды

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n}$;
11. $\frac{2!}{10} + \frac{3!}{10^2} + \frac{4!}{10^3} + \dots$
12. $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{54} + \dots$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3}$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+2}$;
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n \cdot 4^n}$;
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

6. Исследовать на сходимость следующие ряды и установить характер сходимости (абсолютная, условная).

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$;
2. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \dots$;
3. $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$;
5. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 4} + \frac{1}{3 \ln 6} - \frac{1}{4 \ln 8} + \dots$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{n+2}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n}{3n+4}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3^n}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^{10}}{e^n}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2 + 1}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{(n+1)^3 + n}$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Тест для самоконтроля

Тема: «Ряды»

1. Выберите сходящийся ряд

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

2. Выберите абсолютно сходящийся ряд

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

3. Выберите условно сходящийся ряд

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

4. Сходящимся является числовой ряд ...

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n^3+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n-1}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+11}{5n-1}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{5n^2-1}$

5. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(6n-1)2^n}} x^n$ равен ...

a. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

b. $\frac{2}{9}$

c. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

d. $\frac{2}{3}$

6. Если $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ то коэффициент a_3 разложения данной функции в ряд

Маклорена равен ...

a. -10

b. 10

c. 6

d. -6

7. Даны числовые ряды: А) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ В) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n+1}$ Тогда ...

- а. ряд А) сходится, ряд В) расходится
- б. ряд А) расходится, ряд В) расходится
- с. ряд А) сходится, ряд В) сходится
- д. ряд А) расходится, ряд В) сходится

8. Для степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^{2n}$ вычислен предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 9$. Тогда

интервал сходимости данного ряда имеет вид ...

- а. $(-1; 5)$
- б. $(-7; 11)$
- с. $(-9; 9)$
- д. $(-3; 3)$

9. Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ равна ...

- а. $\frac{3}{2}$
- б. $\frac{7}{12}$
- с. 5
- д. 1

10. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n$ равен ...

- а. e
- б. $\frac{1}{e}$
- с. 1
- д. 0

11. Даны числовые ряды: А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5n+1}$ и В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$. Тогда ...

- а. ряд А) расходится, ряд В) сходится
- б. ряд А) расходится, ряд В) расходится
- с. ряд А) сходится, ряд В) сходится
- д. ряд А) сходится, ряд В) расходится

12. Радиус сходимости равен 2,5 для степенного ряда ...

- а. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(4n-1) \cdot 5^n} x^n$
- б. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(4n-1) \cdot 5^n} \cdot x^{2n}$
- с. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(4n-1) \cdot 2^n} x^n$
- д. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(4n-1) \cdot 2^n} x^{2n}$

13. Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n$ равна ...

- a. $-\frac{2}{9}$ b. $-\frac{2}{5}$ c. $\frac{2}{9}$ d. $\frac{2}{5}$

14. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(6n-1)2^n}} x^n$ равен ...

- a. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b. $\frac{2}{9}$
c. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d. $\frac{2}{3}$

15. Даны числовые ряды: А) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ В) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n+1}$ Тогда ...

- a. ряд А) сходится, ряд В) расходится
b. ряд А) расходится, ряд В) расходится
c. ряд А) сходится, ряд В) сходится
d. ряд А) расходится, ряд В) сходится

16. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+3)^n$ равен 5. Тогда

интервал сходимости этого ряда имеет вид ...

- a. $(-8; 2)$ b. $(-2; 8)$
c. $(-5; 5)$ d. $[-8; 2]$

Задания для контрольных работ

Задачи № 1-10. Найти матрицу $D = 3C - AB$, где

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Задачи № 11-20. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу D и вычислить её определитель

$$11. D = (2A - 3B)C; \quad 12. D = \left(\frac{1}{2}B + A\right)2C;$$

$$13. D = \left(\frac{1}{3}A - 2B\right)3C; \quad 14. D = 3A(B - 2C);$$

$$15. D = 3A\left(2B + \frac{1}{3}C\right); \quad 16. D = 3B\left(\frac{1}{3}A - C\right);$$

$$17. D = B(2C - 3A); \quad 18. D = 2C\left(B + \frac{1}{2}A\right);$$

$$19. D = C + 2AB; \quad 20. D = \left(C \cdot \frac{1}{2} + 3B\right) \cdot 2A$$

Задачи № 21-40. Решить систему линейных уравнений тремя способами: а) методом Гаусса; б) методом обратной матрицы; в) по формулам Крамера.

$$21. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Задания 41-60. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$.

Требуется:

1) Записать векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;

2) Найти угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$;

3) Найти площадь грани ABC ;

4) Найти объем пирамиды $ABCD$.

41. $A(2; -3; 1); B(6; 1; -1); C(4; 8; -9); D(2; -1; 2)$.

42. $A(5; -1; -4); B(9; 3; -6); C(7; 10; -14); D(5; 1; -3)$.

43. $A(1; -4; 0); B(5; 0; -2); C(3; 7; -10); D(1; -2; 1)$.

44. $A(-3; -6; 2); B(1; -2; 0); C(-1; 5; -8); D(-3; -4; 3)$.

45. $A(-1; 1; -5); B(3; 5; -7); C(1; 12; -15); D(-1; 3; -4)$.

46. $A(-4; 2; -1); B(0; 6; -3); C(-2; 13; -11); D(-4; 4; 0)$.

47. $A(0; 4; 3); B(4; 8; 1); C(2; 15; -7); D(0; 6; 4)$.

48. $A(-2; 0; -2); B(2; 4; -4); C(0; 11; -12); D(-2; 2; -1)$.

49. $A(3;3;-3); B(7;7;-5); C(5;14;-13); D(3;5;-2)$.
50. $A(4;-2;5); B(8;2;3); C(6;9;-5); D(4;0;6)$.
51. $A(-5;0;1); B(-4;-2;3); C(6;2;11); D(3;4;9)$.
52. $A(1;-4;0); B(2;-6;2); C(12;-2;10); D(9;0;8)$.
53. $A(-1;-2;-8); B(0;-4;-6); C(10;0;2); D(7;2;0)$.
54. $A(0;2;-10); B(1;0;-8); C(11;4;0); D(8;6;-2)$.
55. $A(3;1;-2); B(4;-1;0); C(14;3;8); D(11;5;6)$.
56. $A(-8;3;-1); B(-7;1;1); C(3;5;9); D(0;7;7)$.
57. $A(2;-1;-4); B(3;-3;-2); C(13;1;6); D(10;3;4)$.
58. $A(-4;5;-5); B(-3;3;-3); C(7;7;5); D(4;9;3)$.
59. $A(-2;-3;2); B(-1;-5;4); C(9;-1;12); D(6;1;10)$.
60. $A(-3;4;-3); B(-2;2;-1); C(8;6;7); D(5;8;5)$.

Задания № 61-80. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}$. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе.

61. $\vec{x} = \{15; -20; -1\}$, $\vec{a} = \{0; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{0; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{5; -3; 2\}$.
62. $\vec{x} = \{2; 7; 5\}$, $\vec{a} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$, $\vec{c} = \{0; 3; 1\}$.
63. $\vec{x} = \{8; -7; -13\}$, $\vec{a} = \{0; 1; 5\}$, $\vec{b} = \{3; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 1\}$.
64. $\vec{x} = \{0; -8; 9\}$, $\vec{a} = \{0; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{4; 0; 1\}$.
65. $\vec{x} = \{-13; 2; 18\}$, $\vec{a} = \{1; 1; 4\}$, $\vec{b} = \{-3; 0; 2\}$, $\vec{c} = \{1; 2; -1\}$.
66. $\vec{x} = \{11; -1; 4\}$, $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; 2; 0\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 1\}$.
67. $\vec{x} = \{-1; 7; 0\}$, $\vec{a} = \{0; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{2; -1; 0\}$.
68. $\vec{x} = \{3; 1; 3\}$, $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{4; 2; 1\}$.
69. $\vec{x} = \{23; -14; -30\}$, $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 0\}$, $\vec{c} = \{-3; 2; 5\}$.
70. $\vec{x} = \{8; 9; 4\}$, $\vec{a} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{0; -2; 1\}$, $\vec{c} = \{1; 3; 0\}$.
71. $\vec{x} = \{-15; 5; 6\}$, $\vec{a} = \{0; 5; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 2; -1\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 0\}$.

$$72. \vec{x}=\{-5; 9; -13\}, \vec{a}=\{0; 1; -2\}, \vec{b}=\{3; -1; 1\}, \vec{c}=\{4; 1; 0\}.$$

$$73. \vec{x}=\{-9; -8; -3\}, \vec{a}=\{1; 4; 1\}, \vec{b}=\{-3; 2; 0\}, \vec{c}=\{1; -1; 2\}.$$

$$74. \vec{x}=\{8; 1; 12\}, \vec{a}=\{1; 2; -1\}, \vec{b}=\{3; 0; 2\}, \vec{c}=\{-1; 1; 1\}.$$

$$75. \vec{x}=\{3; 1; 8\}, \vec{a}=\{0; 1; 3\}, \vec{b}=\{1; 2; -1\}, \vec{c}=\{2; 0; -1\}.$$

$$76. \vec{x}=\{8; 0; 5\}, \vec{a}=\{2; 0; 1\}, \vec{b}=\{1; 1; 0\}, \vec{c}=\{4; 1; 2\}.$$

$$77. \vec{x}=\{11; 5; -3\}, \vec{a}=\{1; 0; 2\}, \vec{b}=\{-1; 0; 1\}, \vec{c}=\{2; 5; -3\}.$$

$$78. \vec{x}=\{2; -1; 11\}, \vec{a}=\{1; 1; 0\}, \vec{b}=\{0; 1; -2\}, \vec{c}=\{1; 0; 3\}.$$

$$79. \vec{x}=\{5; 15; 0\}, \vec{a}=\{1; 0; 5\}, \vec{b}=\{-1; 3; 2\}, \vec{c}=\{0; -1; 1\}.$$

$$80. \vec{x}=\{6; -1; 7\}, \vec{a}=\{1; -2; 0\}, \vec{b}=\{-1; 1; 3\}, \vec{c}=\{1; 0; 4\}.$$

Задания № 81-100. Даны вершины треугольника ABC . Найти: 1) длину стороны AB ; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) угол B в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD ; 6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB .

$$81. A(-5;0), B(7;9), C(5;-5);$$

$$82. A(-8; -3), B(4; -12), C(8;10);.$$

$$83. A(-12; -1), B(0; -10), C(4;12);$$

$$84. A(-10; 9), B(2; 0), C(6;22);$$

$$85. A(0; 2), B(12; -7), C(16;15);$$

$$86. A(-9; 6), B(3; -3), C(7;19);$$

$$87. A(1; 0), B(13; -9), C(17;13);$$

$$88. A(-4; 10), B(8; 1), C(12;23);$$

$$89. A(2; 5), B(14; -4), C(18;18);$$

$$90. A(-1; 4), B(11; -5), C(15;17);$$

$$91. A(-2; 7), B(10; -2), C(8;12);$$

$$92. A(-6; 8), B(6; -1), C(4;13);$$

$$93. A(3; 6), B(15; -3), C(13;11);$$

94. $A(-10; 5)$, $B(2; -4)$, $C(0; 10)$;
 95. $A(-4; -12)$, $B(8; 3)$, $C(6; 17)$;
 96. $A(4; 1)$, $B(16; -8)$, $C(14; 6)$;
 97. $A(-7; 4)$, $B(5; -5)$, $C(3; 9)$;
 98. $A(0; 3)$, $B(12; -6)$, $C(10; 8)$;
 99. $A(-5; 9)$, $B(7; 0)$, $C(5; 14)$;
 100. $A(-5; 7)$, $B(7; -2)$, $C(11; 20)$.

Задания № 101-120. Установить, какие линии определяются данными уравнениями. Изобразить эти линии на чертеже, охарактеризовав кривые.

101. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$
 102. $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$
 103. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$
 104. $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$
 105. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$
 106. $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$
 107. $2x^2 + 2y^2 + 12x + 4y - 30 = 0$
 108. $x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$
 109. $x^2 + 4y^2 - 4x - 2 = 0$
 110. $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$
 111. $16x^2 + y^2 + 32x - 8y - 48 = 0$
 112. $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$
 113. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$
 114. $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$
 115. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 16y + 22 = 0$

$$116. y^2 - 16x - 6y + 25 = 0$$

$$117. y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$$

$$118. x^2 + y^2 + 2x + 4y - 31 = 0$$

$$119. x^2 + y^2 + 4y = 0$$

$$120. x^2 + 4y^2 - 4x - 2 = 0.$$

Задания № 121-140. Найти указанные пределы.

$$121. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^2 + n + 4}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{4x}; \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5} \right)^{n-1}.$$

$$122. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{-x^2 - 4x + 5}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 4}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}; \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-4} \right)^{2-n}.$$

$$123. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 - 2n + 3}{n^2 + 4n + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{4x}; \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3}{4n-1} \right)^{2n-3}.$$

$$124. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 4}{n^3 - n + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tg 5x}; \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-1} \right)^{3-n}.$$

$$125. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 - 5x - 4}{x^2 - 2x - 8}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 4}{-4n^2 + n + 3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg^2 x}{\sin 2x}; \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-1}{5n+4} \right)^{2n+1}.$$

$$126. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 7n + 1}{3n^2 + n + 3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x^2 + x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sin x}{x^3}; \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n-4} \right)^{2n}.$$

127. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 - n + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 7}{2n - 3} \right)^{4n+1}$.
128. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 - x + 6}{3x^2 + 8x - 3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n + 1}{3n^2 + 4n + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{5}}{x - 3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 3}{2n + 5} \right)^{n-1}$.
129. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - 2n + 5}{n^2 + n + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{6 + 2x}}{x^2 - 5x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n - 2}{5n + 3} \right)^{-2n+3}$.
130. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{8 - x^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{2n^3 + 5n - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x - 2}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 2}{n + 3} \right)^{4-n}$.
131. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 2n^2 + n}{3n^2 + n^4 + 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1 + 4x} - 3}{x^2 - 4}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos 4x}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n + 4} \right)^{1-2n}$.
132. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 1}{3n^2 + n + 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x^2 - 9}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{6x}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4n - 3} \right)^{4n+1}$.
133. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 - 2n^3 + 1}{n^4 + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 6x + 8}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{5x^2}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2n + 5} \right)^{1-3n}$.
134. а) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 25}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 3n^2 + 9}{5n^5 + 2n^2 + 5}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{7 + 3x} - 2}{x + 1}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 4x$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{4n + 1} \right)^{2n-3}$.

$$\begin{array}{lll}
135. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{x^2 - 3x - 10}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + n + 3}{3n^4 + 12n + 4}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sqrt{x} - 1}; \\
\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{x}{x-1}}. & \\
136. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 27}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 6n + 1}{5n^2 + n + 4}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+4x} - 3}{x^2 - x - 2}; \\
\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3x}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{x}{x-2}}. & \\
137. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 1}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 3n^4 + 1}{3n + 2n^4 + 4}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x); \\
\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} x}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{x}{x-2}}. & \\
138. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 5n + 4}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x^2 - 25}; \\
\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\frac{2}{x-3}}. & \\
139. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{(x+2)^2}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 8n + 1}{n^2 + 2n + 4}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 3x}); \\
\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3)^{\frac{1}{x+1}}. & \\
140. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{4x^2 + x - 5}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n^2 + 1}{n^2 + 2n^3 + 4}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{4 - \sqrt{1-5x}}; \\
\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 5)^{\frac{3}{x+2}}. &
\end{array}$$

Задания №141-160. Задана функция $y = f(x)$. 1) Исследовать функцию на непрерывность на всей числовой оси. 2) Найти и классифицировать точки разрыва, если они существуют. 3) Построить график функции.

$$141. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, & x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

$$142. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3}, & x < -3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$

$$143. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x < 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

$$144. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-2|x|}{x}, & x < 0, \\ \sqrt{4-x^2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

$$145. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3|x|}{x}, & x < 0, \\ \sqrt{9-x^2}, & 0 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$

$$146. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+2}, & x < -2, \\ -\sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{|x-2|}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

$$147. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+3}, & x < -3, \\ -\sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 3, \\ \frac{|x-3|}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$

$$148. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+1}, & x < -1, \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{|x|}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$149. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+2}, & x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{2|x|}{x}, & x > 2. \end{cases}$$

$$150. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+3}, & x < -3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 0, \\ \frac{3|x|}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$151. \quad f(x) = \begin{cases} 2|x|, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$152. \quad f(x) = \begin{cases} |2x|, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$153. \quad f(x) = \begin{cases} -|x+1|, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$154. \quad f(x) = \begin{cases} -|x+1|, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x < 1, \\ -x+3, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$155. \quad f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x < -1, \\ (x+1)^2, & -1 \leq x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$156. \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$$

$$157. \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$158. \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$159. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ |x|, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$160. f(x) = \begin{cases} -|x+2|, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leq x < 1, \\ -x+3, & x \geq 1. \end{cases}$$

Задания № 161-180. Найти производные первого порядка, пользуясь формулами дифференцирования.

$$161. \quad \text{a) } y = 3x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x}; \quad \text{б) } y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}; \quad \text{в) } y = (x+1)^2 \cdot \cos 5x;$$

$$\text{г) } y = \arctg(e^{2x} + 3); \quad \text{д) } y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}; \quad \text{е) } y = x^{\arcsin x}.$$

$$162. \quad \text{a) } y = 4x^7 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x}; \quad \text{б) } y = x^2 \cdot \cos 7x; \quad \text{в) } y = \frac{x + e^{3x+2}}{1 + \cos 3x};$$

$$\text{г) } y = \frac{x^2}{(x+1)^2}; \quad \text{д) } y = (x+2) \cdot e^{-x^2}; \quad \text{е) } y = (\sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$163. \quad \text{a) } y = 7x - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3}; \quad \text{б) } y = \sin^4 x + \cos^4 x; \quad \text{в) } y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$\text{г) } y = 3x \cdot \arcsin(2x); \quad \text{д) } y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}; \quad \text{е) } y = (x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

$$164. \quad \text{a) } y = 9x^2 + \frac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x}; \quad \text{б) } y = \sqrt[3]{1+x^3}; \quad \text{в) } y = e^{\sin 5x} \cdot \ln x;$$

$$\text{г) } y = \ln(\sin(2x+5)); \quad \text{д) } y = x \cdot \arctg 3x; \quad \text{е) } y = x^{\arccos x}.$$

$$165. \quad \text{a) } y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} - \sqrt[5]{x}; \quad \text{б) } y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x}}; \quad \text{в) } y = (\ln x + 1)^2 \cdot \cos 2x;$$

$$\text{г) } y = \arcsin \sqrt{1-4x}; \quad \text{д) } y = 5^{\lg x} + 3^{\sin x}; \quad \text{е) } y = (x+1)^{2x}.$$

$$166. \quad \text{a) } y = 2x^7 - \frac{1}{7x^7} - \sqrt[7]{2x}; \quad \text{б) } y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}; \quad \text{в) } y = (3 - \sin^2 x)^3;$$

$$\text{г) } y = e^{\sqrt{2x}}; \quad \text{д) } y = \frac{1 + \cos 2x}{x^3} + \sin 3x; \quad \text{е) } y = (\sin x)^{\lg x}.$$

$$167. \quad \text{a) } y = 3x^7 - \frac{1}{x^7} - \sqrt[7]{3x}; \quad \text{б) } y = \sqrt{3-5x^2} + 4x \cdot \ln x; \quad \text{в) } y = \arcsin(3x^2 + 2);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sin^2 x}{2 + \cos^2 x}; \quad \text{д) } y = 3^{\sin^2 x}; \quad \text{е) } y = (\cos x)^{\sqrt{x}}.$$

$$168. \quad \text{a) } y = 4x^9 - \frac{4}{x^9} - \sqrt[9]{4x}; \quad \text{б) } y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x+3}}; \quad \text{в) } y = \arctg \frac{2x}{1-x^2};$$

169. $\Gamma) y = 0,2^{\operatorname{ctg}^2 x};$ $\Delta) y = x \cdot \arccos \sqrt{4-x^2};$ $\Theta) y = (\sin 2x)^{\cos x}.$
 $\alpha) y = 15x^3 - \frac{15}{x^3} + \sqrt[3]{x^2};$ $\text{б) } y = \sqrt{1+\ln^2 x};$ $\text{B) } y = \frac{\cos 3x+4}{\sin 3x-4};$
 $\Gamma) y = e^{\sin 4x+8};$ $\Delta) y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x+5} + 8x+7;$ $\Theta) y = (x+x^2)^x.$
 170. $\alpha) y = 5x^{10} + \frac{5}{x^{10}} + \sqrt[10]{5x};$ $\text{б) } y = \sqrt{1+\cos^2(x^2)};$ $\text{B) } y = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2};$
 $\Gamma) y = 5^{\sin(x^3)};$ $\Delta) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}};$ $\Theta) y = (x^3)^{\ln x}.$
 171. $\alpha) y = 3x^{11} + \frac{5}{x^{11}} + \sqrt[11]{x^3};$ $\text{б) } y = (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2;$ $\text{B) } y = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}};$
 $\Gamma) y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\sin x);$ $\Delta) y = 2 \cos(4x+x^2);$ $\Theta) y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$
 172. $\alpha) y = 12x^7 - \frac{12}{x^7} + \sqrt[7]{x^2};$ $\text{б) } y = x^2 \cdot \arccos\left(\frac{x}{2} - 4x\right);$ $\text{B) } y = \frac{x^5}{x^4+2};$
 $\Gamma) y = e^{\operatorname{ctg} 3x};$ $\Delta) y = \operatorname{arctg}^2 x + 6x^2;$ $\Theta) y = x^{\arcsin^2 x}.$
 173. $\alpha) y = 6x^7 + \frac{7}{x^6} + \sqrt[6]{x^5};$ $\text{б) } y = \sqrt[3]{2-x^2} \cdot \sqrt{x};$ $\text{B) } y = \frac{x^6}{6x^5-1};$
 $\Gamma) y = 2^{\operatorname{tg} 3x};$ $\Delta) y = \ln^3 \sin(3x+3);$ $\Theta) y = (\sqrt{x})^{\sin x}.$
 174. $\alpha) y = 12x^{14} + \frac{14}{x^2} - \sqrt[12]{x};$ $\text{б) } y = \sqrt[3]{x^2+3x};$ $\text{B) } y = \frac{x}{x^2+2};$
 $\Gamma) y = \ln(2x^3+3x^2);$ $\Delta) y = 5^{\frac{x}{x+1}};$ $\Theta) y = x^{\ln^2 x}.$
 175. $\alpha) y = x^{15} + \frac{15}{x^2} - \sqrt{x};$ $\text{б) } y = (5x+x^3) \cdot \ln(x^2);$ $\text{B) } y = \frac{x \cdot \cos x}{1-\sin x} + 2 \sin 4x + 4;$
 $\Gamma) y = 0,7^{\operatorname{arctg} x};$ $\Delta) y = \arccos \frac{1}{2x^2};$ $\Theta) y = x^{\sin \sqrt{x}}.$
 176. $\alpha) y = 2x^5 + \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x};$ $\text{б) } y = \sqrt[3]{\cos^2 x + x^2};$ $\text{B) } y = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}};$
 $\Gamma) y = 7^{\ln^2 x};$ $\Delta) y = x \cdot \arccos x - \sqrt{2-x^3};$ $\Theta) y = (\sin 2x)^x.$
 177. $\alpha) y = x^7 + \frac{7}{x^3} - \sqrt[7]{7x};$ $\text{б) } y = \frac{\sin x}{1+\ln(\sin x)};$ $\text{B) } y = (5+x^3)^2 \cdot e^{-x};$

	г) $y = 7\sqrt{\cos x}$;	д) $y = 2\sqrt{4x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2+5}}$;	е) $y = (\arcsin x)^{(x^2)}$.
178.	а) $y = x^5 + \frac{5}{x^3} - \sqrt[3]{5x}$;	б) $y = \frac{2\sin 5x}{1 - \cos 3x}$;	в) $y = \arcsin(\cos x^2) + x^2$;
	г) $y = 2^{\sin 3x}$;	д) $y = 2tg^3(x^3 + 2)$;	е) $y = (x+1)^{(x^2)}$.
179.	а) $y = 7x^2 + \frac{x^5}{5} - \sqrt[5]{x}$;	б) $y = \ln(ctg^3 x)$;	в) $y = \frac{x^7}{x^5 - 2}$;
	г) $y = \arctg(tg^2 x + 2)$;	д) $y = 2^{\frac{x}{1+x}} + 7^{\cos 2x}$;	е) $y = (\sin \sqrt{x})^x$.
180.	а) $y = x^7 - \frac{x^6}{6} + \sqrt[6]{x}$;	б) $y = \sqrt{x} - \arctg(\sqrt{x})$;	в) $y = 3x \cdot \sin^3 x - \cos^3 x$;
	д) $y = \ln^2(\sin 3x)$;	г) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$;	е) $y = (3x)^{e^x}$.

Задания №181-200. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

$$181. y = \frac{4x}{4+x^2}$$

$$188. y = \frac{4x^3+5}{x}$$

$$195. y = \frac{2-4x^2}{1+4x^2}$$

$$182. y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$189. y = \frac{x^4}{x^3-1}$$

$$196. y = \frac{4x}{4-x^2}$$

$$183. y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$190. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$$

$$197. y = \frac{8x}{(x-2)^2}$$

$$184. y = \frac{x^2-5}{x-3}$$

$$191. y = \frac{2x^2}{2x-1}$$

$$198. y = \frac{3x}{(x+2)^2}$$

$$185. y = \frac{4x^3}{x^3-1}$$

$$192. y = \frac{4x^3}{x^2+1}$$

$$199. y = \frac{5x}{(x-3)^2}$$

$$186. y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$193. y = \frac{4x^3-5}{x}$$

$$200. y = \frac{5x}{9-x^2}$$

$$187. y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$194. y = \frac{2x^2}{2x+1}$$

Задания 201-220. Найти указанные неопределенные интегралы:

$$201. \text{ а) } \int \frac{2 + \sqrt[5]{x} - 2x^2}{\sqrt{x}} dx; \text{ б) } \int e^{3x-8} dx; \text{ в) } \int \frac{\ln^2(5x+7)}{5x+7} dx; \text{ г) } \int \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$$

$$202. \text{ а) } \int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx; \text{ б) } \int x \sin^2 x dx; \text{ в) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \text{ г) } \int e^{x^5+5x} (x^4+1) dx.$$

$$203. \text{ а) } \int \frac{3\sqrt{x} + 7x^2 - 5}{2x^3} dx; \text{ б) } \int \sin(7x-5) dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}; \text{ г) } \int e^{\sin 4x} \cdot \cos 4x dx.$$

$$204. \text{ а) } \int \frac{2\sqrt{x} - x^3 + 3}{\sqrt[3]{x^5}} dx; \text{ б) } \int e^{7-3x} dx; \text{ в) } \int \frac{\sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \text{ г) } \int \frac{6x^5 - \sin x}{x^6 + \cos x} dx.$$

$$205. \text{ а) } \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^6 + 5}{x^6} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{\cos^2 5x}; \text{ в) } \int \sqrt{2-3\cos 5x} \cdot \sin 5x dx; \text{ г) } \int \frac{e^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} dx.$$

$$206. \text{ а) } \int \frac{2x^5 - \sqrt{x} + 4x}{\sqrt{x}} dx; \text{ б) } \int e^{11x+2} dx; \text{ в) } \int \frac{e^{3x}}{(1+e^{3x})^2} dx; \text{ г) } \int \cos(x^2+2) \cdot x dx.$$

$$207. \text{ а) } \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 3x^5}{x^3} dx; \text{ б) } \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx; \text{ в) } \int \frac{3x^2}{\sqrt{5-x^3}} dx; \text{ г) } \int \sqrt{\cos x} \sin x dx.$$

$$208. \text{ а) } \int \frac{5x^4 - 6\sqrt{x^5} + x}{\sqrt{x^3}} dx; \text{ б) } \int \sqrt{x} \ln 3x dx; \text{ в) } \int \frac{x dx}{\sin^2(5-6x^2)}; \text{ г) } \int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}.$$

$$209. \text{ а) } \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^3} + 4x}{x^5} dx; \text{ б) } \int e^{2-3x} dx; \text{ в) } \int \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx; \text{ г) } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx.$$

$$210. \text{ а) } \int \frac{3x^5 - \sqrt[5]{x} + 2x}{x^3} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{\sin^2 5x}; \text{ в) } \int (8x-2) \sin 5x dx; \text{ г) } \int \frac{\cos x dx}{3-\sin x}.$$

$$211. \text{ а) } \int \frac{2 + \sqrt[5]{x} - 2x^2}{\sqrt{x}} dx; \text{ б) } \int (x-3)e^{-2x} dx; \text{ в) } \int \frac{\ln^2(5x+7)}{5x+7} dx; \text{ г) } \int \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$$

$$212. \text{ а) } \int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx; \text{ б) } \int x \sin^2 x dx; \text{ в) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \text{ г) } \int \ln x dx.$$

$$213. \text{ а) } \int \frac{3\sqrt{x} + 7x^2 - 5}{2x^5} dx; \text{ б) } \int \ln x dx; \text{ в) } \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}; \text{ г) } \int e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx.$$

$$214. \text{ а) } \int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3x}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \text{ б) } \int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{dx}{2x}; \text{ в) } \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \text{ г) } \int \frac{4x^3 - \sin x}{x^4 + \cos x} dx.$$

$$215. \text{ а) } \int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5x}{x^2} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{x \ln x}; \text{ в) } \int \sqrt{2-3\cos 6x} \cdot \sin 6x dx; \text{ г) } \int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x} dx.$$

$$216. \text{ а) } \int \frac{6x^3 - \sqrt{x} + 8x^2}{\sqrt{x^3}} dx; \text{ б) } \int \frac{x}{2x^4 + 5} dx; \text{ в) } \int \frac{e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} dx; \text{ г) } \int \cos(x^3 + 2) \cdot x^2 dx.$$

$$217. \text{ а) } \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 8}{x^5} dx; \text{ б) } \int \frac{x}{2 + x^4} dx; \text{ в) } \int \frac{3x^2}{\sqrt{5 - x^3}} dx; \text{ г) } \int \sqrt[3]{4 - \sin 3x} \cdot \cos 3x dx.$$

$$218. \text{ а) } \int \frac{12x^3 - \sqrt{x^5} + x}{\sqrt{x}} dx; \text{ б) } \int \sqrt{4x - 3} dx; \text{ в) } \int \frac{xdx}{\sin^2(5 - 6x^2)}; \text{ г) } \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

$$219. \text{ а) } \int \frac{7x^3 + \sqrt{x} + 4x}{x^2} dx; \text{ б) } \int e^{-x^2} x dx; \text{ в) } \int \frac{\ln(x+3)}{x+3} dx; \text{ г) } \int \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx.$$

$$220. \text{ а) } \int \frac{5x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x^3} dx; \text{ б) } \int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{dx}{x}; \text{ в) } \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \text{ г) } \int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x}.$$

Задания №221-230. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными параболой.

$$221. y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1; y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6.$$

$$222. y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2; y = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 7.$$

$$223. y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2; y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4.$$

$$224. y = 2x^2 + 6x - 3; y = -x^2 + x + 5.$$

$$225. y = 3x^2 - 5x - 1; y = -x^2 + 2x + 1.$$

$$226. y = x^2 - 3x - 1; y = -x^2 - 2x + 5.$$

$$227. y = 2x^2 - 6x + 1; y = -x^2 + x - 1.$$

$$228. y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4; y = -\frac{2}{3}x^2 - x + 2.$$

$$229. y = x^2 - 5x - 3; y = -3x^2 + 2x - 1.$$

$$230. y = x^2 - 2x - 5; y = -x^2 - x + 1.$$

Задания № 231-240. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$231. y = x^3; y = \sqrt{x}.$$

$$232. y = x^2 + 2; y = 4 - x^2.$$

$$233. y = x^2 - 4x + 4; y = x.$$

$$234. y = -x^2 + 2x; y = -x$$

$$235. y = -x^2 + 1; y = x - 1.$$

$$236. y = 3x^2 + 1; y = 3x + 7.$$

$$237. y = \frac{x^2}{4}; y^2 = 4x.$$

$$238. y = \frac{x^2}{2}; y = 4 - x.$$

$$239. y = \frac{5}{x}; y = 6 - x.$$

$$240. y = -x^2 + 1; y = x - 1.$$

Задания № 241-260. Вычислить частные производные первого порядка, полный дифференциал.

$$241. z = \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + 3y^2}.$$

$$242. z = \operatorname{arctg} \frac{2x^2}{y^3}.$$

$$243. z = \arcsin \frac{xy}{y+1}.$$

$$244. z = e^{2x}(x^2 + y^2).$$

$$245. z = \ln(x^3 + 2xy - y^3 + x^2y).$$

$$246. z = \frac{2}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

$$247. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$248. z = xy \ln(x + 3y).$$

$$249. z = \sqrt{\ln xy} + xy.$$

$$250. z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

$$251. z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}.$$

$$252. z = \sqrt[3]{xy + y^2 + 5x^2}.$$

$$253. z = \sin(xy) \cos(xy).$$

$$254. z = \arcsin(xy) + 6y + 7x.$$

$$255. z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$256. z = \sin(x + 5y) - \cos(xy + 1).$$

$$257. z = \frac{2}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

$$258. z = \frac{xy}{x^2 + 5y^2}.$$

$$259. z = xy \ln(x - 4y).$$

$$260. z = xy \sin(x + 3y).$$

Задания 261-280. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел. Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной форме.

$$261. z_1 = 3 - 3i, z_2 = -1 - i.$$

$$262. z_1 = 3i, z_2 = -1 + i.$$

$$263. z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i, z_2 = -1 - i.$$

$$264. z_1 = -3 + 3i, z_2 = 2 - 2i.$$

$$265. z_1 = -2i, z_2 = -\sqrt{3} - i.$$

$$266. z_1 = -5 + 5i, z_2 = -2i.$$

$$267. z_1 = 6 + 6i, z_2 = -\sqrt{3} + i.$$

$$268. z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i, z_2 = 1 - i.$$

$$269. z_1 = -4 + 4i, z_2 = 2 + 2i.$$

$$270. z_1 = 2i, z_2 = 2 - 2i.$$

$$271. z_1 = 5i, z_2 = \sqrt{3} - i.$$

$$272. z_1 = 7 - 7i, z_2 = -i.$$

$$273. z_1 = 1 - i, z_2 = \sqrt{3} - i.$$

$$274. z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i, z_2 = 3i.$$

275. $z_1 = 4i, z_2 = 2 - 2i.$

276. $z_1 = 2 - 2i, z_2 = 1 + \sqrt{3}i.$

277. $z_1 = 2 + 2i, z_2 = -2 + 2i.$

278. $z_1 = -5i, z_2 = \sqrt{3} + i.$

279. $z_1 = -7 + 7i, z_2 = 7i.$

280. $z_1 = 1 + i, z_2 = -3 + \sqrt{3}i.$

Задачи № 281-300. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$

281. $y' + 3x^2 y = x^3 e^{-x^3}, \quad y(0) = 0$

291. $y' = (2y + 1)\operatorname{ctgx}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

282. $y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

292. $xy' - y = x^2 \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

283. $y' - y \operatorname{ctgx} = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

293. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \quad y(0) = -1$

284. $(y^3 + 1)dy = xydx, \quad y(0) = 1$

294. $y' + \frac{1}{x}y = xy^2, \quad y(1) = 1$

285. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$

295. $y' - 2y = e^{2x}, \quad x_0 = 0, y_0 = 2$

286. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3$

296. $y' \cos x + y \cdot \sin x = 1, \quad x_0 = \pi, \quad y_0 = 3$

287. $(x^2 + 1)dy = xydx, \quad y(0) = 1$

297. $y' + 2xy = x \ln x e^{-x^2}, \quad y(1) = 0$

288. $y' + 3y = e^{2x}, \quad y(0) = \frac{6}{5}$

298. $xy' - y = y^2 \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

289. $(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0, \quad y(0) = 1$

299. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = 0$

290. $y' - \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$

300. $(1 + x^2)y' + y = y^2 \operatorname{arctgx}, \quad y(0) = 1$

Задачи № 301-320. Найти: а) частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x = x_0, y = y_0, y' = y_0'$; б) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

301. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; б) $y'' - 5y' = 4x + 3$.
302. а) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; б) $y'' - 2y' + 2y = x^2$.
303. а) $y'' - 7y' + 10y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -1$; б) $y'' - 2y' = 3x^2 + 1$.
304. а) $y'' + 2y' + 5 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; б) $y'' - y = e^{-x}$.
305. а) $y'' + 2y' + 10y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $y'' + 4y = 8e^{2x}$.
306. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; б) $y'' - y = xe^x$.
307. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$; б) $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$.
308. а) $y'' + 9y = 0$; $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = 1$; б) $y'' - 7y' + 12y = x$.
309. а) $y'' - 7y' + 12y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -2$; б) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{-x}$.
310. а) $y'' + 9y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -3$; б) $y'' + 8y' = (x-1)e^{2x}$.
311. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; б) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{4x}$.
312. а) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$; б) $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$.
313. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 5$; $y'(0) = 0$; б) $y'' + y' - 2y = (x+2)e^{-2x}$.
314. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$; б) $y'' + 2y' - 8y = (3x+1)e^{2x}$.
315. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 4$; б) $y'' + 7y' = 2x^2 + x$.
316. а) $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; б) $y'' - y' = 8x^2e^x$.
317. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$; б) $y'' + 3y' - 10y = 2x^2e^x$.
318. а) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$; б) $y'' + 2y' + y = e^x$.
319. а) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 6e^x$.
320. а) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; б) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Задачи № 321-340. Исследовать сходимость ряда: а) по признаку Даламбера; б) по радикальному или интегральному признаку Коши; в) на абсолютную или условную сходимость

$$321. а). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!} \quad б). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n \quad в). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$$

$$\begin{aligned}
322. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n}} \\
323. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n-1}}{3^{5n+1}} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \\
324. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n \cdot 3^n} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \\
325. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \\
326. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 + \frac{3}{n}} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 3^n} \\
327. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+8}{4n-1} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n} \\
328. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{6n-5} \\
329. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{9n-10} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n^3} \\
330. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{n-1} \cdot (2n-1)} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 12}{7n^2 + 2n} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n-1)^n} \\
331. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{4^n} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin^n \frac{1}{2n} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \\
332. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{4^n} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n} \\
333. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{3^n} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\
334. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)^2} \\
335. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad \vartheta). \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot \ln n} \right) \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + 1}{2n^2 + 3} \\
336. a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} \right)^n \quad \vartheta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
337. \quad a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} \quad \delta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)^3} \quad \epsilon). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{6n-5} \\
338. \quad a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^5} \quad \delta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{2n} \quad \epsilon). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n^3} \\
339. \quad a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1) \cdot 3^{n+1}}{n^2-1} \quad \delta). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} \quad \epsilon). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n-1)^n} \\
340. \quad a). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n)!} \quad \delta). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^2}} \quad \epsilon). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}
\end{aligned}$$

Задачи № 341-360. Найти область сходимости степенного ряда.

$$\begin{aligned}
341). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2} \quad 342). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}} \quad 343). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1} \quad 344). \sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n \\
345). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} \quad 346). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \quad 347). \sum_{n=1}^{\infty} 7^n x^n \quad 348). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n} \\
349). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{n(n!)^2} \quad 350). \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \quad 351). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1}} \quad 352). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
353). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n^n}{e^n n!} \quad 354). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n^2 e^n} \quad 355). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n-1} \quad 356). \sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n \\
357). \quad & \sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^n \quad 358). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n+3} \quad 359). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{7^{n-1}} \quad 360). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4n}
\end{aligned}$$

Задачи № 361-380. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена и почленного интегрирования этого ряда:

$$\begin{aligned}
361. \quad & \int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3} dx. \quad 362. \int_0^{0.25} \frac{\sin 2x}{x} dx. \quad 363. \int_0^1 \cos x^2 dx. \quad 364. \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx. \\
365. \quad & \int_0^{0.1} \frac{1-e^x}{x} dx \quad 366. \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx. \quad 367. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx. \quad 368. \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
 369. \int_0^1 \sin x^2 dx . & 370. \int_0^{0.5} \cos \frac{x^2}{4} dx . & 371. \int_0^{1/3} e^{\frac{x^2}{2}} dx . & 372. \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx . \\
 373. \int_0^{0.25} e^{-x^2} dx & 374. \int_0^1 x \cdot \cos \sqrt{x} dx & 375. \int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx & 376. \int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2} dx \\
 377. \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} & 378. \int_0^{\frac{1}{8}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}} dx & 379. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cdot \cos x dx & 380. \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}
 \end{array}$$

Ответы к тесту

Тест «Линейная алгебра»

1. <i>b</i>	2. <i>a</i>	3. <i>a</i>	4. <i>a</i>	5. <i>b</i>	6. <i>a</i>	7. <i>a</i>	8. <i>a</i>	9. <i>a</i>	10. <i>e</i>
11. <i>a</i>	12. <i>a</i>	13. <i>a</i>	14. <i>c</i>	15. <i>a</i>	16. <i>a</i>	17. <i>a</i>	18. <i>a</i>	19. <i>a</i>	20. <i>a</i>

Тест «Векторная алгебра»

1. <i>d</i>	2. <i>d</i>	3. <i>a</i>	4. <i>c</i>	5. <i>c</i>	6. <i>d</i>	7. <i>b</i>	8. <i>c</i>	9. <i>a</i>	10. <i>c</i>
11. <i>e</i>	12. <i>a</i>	13. <i>d</i>	14. <i>a</i>	15. <i>c</i>	16. <i>a</i>	17. <i>a</i>	18. <i>a</i>	19. <i>a</i>	20. <i>a</i>

Тест «Элементы аналитической геометрии на плоскости»

1. <i>a</i>	2. <i>a</i>	3. <i>a</i>	4. <i>a</i>	5. <i>a</i>	6. <i>a</i>	7. <i>b</i>	8. <i>a</i>	9. <i>d</i>	10. <i>d</i>
11. <i>b, d</i>	12. <i>b</i>	13. <i>c</i>	14. <i>d</i>	15. <i>d</i>	16. <i>b</i>	17. <i>a</i>	18. <i>c</i>	19. <i>c</i>	20. <i>b</i>

Тест «Проверка статистических гипотез»

1. <i>c</i>	2. <i>b</i>	3. <i>d</i>	4. <i>a</i>	5. <i>c</i>	6. <i>b</i>	7. <i>a</i>	8. <i>b</i>	9. <i>a</i>	10. <i>a</i>
11. <i>b</i>	12. <i>b</i>	13. <i>a</i>	14. <i>a</i>	15. <i>a</i>	16. <i>a</i>	17. <i>a</i>	18. <i>a</i>	19. <i>a</i>	20. <i>a</i>

Тест «Введение в математический анализ»

1. <i>c</i>	2. <i>a</i>	3. <i>d</i>	4. <i>b</i>	5. <i>d</i>	6. <i>d</i>	7. <i>d</i>	8. <i>c</i>	9. <i>c</i>	10. <i>d</i>
11. <i>1-d</i> <i>2-a</i> <i>3-c</i>	12. <i>d</i>	13. <i>b</i>	14. <i>a</i>	15. <i>c</i>	16. <i>a</i>	17. <i>c</i>	18. <i>b</i>	19. <i>b</i>	20. <i>a</i>

Тест «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1. <i>d</i>	2. <i>a</i>	3. <i>b</i>	4. <i>b</i>	5. <i>c</i>	6. <i>d</i>	7. <i>c</i>	8. <i>d</i>	9. <i>a</i>	10. <i>a</i>
11. <i>c</i>	12. <i>b</i>	13. <i>c</i>	14. <i>c</i>	15. <i>b</i>	16. <i>a</i>	17. <i>a</i>	18. <i>e</i>	19. <i>c</i>	20. <i>a</i>

Тест Приложения производной»

1. <i>a</i>	2. <i>d</i>	3. <i>c</i>	4. <i>c</i>	5. <i>a</i>	6. <i>c</i>	7. <i>d</i>	8. <i>a</i>	9. <i>a</i>	10. <i>a</i>
11. <i>d</i>	12. <i>a</i>	13. <i>d</i>	14. <i>d</i>	15. <i>d</i>	16. <i>b</i>	17. <i>a</i>	18. <i>a</i>	19. <i>a</i>	20. <i>a</i>

Тест «Неопределенный интеграл»

1. a	2. a	3. a	4. a	5. a	6. a	7. a	8. b	9. a	10. a
11. a	12. a	13. a	14. a	15. a	16. a	17. c	18. a	19. a	20. a

Тест «Определенный интеграл»

1. b	2. c	3. a	4. d	5. d	6. c	7. b	8. c	9. b	10. c
11. b	12. c	13. c	14. a	15. d	16. a	17. b	18. c	19. a	20. a

Тест «Функция нескольких переменных»

1. d	2. d	3. d	4. a	5. d	6. b	7. c	8. d	9. d	10. c

Тест «Комплексные числа»

1. c	2. b	3. b	4. a	5. d	6. d	7. a	8. b	9. a	10. a
11. a	12. a	13. a	14. a	15. d					

Тест «Дифференциальные уравнения»

1. a	2. a	3. a	4. a	5. a	6. a	7. a	8. a	9. a	10. a
11. a	12. a	13. a	14. a	15. a	16. a	17. a	18. a	19. a	20. a

Тест «Ряды»

1. d	2. d	3. b	4. a	5. a	6. a	7. a	8. a	9. a	10. a
11. a	12. a	13. a	14. a	15. a	16. a				

Литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 512 с.
2. Баринов В.А., Няшин А.Ф., Слезко И.В., Татосов А.В. Краткий курс лекций, упражнения и задания по высшей математике: Учебное пособие / Под ред. д.ф.-м.н., проф. В.Н. Кутрунова. – Тюмень: Практика плюс, 2001, 236 с.
3. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. «Математика» Общий курс. Учебник для бакалавров естественнонаучного направления, изд. «Лань, Санкт-Петербург, 2004.
4. Выгодский М.Я. «Справочник по высшей математике». 14-е изд. - М.: Большая Медведица, 2001.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. «Высшая математика в упражнениях и задачах в 2-х частях» Учебное пособие для вузов - 5-е изд., исправленные. М.: Высшая школа, 1998.
6. Наливайко Л.В., Ивашина Н.В., Шмидт Ю.Д. Математика для экономистов. Сборник заданий: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 432 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
7. Столярова О.А. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Числовые и функциональные ряды» Учебно-методическое пособие, изд. ТГСХА, Тюмень, 2006.
8. Шипачев В.С. Аналитическая геометрия. Метод координат. Решение геометрических задач с помощью алгебры. / Учебное пособие. / М.: Аквариум, 1997, 256 с.
9. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. Для немат. Спец. Вузов / Под ред. Акад. А.Н. Тихонова. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 1990.- 479 с., ил.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.....	3
§1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ	3
1.1 Матрицы: основные понятия, действия над матрицами	3
1.2 Определители и их свойства	7
1.3 Обратная матрица.....	14
Упражнения.....	17
§2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	21
2.1 Основные понятия и определения.....	21
2.2 Матричный метод решения систем линейных уравнений (с помощью обратной матрицы).....	22
2.3 Метод Крамера.....	25
2.4 Метод Гаусса.....	27
Упражнения.....	32
Тест для самоконтроля.....	36
РАЗДЕЛ II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.....	41
§3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА.....	41
3.1 Основные понятия и определения.....	41
3.2 Действия над векторами, заданными своими координатами.....	46
3.3 Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства.....	48
3.4 Векторное и смешанное произведение векторов.....	50
3.5 Линейно зависимые и независимые векторы. Ранг и базис системы векторов. Разложение вектора по единичному и произвольному базису ..	54
Упражнения.....	57
Тест для самоконтроля.....	69
РАЗДЕЛ III. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ.....	72
§4. Метод координат на плоскости.....	72
4.1 Координаты на прямой.....	72
4.2 Декартовы прямоугольные координаты на плоскости.....	74
§5. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ.....	75
5.1 Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.....	75
5.2 Уравнение линии на плоскости.....	78
5.3 Линии первого порядка.....	81

5.4 Линии второго порядка.....	89
Упражнения.....	97
Тест для самоконтроля.....	106
РАЗДЕЛ IV. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.....	109
§6. Постоянные и переменные величины. Понятие функции с одной и двумя переменными.....	112
6.1 Постоянные и переменные величины.....	112
6.2 Понятие множества.....	113
6.3 Функция с одной переменной.....	114
6.4 Способы задания функции.....	115
6.5 Основные свойства функции.....	116
6.6 Сложная функция.....	117
§ 7. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	119
7.1 Предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые величины и их свойства.....	119
7.2 Теоремы о пределах.....	126
7.3 Способы раскрытия неопределённостей.....	127
7.4 Первый и второй замечательные пределы.....	130
7.5 Сравнение бесконечно малых функций.....	132
7.6 Непрерывность функции. Точки разрыва.....	134
Упражнения.....	139
Тест для самоконтроля.....	145
РАЗДЕЛ V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	149
§8. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	149
8.1 Приращение функции и приращение аргумента. Задачи, приводящиеся к понятию производной.....	149
8.2 Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.....	154
8.3 Производные некоторых элементарных функций.....	159
8.4 Основные правила дифференцирования. Таблица производных.....	161
8.5 Дифференцирование сложной функции.....	164
8.6 Дифференцирование степенно-показательной функции.....	166
8.7 Дифференциал функции.....	167
8.8 Производные и дифференциалы высших порядков.....	169

8.9 Основные теоремы о дифференцируемых функциях.....	172
8.10 Правило Лопиталья	175
Упражнения.....	179
Тест для самоконтроля.....	186
§9. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ.....	190
9.1 Признаки возрастания и убывания функции.....	190
9.2 Экстремум функции.....	194
9.3 Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.....	200
9.4 Асимптоты графика функции.....	205
9.5 Схема полного исследование функции методами дифференциального исчисления и построение её графика.....	207
Упражнения.....	211
Тест для самоконтроля.....	221
Раздел VI. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	224
§10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	224
10.1 Первообразная функция и неопределенный интеграл.....	224
10.2 Основные методы интегрирования.....	227
10.3 Интегрирование рациональных дробей.....	232
10.4 Разложение правильной рациональной дроби на элементарные.....	235
10.5 Интегрирование простейших иррациональностей.....	237
10.6 Интегрирование тригонометрических выражений.....	240
Упражнения.....	246
Тест для самопроверки.....	252
§11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	257
11.1 Понятие определенного интеграла и его свойства.....	257
11.2 Замена переменной и метод интегрирования по частям в определенном интеграле.....	259
11.3 Несобственные интегралы.....	260
11.4 Геометрические приложения определённого интеграла.....	264
Упражнения.....	269
Тест для самоконтроля.....	272
РАЗДЕЛ VII. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	276
§12. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	276
12.1 Основные определения.....	276
12.2 Частные и полное приращение функции.....	277

12.3 Предел и непрерывность функции двух переменных.....	279
12.4 Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных.....	282
12.5 Частные производные высших порядков.....	285
12.6 Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала....	287
12.7 Экстремум функции с двумя переменными.....	289
Упражнения.....	291
Тест для самоконтроля.....	294
РАЗДЕЛ VIII. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.....	297
§13. Комплексные числа.....	297
13.1 Понятие числового поля.....	297
13.2 Комплексные числа.....	298
13.3 Действия над комплексными числами.....	300
13.4 Геометрическое изображение комплексных чисел.....	306
13.5 Тригонометрическая форма комплексных чисел.....	307
13.6 Умножение и деление комплексных чисел, записанных.....	308
13.7 Извлечение корней из комплексных чисел.....	309
Упражнения.....	311
Тест для самоконтроля.....	314
РАЗДЕЛ IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	316
§14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.....	316
14.1 Основные понятия и определения.....	316
14.2 Уравнения с разделяющимися переменными.....	318
14.3 Линейные уравнения первого порядка.....	320
§15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	323
15.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	323
15.2 Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	326
Упражнения.....	334
Тест для самоконтроля.....	340
РАЗДЕЛ X. РЯДЫ.....	344
§16. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.....	344

16.1 Основные понятия.....	344
6.2 Ряды с положительными членами. Признаки сходимости числовых рядов.....	346
16.3 Сходимость знакочередующихся рядов.....	351
§17. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.....	352
17.1 Область сходимости степенного ряда.....	352
17.2 Разложение функций в степенные ряды.....	357
17.3 Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.....	358
Упражнения.....	359
Тест для самоконтроля.....	366
Задания для контрольных работ.....	370
Ответы к тесту.....	392
Литература.....	394

Л.И. ЯКОБЮК, М.В. Виноградова

Высшая математика

Учебное пособие

Издательство «Вектор Бук»

Лицензия ЛР №066721 от 06.07.1999г.

Отпечатано с готового набора
в типографии Издательства «Вектор Бук»
Лицензия ПД №17-0003 от 06.07.2000г.

Подписано в печать 30.06.2016 г.
Формат 60х90 1/16. Гарнитура «Таймс».
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Тираж 200 экз.

625005, г. Тюмень, ул. Володарского, 45.
тел. (3452) 46-54-04, 46-90-03