

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Романчук Иван Сергеевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 04.03.2025 13:11:32  
Уникальный программный ключ:  
6319edc2b582ffdacea443f01d5779368d0957ac34f5cd074d81181530452479

Приложение к  
рабочей программе  
дисциплины

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Наименование дисциплины	<i>Асимптотические методы</i>
Направление подготовки / Специальность	<i>01.03.03 Механика и математическое моделирование</i>
Направленность (профиль) / Специализация	<i>Механика жидкости, газа и плазмы</i>
Форма обучения	<i>очная</i>
Разработчик(и)	<i>Звонарев Д.С., старший преподаватель кафедры фундаментальной математики и механики</i>

1. Темы дисциплины для самостоятельного освоения обучающимися  
Отсутствуют.

2. План самостоятельной работы:

№ п/п	Учебные встречи	Виды самостоятельной работы	Форма отчетности / контроля	Количество баллов	Рекомендуемый бюджет времени на выполнение (ак.ч.)
1	2	3	4	5	6
1	Основные определения и понятия	Проработка лекций. Подготовка к лабораторным занятиям. Выполнение расчетных заданий.	Решение задач. Фронтальный, индивидуальный и другие формы опроса	2	6
2	Прямые разложения и источники неравномерностей	Проработка лекций. Подготовка к лабораторным занятиям. Выполнение расчетных заданий.	Решение задач. Фронтальный, индивидуальный и другие формы опроса	2	6
3	Алгебраические уравнения, содержащие малый параметр	Проработка лекций. Подготовка к лабораторным занятиям. Выполнение расчетных заданий.	Решение задач. Фронтальный, индивидуальный и другие формы опроса	2	6
4	Уравнение Дюффинга	Проработка лекций. Подготовка к лабораторным занятиям. Выполнение расчетных заданий.	Решение задач. Фронтальный, индивидуальный и другие формы опроса	2	6
5	Линейный осциллятор с затуханием	Проработка лекций. Подготовка к лабораторным занятиям. Выполнение расчетных заданий.	Решение задач. Фронтальный, индивидуальный и другие формы опроса	2	6
6	Системы с квадратичными и кубическими нелинейностями	Проработка лекций. Подготовка к лабораторным занятиям. Выполнение расчетных заданий.	Решение задач. Фронтальный, индивидуальный и другие формы опроса	2	6
7	Задачи с пограничным слоем	Проработка лекций. Подготовка к лабораторным занятиям. Выполнение расчетных заданий.	Решение задач. Фронтальный, индивидуальный и другие формы опроса	2	6

		занятиям. Выполнение расчетных заданий.	другие формы опроса		
8	Контрольные работы	Подготовка к контрольным работам	Контрольная работа (решение задач)	0	27
9	Дифференцированный зачет	Подготовка к дифференцированному зачету	Контрольная работа (решение задач). Собеседование	0	17
10			Итого	14	86

3. Требования и рекомендации по выполнению самостоятельных работ обучающихся, критерии оценивания.

1) Основные определения и понятия.

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

Примеры задач:

а) Определить порядок следующих выражений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \quad \ln(1+5\varepsilon), \quad \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{1-\cos\varepsilon}.$$

б) Расположить следующие функции в порядке убывания при малых  $\varepsilon$ :

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \quad e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

2) Прямые разложения и источники неравномерностей.

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

Примеры задач:

а) Найти первые три члена разложений следующих функций при малом  $\varepsilon$ :

$$\cos\sqrt{1-\varepsilon t}, \quad \sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon+2\varepsilon^2}.$$

3) Алгебраические уравнения, содержащие малый параметр.

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

Примеры задач:

- а) Определить три члена разложения для каждого корня уравнения при малом  $\varepsilon$ :

$$x^2 - (2 + \varepsilon)x - 3 + 2\varepsilon = 0$$

- б) Определить три члена разложения для каждого корня уравнения при малом  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon x^4 + x^2 - 3x + 2 = 0$$

#### 4) Уравнение Дюффинга.

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

Примеры задач:

- а) Рассмотреть уравнение  $\ddot{x} - \omega_0^2 x = \varepsilon \dot{x}^2 x$ ,  $\varepsilon \ll 1$ :

- построить двучленное прямое разложение решения и исследовать его равномерность;
- с помощью метода перенормировки сделать это разложение равномерно пригодным;
- построить равномерно пригодное разложение первого порядка с помощью методики Линдштедта-Пуанкаре;
- используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка;
- используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

#### 5) Линейный осциллятор с затуханием.

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

Примеры задач:

- а) Рассмотреть уравнение  $\ddot{x} + \frac{\delta x}{1 + \varepsilon \cos 2t} = 0$ :

- построить разложение второго порядка для уравнений переходных кривых вблизи точек  $\delta = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\delta = 4$ .
- используя метод Уиттекера, построить разложение второго порядка для решения  $x$  в окрестности этих кривых.

б) Системы с квадратичными и кубическими нелинейностями.

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

Примеры задач:

- а) Рассмотреть уравнение  $\ddot{x} - 2\dot{x} - x^2 + x^3 = 0$ . Показать, что положения равновесия системы, описываемой этим уравнением, определяются координатами  $x=0, -1, 2$ . Построить равномерно пригодное разложение второго порядка при малых, но конечных амплитудах с помощью:
- метода Линдштедта-Пуанкаре;
  - метода многих масштабов;
  - обобщенного метода усреднения.

7) Задачи с пограничным слоем.

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

Примеры задач:

- а) Рассмотреть краевую задачу:  $\varepsilon y'' + y' = 1$ ,  $y(0) = \alpha$ ,  $y(1) = \beta$ .
- найти точное решение;
  - используя методы сращиваемых асимптотических разложений и многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка;
  - сопоставить результаты.

8) Контрольные работы

В ходе подготовки к занятиям требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач.

В ходе подготовки к занятиям рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

#### 9) Дифференцированный зачет

В ходе подготовки к дифференцированному зачету требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач, разобрать задачи из контрольных и домашних работ.

В ходе подготовки к дифференцированному зачету рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, разобрать задачи из контрольных и домашних работ, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

#### 4. Рекомендации по самоподготовке к промежуточной аттестации по дисциплине.

Дифференцированный зачет проводится письменно в форме экзаменационной контрольной работы. Экзаменационная контрольная работа является инструментом промежуточной аттестации обучающегося в 6-м семестре. Экзаменационная контрольная работа проводится в аудитории продолжительностью 90 минут.

##### Рекомендации для подготовки:

В ходе подготовки к дифференцированному зачету требуется освоить основные термины и понятия, разобрать примеры решения задач, разобрать задачи из контрольных и домашних работ.

В ходе подготовки к дифференцированному зачету рекомендуется изучить материалы лекций, примеры, разобранные на лабораторных работах, разобрать задачи из контрольных и домашних работ, основную и дополнительную литературу, публикации в научных изданиях, если на них есть отсылки в лекциях, материалы, размещенные на электронных образовательных ресурсах.

Обучающийся самостоятельно выбирает дату и время выполнения задания в пределах установленного срока, задания, выполненные вне установленного срока, на проверку не принимаются. Расчеты необходимо выполнить последовательно и сопроводить комментариями собственноручно в тетради или на листах формата А4.

##### Вопросы для подготовки к дифференцированному зачету:

1. Анализ размерностей. Калибровочные функции.
2. Прямые разложения. Действия над разложениями.
3. Алгебраические уравнения, содержащие малый параметр.
4. Асимптотика решений дифференциальных уравнений по малому параметру.
5. Прямое разложение решения уравнения Дюффинга. Анализ точного решения.
6. Метод Линдштедта-Пуанкаре. Метод перенормировки.
7. Метод многих масштабов.
8. Метод вариации постоянных. Метод усреднения.
9. Линейный осциллятор с затуханием. Точное решение.
10. Линейный осциллятор с затуханием. Асимптотика решения.
11. Системы с нелинейностями. Обобщенный метод усреднения.
12. Метод Крылова-Боголюбова-Митропольского.
13. Уравнение Матье. Теория Флоке.
14. Метод растянутых параметров.
15. Метод Уиттекера.
16. Задачи с пограничным слоем. Метод сращиваемых асимптотических разложений.
17. Задачи с двумя пограничными слоями.

Задачи для подготовки к дифференцированному зачету:

1. Определить порядок следующих выражений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \quad \ln(1+5\varepsilon), \quad \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{1-\cos\varepsilon}.$$

2. Расположить следующие функции в порядке убывания при малых  $\varepsilon$ :

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{3}{\varepsilon^2}, \quad e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

3. Найти первые три члена разложений следующих функций при малом  $\varepsilon$ :

$$\cos\sqrt{1-\varepsilon t}, \quad \sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon+2\varepsilon^2}.$$

4. Определить три члена разложения для каждого корня уравнения при малом  $\varepsilon$ :

$$x^2 - (2 + \varepsilon)x - 3 + 2\varepsilon = 0$$

5. Определить три члена разложения для каждого корня уравнения при малом  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon x^4 + x^2 - 3x + 2 = 0$$

6. Рассмотреть уравнение  $\ddot{x} - \omega_0^2 x = \varepsilon \dot{x}^2 x$ ,  $\varepsilon \ll 1$ :

- построить двучленное прямое разложение решения и исследовать его равномерность;
- с помощью метода перенормировки сделать это разложение равномерно пригодным;
- построить равномерно пригодное разложение первого порядка с помощью методики Линдштедта-Пуанкаре;
- используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка;
- используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

7. Рассмотреть уравнение  $\ddot{x} + \frac{\delta x}{1+\varepsilon \cos 2t} = 0$ :

- построить разложение второго порядка для уравнений переходных кривых вблизи точек  $\delta = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\delta = 4$ .
- используя метод Уиттекера, построить разложение второго порядка для решения  $x$  в окрестности этих кривых.

8. Рассмотреть уравнение  $\ddot{x} - 2x - x^2 + x^3 = 0$ . Показать, что положения равновесия системы, описываемой этим уравнением, определяются координатами  $x=0, -1, 2$ . Построить равномерно пригодное разложение второго порядка при малых, но конечных амплитудах с помощью:

- метода Линдштедта-Пуанкаре;
- метода многих масштабов;
- обобщенного метода усреднения.

9. Рассмотреть краевую задачу:  $\varepsilon y'' + y' = 1$ ,  $y(0) = \alpha$ ,  $y(1) = \beta$ .

- найти точное решение;
- используя методы срачиваемых асимптотических разложений и многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка;
- сопоставить результаты.