6319edc2b582ffdacea443f01d5779368d0957ac34f5cd074d81181530452479

Приложение к рабочей программе дисциплины

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

| | |
|---|---|
| Наименование дисциплины | Функциональный анализ |
| Направление подготовки / Специальность | 01.03.01 Математика |
| Направленность (профиль) /Специализация | Вещественный, комплексный и функциональный анализ |
| Форма обучения | очная |
| Разработчик | Девятков А. П., доцент кафедры фундаментальной математики и механики |

1. Темы дисциплины для самостоятельного освоения обучающимися

   Отсутствуют.

2. План самостоятельной работы

| № п/п | Учебные встречи | Виды самостоятельной работы | Форма отчетности / контроля | Количество баллов | Рекомендуемый бюджет времени на выполнение (ак.ч.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | Линейные операторы и функционалы | Изучение лекционного материала | Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы | 0 | 4 |
| 2 | Линейные операторы и функционалы | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 6 |
| 3 | Сопряженное пространство | Изучение лекционного материала | Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы | 0 | 4 |
| | Сопряженное пространство | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 6 |
| 4 | Топологические векторные пространства | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 6 |
| 5 | Слабая сходимость | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 6 |
| 6 | Компактные операторы | Изучение лекционного материала | Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы | 0 | 2 |
| 7 | Компактные операторы | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 8 |
| 8 | Компактные операторы | Подготовка к контрольной работе | Решение демоверсии контрольной работы | 0 | 6 |
| 9 | Спектр линейного оператора | Изучение лекционного материала | Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы | 0 | 2 |
| 10 | Спектр линейного оператора | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 6 |
| 11 | Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами | Изучение лекционного материала | Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы | 0 | 2 |
| 12 | Теоремы Фредгольма и их применение | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 6 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве | Изучение лекционного материала | Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы | 0 | 2 |
| 14 | Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве | Решение задач по теме лекции | Защита решения перед преподавателем | 5 | 6 |
| 15 | Функции от самосопряженных операторов | Подготовка к контрольной работе | Решение демоверсии контрольной работы | 0 | 6 |
| 16 | Спектральная теорема | Изучение лекционного материала | Решение задач по теме лекции, выполнение контрольной работы | 0 | 2 |
| 17 | Подготовка к экзамену | Повторение лекционного материала и решение задач с практических занятий | Экзамен | 0 | 6 |
| 18 | | | Итого | 40 | 86 |

3. Требования и рекомендации по выполнению самостоятельных работ обучающихся, критерии оценивания.

Изучение лекционного материала

Рекомендации по выполнению.

Помимо записей лекций, рекомендуется обратиться к следующим учебникам:

1) Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
2) Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
3) Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
4) Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
5) Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
6) Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
7) Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
8) Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том 2. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.

Распределение учебников по темам:

*Линейные операторы и функционалы*

[1] – глава IV, §1, §5; [2] – глава II, §1, §2, главы V, VII; [3] – главы III, IV; [4] – главы III, IV; [7] – главы II, VI.

*Сопряженное пространство*

[1] – глава III, §2, глава IV, §2, §3; [2] – глава 2, §3, §4, глава V, §7, глава VIII; [3] – глава IV; [5] – §III.2, §III.3, §IV.5; [6] – пп. 3.1–3.21; [7] – глава V.

*Компактные операторы*

[1] – глава IV, §6; [2] – глава IX; [3] – глава VI; [4] – глава V; [5] – §VI.5; [6] – пп. 4.16–4.25;

*Спектр линейного оператора*
[3] – глава VII; [4] – глава VII;.[5] – §VI.3; [7] – глава VII.
*Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами*
[1] – глава IX; [2] – главы XII, XIII; [3] – глава VI, §2; [4] – глава 5, §2; [7] – глава VII.
*Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве*
[3] – глава VII; [5] – глава 12.
*Спектральная теорема*
[4] – глава VII; [5] – глава 12.

При проработке теоретического материала необходимо параллельно решать задачи по данной теме, предложенные преподавателем для самостоятельного решения.

<u>Решение задач по теме лекции</u>
Задачи предназначены для самостоятельного решения студентами в течение семестра. При решении задач можно пользоваться любыми источниками, помощью одногруппников и так далее. Решенные задачи нужно показать (и объяснить решение) преподавателю, который ведет практические занятия. При полном корректном решении задачи и при условии ответов студента на все вопросы преподавателя по представленному решению, за задачу дается указанное количество баллов. При недочетах в решении или при отсутствии ответов на вопросы по решению, на выбор студента: либо задача не засчитывается и может быть сдана позднее, либо за неё ставится меньшее количество баллов на усмотрение преподавателя.
Примерные задания по темам.

*Линейные операторы и функционалы*

1) Вычислить норму функционала $f \in \left(C([-1,1])\right)^*$,
$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt - 3x(0).$$
2) Доказать, что оператор $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ ограничен в пространстве
   а) $l_p, p \in [1, \infty)$; б) $c_0$; в) $l_\infty$
   тогда и только тогда, когда $\{\lambda\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$. Найти его норму и ядро в каждом из пространств в зависимости от последовательности $\{\lambda\}_{n=1}^{\infty}$.

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятия, и примеры, разобранные в учебниках.

*Сопряженное пространство*

1) Найти элементы пространства $l_1$, соответствующие следующим функционалам на пространствах $c$ и $c_0$:
   а) $f_n(x) = x_n, n \in \mathbb{N}$; б) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$; в) $f(x) = x_1 - \lim_{n\to\infty} x_n$.
   Найти нормы этих функционалов.
2) Доказать, что пространство $L_1[0,1]$ изометрически вложено в $L_\infty[0,1]$, но не изоморфно ему.

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

*Топологические векторные пространства*

1) Доказать, что в ТВП сумма двух компактных множеств – компактное множество.

2) Докажите, что каждый секвенциально непрерывный оператор ограничен, т.е. переводит ограниченные множества в ограниченные.
3) Пусть система векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ в топологическом векторном пространстве $X$ линейно независима. Докажите, что существует окрестность нуля $U$ такая, что если $w_i - v_i \in U$ для всех $i = 1, \dots, n$, то система векторов $\{w_1, \dots, w_n\}$ также линейно независима.

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

*Слабая сходимость*

1) Доказать, что в $l_1$ слабая сходимость последовательности совпадает со сходимостью по норме.
2) Пусть $X$ – сепарабельное нормированное пространство. Доказать, что единичный шар в $X^*$ $*$-слабо секвенциально компактен, то есть из любой последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|f_n\|_{X^*} \leq 1$, можно выбрать подпоследовательность, $*$-слабо сходящуюся к точке единичного шара.

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

*Компактные операторы*

1) Пусть $X$ – банахово пространство. Доказать, что если для всякого оператора $A \in K(X)$ образ замкнутого единичного шара $A\left(\overline{B}(0,1)\right)$ есть компактное множество, то пространство $X$ рефлексивно.
2) Является ли компактным в пространстве $C([-1,1])$ оператор
$$Ax(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)?$$

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятия, и примеры, разобранные в учебниках.

*Спектр линейного оператора*

1) Пусть $X$ – банахово пространство, $A \in B(X)$. Доказать, что $\sigma(A) = \sigma(A')$.
2) Пусть $X$ – банахово пространство, $A \in B(X)$. Доказать, что если $\lambda \in \sigma_r(A)$, то $\lambda \in \sigma_p(A')$; если $\lambda \in \sigma_p(A)$, то $\lambda \in \sigma_p(A') \cup \sigma_r(A')$; если $\lambda \in \sigma_c(A)$, то $\lambda \in \sigma_c(A') \cup \sigma_r(A')$.
3) Найти спектр и резольвенту оператора $Ax(t) = -x(t)$ в $C[-1,1]$.

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятия, и примеры, разобранные в учебниках.

*Теоремы Фредгольма и их применение*

1) При каких условиях на последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$ оператор $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$ в $l_p$, где $1 \leq p < +\infty$, является фредгольмовым оператором? В тех случаях, когда оператор фредгольмов, вычислить $\alpha(A)$, $\beta(A)$ и $\operatorname{ind} A$.
2) В пространстве $L_2(0,1)$ найти решение интегрального уравнения при всех значениях $\lambda \in \mathbb{C}$

$$x(t) - \lambda \int_0^1 \min(t,s)\, x(s) ds = 0$$

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

*Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве*

1) Пусть $H$ – бесконечномерное гильбертово пространство, $A$ – самосопряженный оператор в $H$. Доказать, что если $A$ – компактен, а $f$ – функция, определённая и непрерывная на $\sigma(A)$, то оператор $f(A)$ компактен тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$.

Рекомендации по выполнению:
- Изучить лекционный материал.
- Разобрать доказательства теорем.
- Внимательно разобрать примеры решения, рассмотренные на практических занятиях, и примеры, разобранные в учебниках.

Подготовка к контрольной работе

В течение семестра проводятся две аудиторные контрольные работы, каждая на 30 баллов – 5 задач по 6 баллов каждая. Время выполнения работы – 2 академических часа (90 минут). Примерное задание. Решить тестовую контрольную работу. Тестовая контрольная работа является инструментом текущего контроля знаний, умений и навыков обучающего по группам тем дисциплины.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1

1) Найти продолжение функционала $f \in l^*$, $l = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x\}$, $f(x,y) = 2x$ на все пространство $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

2) Объяснить существование обратного оператора к оператору $I - A: C[0;1] \to C[0;1]$ и представить обратный оператор в виде ряда.

$$Ax(t) = \frac{x(1-t)}{5} + \frac{x(t)}{7}$$

3) Найти обратный оператор к оператору $A: L_3[0,1] \to L_3[0,1]$, $A(x)(t) = e^t x(t/2)$.

4) Найти резольвенту оператора $A: C[0,1] \to C[0,1]$ при $\lambda = 100$,

$$A(x) = \int_0^1 (s^2 + st^3) x(s) ds.$$

5) Решить интегральное уравнение (записать решение в виде ряда)

$$0{,}1\int_0^1 \sin(st) x(s) ds + x(t) = \sin t$$

Контрольная работа № 2

1) Найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s) x(s) ds - x(t) = -3\sin t + 5\cos t$$

2) Найти те функции $y(t)$, с которыми уравнение

$$\int_0^1 (-23ts + 624s^2) x(s) ds - x(t) = y(t)$$

имеет решение.

3) Записать решение уравнения Вольтерра в виде ряда

$$\int_0^t (ts+s^2)x(s)ds - x(t) = t$$

4) Найти спектр оператора в $C[0,1]$

$$A(x) = \int_0^1 (s^2+st^3)x(s)ds.$$

5) Найти спектр оператора

$$A: l_2 \to l_2, \;\; A(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) = (x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots).$$

Критерии оценивания:
6 баллов – обосновано получен верный ответ, названы используемые в решении теоретические утверждения, все вычисления проведены верно.
5 баллов – получен верный ответ, но не названы используемые в решении теоретические утверждения; в вычислениях может быть допущена арифметическая ошибка.
3 балла – в целом верный ход решения, но присутствует грубая ошибка в вычислениях.
2 балла – названы теоретические утверждения, необходимые для решения задачи; присутствуют вычисления, имеющие отношения к задаче, но они не завершены.
1 балл – названы теоретические утверждения, необходимые для решения задачи; вычисления либо отсутствуют, либо не имеют отношения к задаче.

Рекомендации по самоподготовке к промежуточной аттестации по дисциплине

Оценка студента в рамках модульно-рейтинговой системы оценок является интегрированной оценкой выполнения студентом заданий во время практических занятий, домашних заданий, контрольных работ. Эта оценка характеризует уровень сформированности практических умений и навыков, приобретенных студентом в ходе изучения дисциплины:
61 - 75 баллов - удовлетворительно;
76 - 90 баллов - хорошо;
91 -100 баллов - отлично.
Неуспевающие студенты или студенты, желающие повысить оценку, на экзамене должны написать письменную работу. Экзаменационные билеты включают: теоретический вопрос по курсу дисциплины и две задачи из числа разобранных на семинарах и предлагавшихся на контрольных работах.
Вопросы к экзамену

1. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и его непрерывность.
2. Теорема Банаха-Штейнгауза.
3. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
4. Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство. Отделение выпуклых множеств.
5. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам.
6. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Ограниченность слабо ограниченных множеств.
7. Топологические векторные пространства. Полунормы. Локально-выпуклые пространства. Непрерывные отображения топологических векторных пространств.
8. Обобщения теорем Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, теоремы об открытом отображении для топологических векторных пространств.
9. Двойственность в топологических векторных пространствах.
10. Сопряженные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Равенство норм оператора и его сопряженного.
11. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.

12. Спектр диагонального оператора. Норма и спектр оператора умножения на функцию.
13. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве.
14. Альтернатива Фредгольма.
15. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
16. Равенства $||A|| = \sup\{|(Ax,x)|: ||x|| \leq 1\} = \sup \{|\lambda|: \lambda \in \sigma(A)\}$ для самосопряженного оператора.
17. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
18. Теорема об отображении спектров для многочленов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство $||f(A)|| = \sup\{|f(t)|: t$ лежит в $\sigma(A)\}$.
19. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для оператора с циклическим вектором).
20. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.